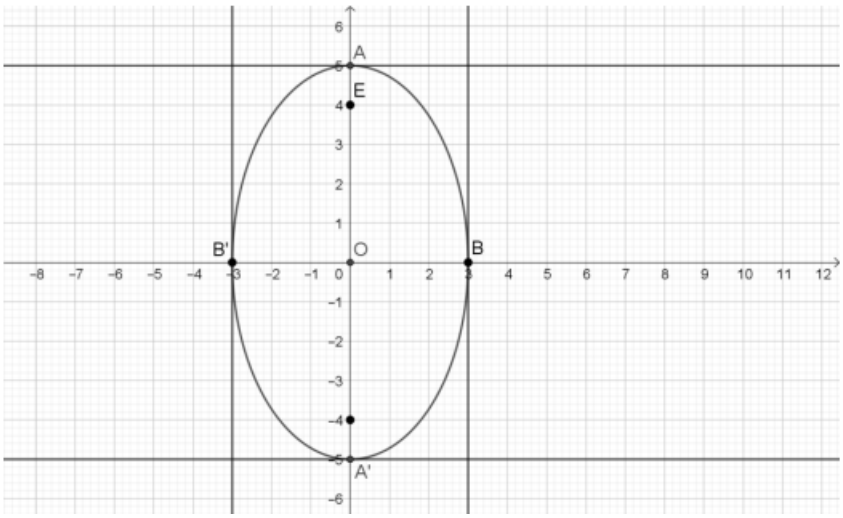
ΕΛΛΕΙΨΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΜΑΡΤΙΟΣ 2023 ΛΥΣΕΙΣ

20718 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι $\alpha^2 = 25$ και $\beta^2 = 9$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16$ και άρα $\gamma = 4$. Οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E(0,4)$ και $E'(0,-4)$.

β) Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία $A(0,5)$, $A'(0,-5)$, $B(3,0)$, $B'(-3,0)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

γ) Οι εφαπτόμενες στα άκρα των δύο αξόνων της, δηλαδή στα σημεία $A(0,5)$, $A'(0,-5)$, $B(3,0)$, $B'(-3,0)$ έχουν εξισώσεις $y = 5$, $y = -5$, $x = 3$, $x = -3$ και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



20883 ΘΕΜΑ 2

α) Είναι: C: $16x^2 + 25y^2 = 400$ ή C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, οπότε:

$\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, άρα $(A'A) = 2\alpha = 2\cdot 5 = 10$ είναι το μήκος του μεγάλου άξονα.

Επίσης $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$, άρα $(B'B) = 2\beta = 2\cdot 4 = 8$ είναι το μήκος του μικρού άξονα.

Ακόμη: $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9$, οπότε $\gamma = 3$.

Άρα $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$ ή $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ είναι οι εστίες της έλλειψης.

β) Έχουμε $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

Θέλουμε η E' να είναι εστία της ζητούμενης παραβολής, άρα $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$, άρα

C': $y^2 = 2px$ ή C': $y^2 = 2\cdot(-6)x$ ή C': $y^2 = -12x$, είναι η ζητούμενη εξίσωση.

21308 ΘΕΜΑ 2

α) Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha = 5$ και $\beta = 4$.

Επομένως έχει εστίες της μορφής $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$, με $\gamma > 0$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ ή $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ ή $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

Αντικαθιστώντας $\alpha = 5$ και $\beta = 4$ έχουμε $\gamma^2 = 5^2 - 4^2$ ή $\gamma^2 = 25 - 16$ ή $\gamma^2 = 9$ ή $\gamma = 3$, εφόσον $\gamma > 0$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma = 2 \cdot 3 = 6$.

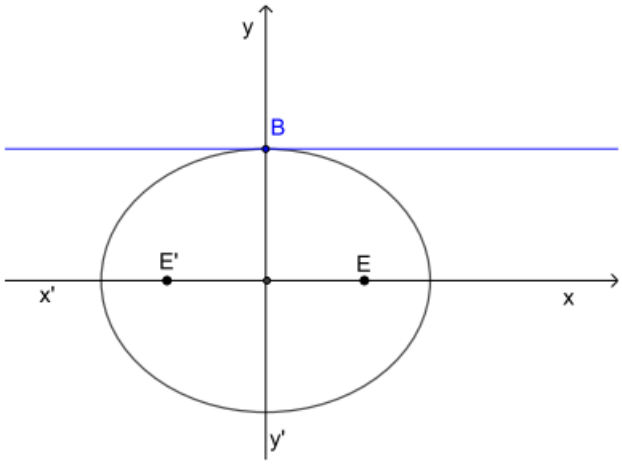
β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta = 2 \cdot 4 = 8$.

Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha = 2 \cdot 5 = 10$.

γ) Από τη θεωρία η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της (x_1, y_1) είναι $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_2}{\beta^2} = 1$.

Αντικαθιστώντας όπου x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Β της έλλειψης και όπου $\alpha = 5$ και $\beta = 4$ έχουμε:

$\frac{0x}{25} + \frac{4y}{16} = 1$ ή $y = 4$, που είναι η εξίσωση της (ε).



21647 ΘΕΜΑ 2

α) Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E'(-4,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\gamma = 4$. Αφού έχει μεγάλο άξονα 10 συμπεραίνουμε ότι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$. Από τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ έχουμε ότι

$5^2 = \beta^2 + 4^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

β) Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $M(4, \frac{9}{5})$ έχει εξίσωση $\frac{4 \cdot x}{25} + \frac{\frac{9}{5} \cdot y}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot x}{25} + \frac{y}{5} = 1$.

21648 ΘΕΜΑ 2

α) Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E'(-3,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\gamma = 3$. Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι $(ME) + (ME') = 2\alpha$. Είναι

$$(ME) + (ME') = \sqrt{(4-3)^2 + (\frac{12}{5} - 0)^2} + \sqrt{(4+3)^2 + (\frac{12}{5} - 0)^2} =$$

$$\sqrt{1+\frac{144}{25}}+\sqrt{49+\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{169}{25}}+\sqrt{\frac{1369}{25}}=\frac{13}{5}+\frac{37}{5}=\frac{50}{5}=10 \quad .$$

Συνεπώς $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$.

β) Από τη σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ έχουμε ότι

$5^2=\beta^2+3^2 \Leftrightarrow \beta^2=16 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=4$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $M(4,\frac{12}{5})$ έχει εξίσωση $\frac{4\cdot x}{25}+\frac{\frac{12}{5}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{4\cdot x}{25}+\frac{4y}{15}=1$.

22168 ΘΕΜΑ 2

α)

i. Η παραβολή $y^2 = 2px$ διέρχεται από το A(1,2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$$2^2 = 2p1 \text{ ή } 4 = 2p \text{ ή } p = 2$$

Επομένως, $y^2 = 2 \cdot 2x$ ή $y^2 = 4x$.

ii. Η εστία E της παραβολής είναι:

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) \text{ ή } E(1,0)$$

β) Μία από τις εστίες της έλλειψης είναι το σημείο E(γ,0) και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 2α. Αφού η εστία είναι το σημείο E(1,0), έχουμε ότι γ = 1.

Επειδή ο μεγάλος άξονας έχει μήκος ίσο με 4 έχουμε ότι 2α = 4, οπότε α = 2.

Είναι:

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Οπότε, η εξίσωση της έλλειψης γίνεται:

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

22192 ΘΕΜΑ 2

α) Η έλλειψη με εξίσωση την (1) έχει $\alpha^2 = 225$, $\beta^2 = 81$ και εστίες τα σημεία E(γ,0), E΄(-γ,0). Είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144$$

Άρα, γ = 12. Επομένως, οι εστίες της έλλειψης είναι:

$$E(12,0),\ E'(-12,0)$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου B επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Για x = 0 και y = 9 είναι:

$$\frac{0^2}{225}+\frac{9^2}{81}=1$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Β είναι σημείο της έλλειψης .

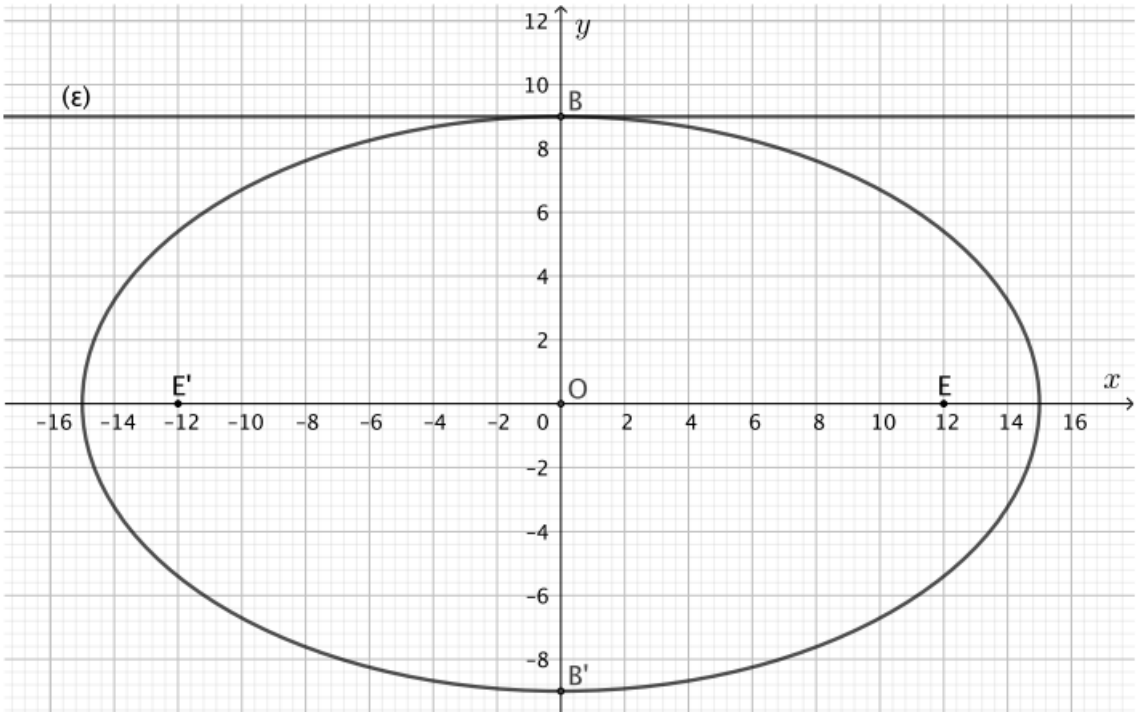
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $B(x_1,y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{225}+\frac{yy_1}{81}=1$$

Αφού δίνεται ότι Β(0,9), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\frac{0x}{225}+\frac{9y}{81}=1 \quad \text{ή} \quad y=9$$

Η καμπύλη της έλλειψης, οι εστίες Ε, Ε΄ της και η εφαπτομένη (ε) απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



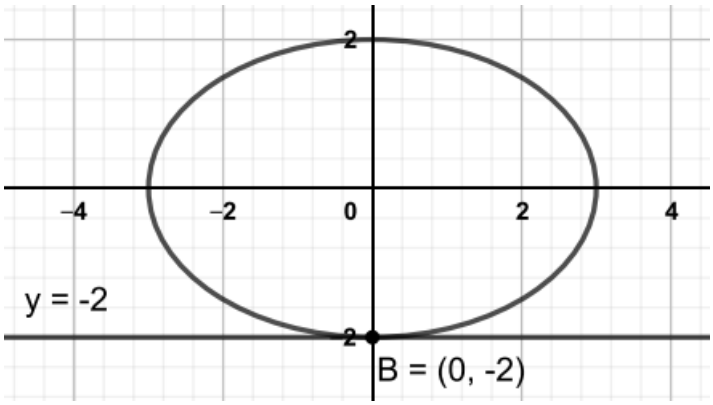
22268 ΘΕΜΑ 2

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\alpha^2=9$ και $\beta^2=4$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε'(-γ, 0), όπου $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{5}$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι ίσο με $2\alpha=2\cdot 3=6$

α) «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, **0**) και Ε'(**-**$\sqrt{5}$, **0**) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με **6** και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ».

β)



Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της έλλειψης είναι της μορφής

ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\cdot xx_1 + 9\cdot yy_1 = 36$. Δίνεται το σημείο επαφής Β(0,-2), οπότε αν θέσουμε στην εξίσωση της ευθείας ε όπου $x_1 = 0$ και $y_1 = -2$ θα έχουμε ε : $4x\cdot 0 + 9y\cdot(-2) = 36$ ή ε : $-18y = 36$ ή ε: $y = -2$.

22556 ΘΕΜΑ 2

α) i) Είναι $(A'A) = |x_A - x_{A'}| = |5+5| = 10$ και $(B'B) = |y_B - y_{B'}| = |4+4| = 8$,

άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(A'A) = 10$ και ο μικρός άξονας έχει μήκος $(B'B) = 8$.

ii) Είναι $(A'A) = 2\alpha$ ή $2\alpha = 10$ ή $\alpha = 5$

και $(B'B) = 2\beta$ ή $2\beta = 8$ ή $\beta = 4$.

Επομένως

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

$5^2 = 4^2 + \gamma^2$

$\gamma^2 = 9$

$\gamma = 3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3\,,0)$ και $E(3\,,0)$.

β) Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης θα είναι

$(ME') + (ME) = 2\alpha$ ή $(ME') + (ME) = 10$.

22558 ΘΕΜΑ 2

α) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-2\,,0)$ και $E(2\,,0)$,

άρα $2\gamma = (E'E) = 4$ ή $\gamma = 2$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A) = 8$,

άρα $2\alpha = (A'A) = 8$ ή $\alpha = 4$.

Επομένως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.

Επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) i) Από την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, για $x=x_E=2$ βρίσκουμε:

$$\frac{2^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{12}=1$$

$$3+y^2=12$$

$$y^2=9$$

$$y=3 \text{ ή } y=-3$$

Επειδή το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική, θα είναι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

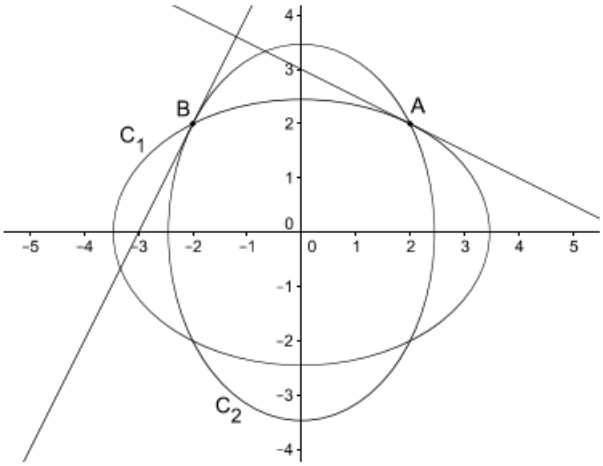
ii) Είναι $(\Sigma P)=|y_P-y_\Sigma|=|-3-3|=|-6|=6$.

22564 ΘΕΜΑ 2

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ελλείψεων αφού

$$\frac{2^2}{12}+\frac{2^2}{6}=\frac{4}{12}+\frac{4}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \quad \text{και} \quad \frac{2^2}{6}+\frac{2^2}{12}=\frac{4}{6}+\frac{4}{12}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Το σημείο Β είναι συμμετρικό του σημείο Α ως προς τον άξονα $y'y$, επομένως θα ανήκει στις δύο ελλείψεις, αφού και το σημείο Α ανήκει στις δύο ελλείψεις.



β) Η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$\frac{2x}{12}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y=6 \Leftrightarrow x+2y-6=0.$$

Η εφαπτομένη ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$\frac{-2x}{6}+\frac{2y}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{6}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow -2x+y=6 \Leftrightarrow -2x+y-6=0.$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_1 είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_2 είναι $\lambda_2=2$.

Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες, γιατί $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$.

22273 ΘΕΜΑ 4

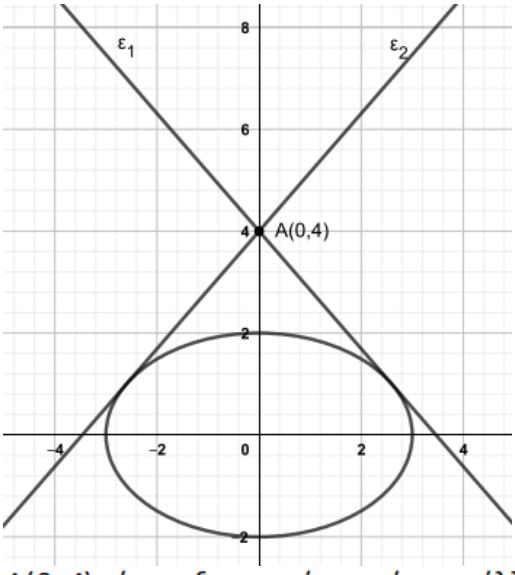
α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$.

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα x'x θέτουμε στην εξίσωση (1) y=0. Έτσι έχουμε $\frac{\chi^2}{9} = 1$ ή $x^2 = 9$, οπότε x =3 ή x= -3. Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι τα σημεία A(3,0) και A'(-3,0).

Αντίστοιχα, για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα y'y θέτουμε στην εξίσωση (1) x=0. Έτσι έχουμε $\frac{y^2}{4} = 1$ ή $y^2 = 4$, οπότε y =2 ή y= -2. Τα σημεία τομής με τον άξονα y'y είναι τα σημεία B(0,2) και B'(0,-2).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οπότε οι εστίες έχουν συντεταγμένες E(γ, 0) , και E'(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Άρα οι εστίες της E, και E' έχουν συντεταγμένες E($\sqrt{5}$, 0) και E'(-$\sqrt{5}$, 0).

β)



Το σημείο A(0, 4) είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η έλλειψη που μας δόθηκε τέμνει τον άξονα y'y στα σημεία B(0, 2) και B'(0,-2). Θεωρούμε M(x_1, y_1) το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο M θα είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\,xx_1 + 9\,yy_1 = 36$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο A(0 , 4), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $4 \cdot 0\, x_1 + 9 \cdot 4y_1 = 36 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (2).

Επιπλέον το σημείο M(x_1, y_1) είναι σημείο της έλλειψης, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση(1). Άρα ισχύει $\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{{y_1}^2}{4} = 1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει

$$\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{1^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{{x_1}^2}{9} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και λόγω της (2) έχουμε $y_1 = 1$, έχουμε την εφαπτόμενη ε με εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4\frac{3\sqrt{3}}{2}x + 9\ y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Για $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 1$, οπότε η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x + 9\ y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4) είναι οι ε_1

$$2\sqrt{3}\,x + 3y = 12 \text{ και } \varepsilon_2 : -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

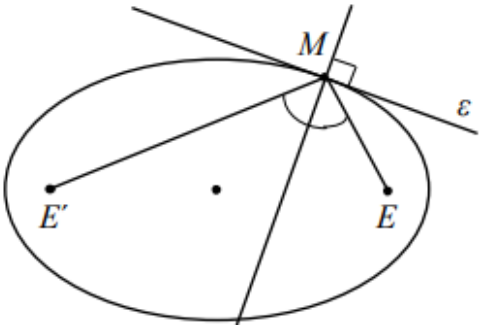
20726 ΘΕΜΑ 4

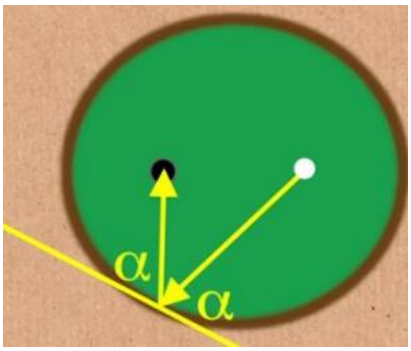
α) Το μήκος του σχοινιού εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες. Συνεπώς το άθροισμα αυτό είναι 10 μονάδες μήκους, που είναι και το μήκος του μεγάλου άξονα. Είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\gamma = 3$, οπότε $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Συνεπώς το μήκος του μικρού άξονα είναι 8 μονάδες μήκους.

β) Η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα xx' και η εξίσωσή της είναι $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι : Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E, E' οι εστίες της έλλειψης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).





Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία. Συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της C και αν σημαδέψει θα πετύχει το στόχο του, εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα, αφού τότε η μπάλα θα πέσει στην τρύπα χωρίς να χτυπήσει πρώτα στο περίγραμμα του μπιλιάρδου.

Σωστή απάντηση η 4).