# ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

**1.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x^2$, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις:

**i.** x=-1 και x=1.

**ii.** x=1 και x=2.

**iii.** x=-1 και x=2.

**Λύση**: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ (διπλή ρίζα) ή x=1.

| x | -∞ | 0 | | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | - | ○ | - | ○ | + |

**i.** Από τον πίνακα προσήμου (δίπλα) βλέπουμε ότι στο διάστημα [-1,1] είναι $f(x)\le 0$ και επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=-\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{1}^{-1} f(x)dx=\int_{1}^{-1}(x^3-x^2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^{-1}=\ldots=\frac{2}{3}.$$

**ii.** Επίσης από τον πίνακα προσήμου βλέπουμε ότι στο διάστημα [1,2] είναι $f(x)\ge 0$ και επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{1}^{2}(x^3-x^2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^{2}=\ldots=\frac{17}{12}$.

**iii.** Στο διάστημα [-1,2] η συνάρτηση δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο και όπως φαίνεται από τον πίνακα προσήμου είναι $f(x)\le 0$ στο [-1,1] και $f(x)\ge 0$ στο [1,2]. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{-1}^{2}|f(x)|dx=-\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx \overset{(i),(ii)}{=} \frac{2}{3}+\frac{17}{12}=\frac{25}{12}.$$

**2.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}6x^2+2, & \text{αν } x<0\\ 2-2x, & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$.

**i.** Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες με εξισώσεις **α)** y=0, x=0, x=1
**β)** y=0, x=-1, x=2.

**Λύση**:

**i.** ☛ Στο $(-\infty,0)$ είναι $f(x)=6x^2+2$ συνεχής ως πολυωνυμική.

☛ Στο $(0,+\infty)$ είναι $f(x)=2-2x$ συνεχής ως πολυωνυμική.

☛ Στο $x_0=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}(2-2x)=2-0=2\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}(6x^2+2)=0+2=2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2.\\ f(0)=2-0=2.\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=2.$$

Άρα είναι συνεχής στο R.

**ii.** Αφού η f είναι συνεχής, τα ζητούμενα εμβαδά υπάρχουν.

| x | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| 2-2x | + | ○ | - |

**α)** Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1|2-2x|dx=\int_0^1(2-2x)dx=\left[2x-x^2\right]_0^1=1$.

**β)** Ομοίως $E=\int_{-1}^{2}|f(x)|dx=\int_{-1}^{0}|6x^2+2|dx+\int_0^2|2-2x|dx$ ..... γιατί
- $6x^2+2>0$ για κάθε $x\in R$
- $2-2x>0$ στο [0,1]
- $2-2x<0$ στο [1,2]

$$=\int_{-1}^{0}(6x^2+2)dx+\int_0^1(2-2x)dx+\int_1^2(2x-2)dx$$

$$=\left[2x^3+2x\right]_{-1}^{0}+\left[2x-x^2\right]_0^1+\left[x^2-2x\right]_1^2=\ldots=6.$$

**3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x^2-4x|$, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις:

**i.** x=0 και x=3.

**ii.** x=0 και x=5.

**Λύση**:

**i.** Με την βοήθεια του διπλανού πίνακα προσήμου του $x^2-4x$ έχουμε $E=\int_0^3 |x^2-4x|dx=\int_0^3(-x^2+4x)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3$=9.

| x | -∞ | 0 | | 4 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4x$ | + | 0 | - | 0 | + |

**ii.** Ομοίως $E=\int_0^5 |x^2-4x|dx=\int_0^4(-x^2+4x)dx+\int_4^5(x^2-4x)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_4^5$=…=13.

**4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2-|3-x|$ και τις ευθείες με εξισώσεις x=0, x=4, y=0.

**Λύση**: $f(x)=\begin{cases}2-(3-x), & \alpha\nu\ x\le 3\\ 2-(x-3), & \alpha\nu\ x>3\end{cases}=\begin{cases}x-1, & \alpha\nu\ x\le 3\\ 5-x, & \alpha\nu\ x>3\end{cases}$.

| x | -∞ | 1 | | 3 | | 5 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x-1 | - | 0 | + | + | | + | |
| 5-x | + | | + | + | | 0 | - |
| f(x) | - | 0 | + | + | | 0 | - |

Το πρόσημο της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Εύκολα βλέπουμε ότι είναι συνεχής στο 3, γιατί $\lim_{x\to 3^+} f(x)=$

$=\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν υπάρχει και είναι $E=\int_0^4\left(2-|3-x|\right)dx=$

$=\int_0^3(2-(3-x))dx+\int_3^4(2-(x-3))dx=\int_0^1(1-x)dx\int_1^3(x-1)dx+\int_3^4(5-x)dx==\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3$

$+\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4$=…=4.

**5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^4-x^2$ και τον άξονα x'x.

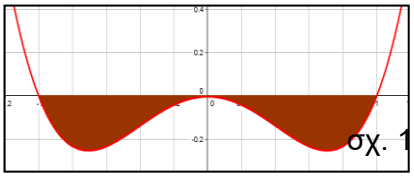
**Λύση**: f(x)=0 ⇔ $x^4-x^2=0$ ⇔ x=0 (διπλή ρίζα) ή x=1 ή x=-1.

Το πρόσημο της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

| x | -∞ | -1 | | 0 | | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + |

Στο διάστημα [-1,1] είναι f(x)≤0 και επίσης είναι άρτια, γιατί $f(-x)=(-x)^4-(-x)^2=x^4-x^2=f(x)$. Επομένως:

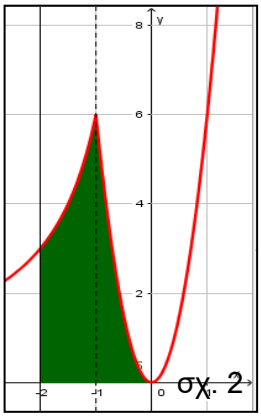
$E=-\int_{-1}^1 f(x)dx=-2\int_0^1 f(x)dx=-2\int_0^1(x^4-x^2)dx=2\int_0^1(x^2-x^4)dx=$



σχ. 1

$=2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1$=…=$\frac{4}{15}$. (σχ. 1)

**6.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}6x^2, & \alpha\nu\ x\ge -1\\ -\frac{6}{x}, & \alpha\nu\ x<-1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον άξονα x'x και την ευθεία x=-2.



σχ. 2

**Λύση**: Στα διαστήματα (-∞,-1) και (-1,+∞) είναι αντίστοιχα $f(x)=6x^2$ και $f(x)=-\frac{6}{x}$ συνεχής ως πολυωνυμική και ρητή αντίστοιχα. Επίσης $\lim_{x\to -1^+} f(x)=$

$= \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 6$, άρα συνεχής στο -1, οπότε είναι συνεχής στο R.

Επομένως υπάρχει το ζητούμενο εμβαδόν (σχ. 2). Επίσης είναι προφανές ότι η συνάρτηση είναι θετική και μηδενίζεται μόνο για x=0. Άρα:

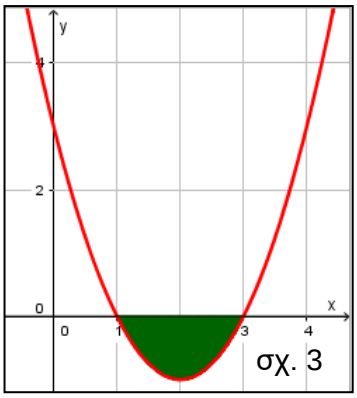
$$E = \int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{-1}\left(-\frac{6}{x}\right)dx + \int_{-1}^{0} 6x^2 dx = -6[\ln|x|]_{-2}^{-1} + \left[2x^3\right]_{-1}^{0} = \ldots = 2+6\ln 2.$$

**7.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+3$ και τον άξονα x'x.

**Λύση**: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Στο διάστημα [1,3] είναι $f(x)\le 0$ όπως φαίνεται από τον διπλανό πίνακα προσήμου και από το σχ. 3.

| x | -∞ | 1 | 3 | +∞ |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | - | + | |



σχ. 3

Άρα $E = \int_1^3 (-f(x))dx = \int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right)dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3 = \ldots = \frac{4}{3}.$$

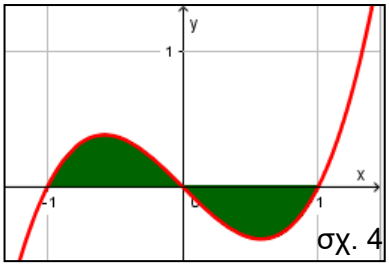
**8.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x$ και τον άξονα x'x.

**Λύση**: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

Στο διάστημα [-1,0] είναι $f(x)\ge 0$ και στο διάστημα [0,1] είναι $f(x)\le 0$ όπως φαίνεται από τον διπλανό πίνακα προσήμου, αλλά και από το σχ. 4.

Επίσης η f είναι περιττή στο [-1,1], γιατί $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-f(x)$.

| x | -∞ | -1 | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | - | + | - | + | |



σχ. 4

Άρα $E = \int_{-1}^{1}|f(x)|dx = 2\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(2x^3-2x)dx = \left[\frac{x^4}{2}-x^2\right]_{-1}^{0} = \ldots = \frac{1}{2}.$

**9.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x^3-5x^2$, $g(x)=x^3-4x^2$, και των ευθειών με εξισώσεις **α)** x=-2, x=1 **β)** x=-1, x=2.

**Λύση**: **α)** Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|dx$.

| x | -∞ | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|
| f(x)-g(x) | - | - | + | |

$f(x)-g(x)=2x^3-5x^2-x^3+4x^2=x^3-x^2$.

$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (διπλή ρίζα) ή $x=1$.

Από τον διπλανό πίνακα προσήμου έχουμε $E = \int_{-2}^{1}(g(x)-f(x))dx = \int_{-2}^{1}(x^2-x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \ldots = \frac{27}{4}.$

**β)** Ομοίως $E = \int_{-1}^{2}|f(x)-g(x)|dx = \int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))dx + \int_{1}^{2}(f(x)-g(x))dx$

$$= \int_{-1}^{1}(x^2-x^3)dx + \int_{1}^{2}(x^3-x^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} = \ldots = \frac{25}{12}.$$

**10.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3x^4+x^2$ και $g(x)=2x^4+2x^2$.

**Λύση**: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x^4+x^2=2x^4+2x^2 \Leftrightarrow x^4-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (διπλή ρίζα) ή $x=-1$ ή $x=1$.

Από τον πίνακα προσήμου βλέπουμε ότι f(x)-g(x)≤0 στο [-1,1] οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}(x^2-x^4)dx=2\int_{0}^{1}(x^2-x^4)dx=$$

| x | -∞ | -1 | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x)-g(x) | + | - | - | + | |

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\ldots=\frac{4}{15}$$, αφού η f(x)-g(x)=$x^4$-$x^2$ είναι άρτια στο [-1,1].

**11.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$x^3$-2x+$\frac{1}{2}$ και την ευθεία 4x-2y+1=0.

**Λύση**: 4x-2y+1=0 ⇔ y=2x+$\frac{1}{2}$ ⇔ g(x)=2x+$\frac{1}{2}$.

f(x)=g(x) ⇔ $x^3$-2x+$\frac{1}{2}$=2x+$\frac{1}{2}$ ⇔ $x^3$-4x=0 ⇔ x($x^2$-4)=0 ⇔ x=0 ή x=-2 ή x=2.

Με την βοήθεια του πίνακα προσήμου δίπλα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x)dx$$

| x | -∞ | -2 | 0 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x)-g(x) | - | + | - | + | |

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\ldots=8.$$

**12.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=4x και g(x)=$x^3$.

**Λύση**: f(x)=g(x) ⇔ 4x-$x^3$=0 ⇔ x(4-$x^2$)=0 ⇔ x=0 ή x=-2 ή x=2

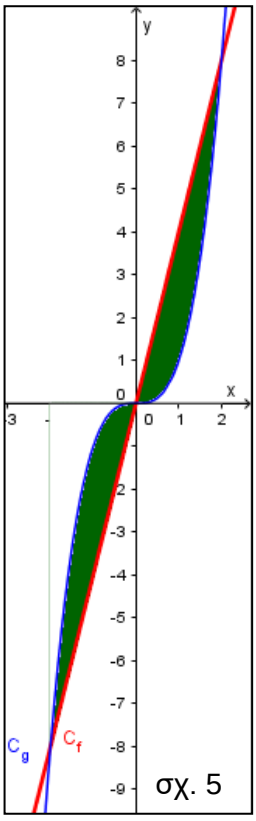
| x | -∞ | -2 | 0 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x)-g(x) | + | - | + | - | |

Με την βοήθεια του πίνακα προσήμου δίπλα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^{0}(g(x)-f(x))dx+\int_{0}^{2}(f(x)-g(x)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\ldots=8.$$ (σχ. 5)



σχ. 5

**13.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$x^2$. Να υπολογίσετε:

- **i.** Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης $C_f$ της f, στο σημείο A(-2,4).
- **ii.** Την κυρτότητα της f.
- **iii.** Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, την (ε) και τον άξονα x'x

**Λύση**:

- **i.** Το σημείο A(-2,4) είναι το σημείο επαφής, γιατί f(-2)=4.
  f΄(x)=2x ⇒ f΄(-2)=-4. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:
  y-f(-2)=f΄(-2)(x+2) ⇔ y-4=-4(x+2) ⇔ g(x)=y=-4x-4.
- **ii.** f΄΄(x)=2>0, άρα η συνάρτηση στρέφει τα Κ.Α. στο R.
- **iii.** Αφού η f στρέφει τα Κ.Α. η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη της.

Η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία Δ(-1,0) και Ε(0,-4). Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

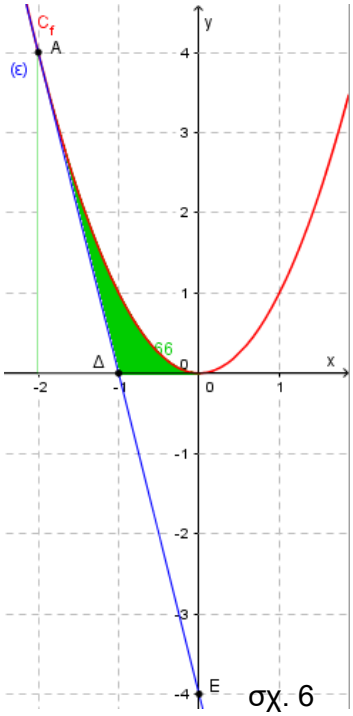
$$E=\int_{-2}^{0}|f(x)-g(x)|dx-(\mathrm{O\Delta E})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(σχ. 6)}$$

$$=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx-\tfrac{1}{2}(\mathrm{O\Delta})\cdot(\mathrm{OE})$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx-\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 4$$

$$=\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx-2=\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0}-2=\ldots=\frac{2}{3}.$$

(Στην άσκηση το σχήμα ήταν καταλυτικό για την επίλυσή της. Στις προηγούμενες ασκήσεις τα σχήματα ήταν προαιρετικά και αναρτήθηκαν μόνο για να δούν οι μαθητές στο σχήμα το εμβαδόν που τους ζητείται.).



σχ. 6

**14.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=lnx, g(x)=$\ln\frac{1}{x}$ και την ευθεία με εξίσωση y=-1.

**Λύση**: Το σχήμα και εδώ είναι απαραίτητο για την κατανόηση του ζητούμενου εμβαδού.

Επειδή g(x)=$\ln\frac{1}{x}$=-lnx=-f(x), οι γραφικές παραστάσεις $C_f$ και $C_g$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x'x (σχ. 7)

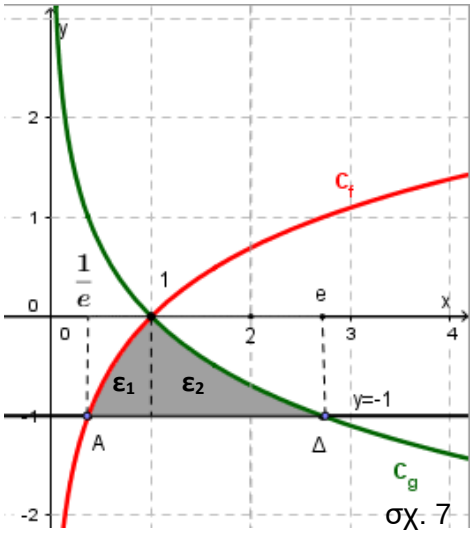
Οι $C_f$ και $C_g$ τέμνουν την ευθεία y=-1 στα σημεία Α και Δ με τετμημένες $x_A$=1/e και $x_\Delta$=e αντίστοιχα.

Επίσης στο διάστημα [$^1/_e$,e] οι $C_f$ και $C_g$ είναι πάνω από την ευθεία y=-1.

Επομένως το ζητούμενο είναι:

$$E=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\int_{1/e}^{1}(\ln x+1)dx+\int_{1}^{e}(-\ln x+1)dx$$

$$=[x\ln x]_{1/e}^{1}+[2x-x\ln x]_{1}^{e}=\ldots=e+\frac{1}{e}-2.$$

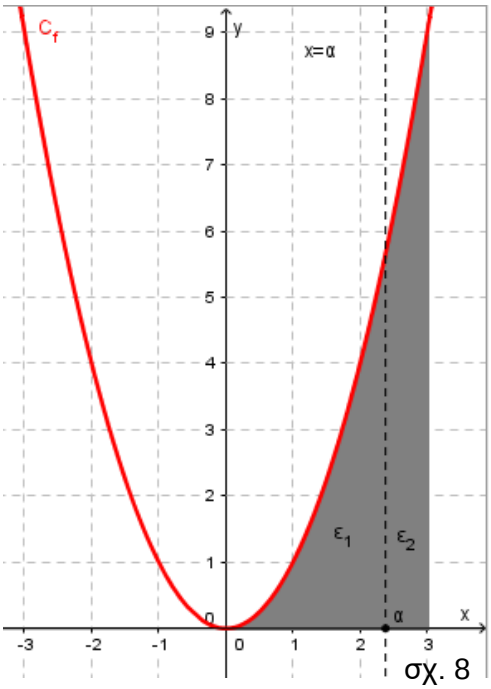


σχ. 7

**15.** Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$x^2$, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0, x=3. Να βρείτε ευθεία x=α, που να χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα τμήματα.

**Λύση**: $\varepsilon_1=\varepsilon_2 \Leftrightarrow \int_0^{\alpha}x^2dx=\int_{\alpha}^{3}x^2dx$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{a}=\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{3}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \alpha=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}.\ \text{(σχ. 8)}$$

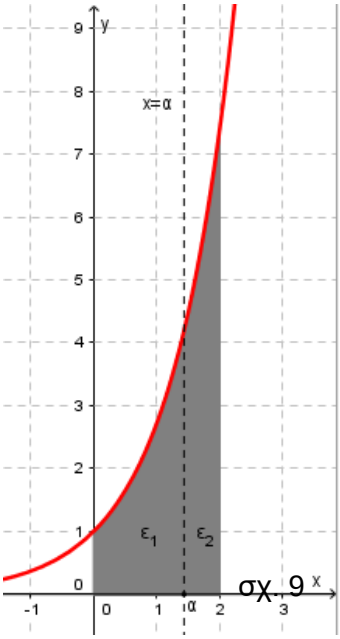


σχ. 8

**16.** Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$e^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις y=0, x=0, x=2. Να βρείτε ευθεία x=α, που να χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα τμήματα.

**Λύση**: $\varepsilon_1=\varepsilon_2 \Leftrightarrow \int_0^{\alpha}e^xdx=\int_{\alpha}^{2}e^xdx$

$\Leftrightarrow \left[e^x\right]_0^a = \left[e^x\right]_a^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ α= $\ln\dfrac{e^2+1}{2}$. (σχ. 9)



σχ. 9

**17.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=-lnx, την εφαπτομένη της στο σημείο της $M\left(\frac{1}{e},1\right)$ και τον άξονα x'x.

**Λύση**: f΄(x)=$-\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right)=-e$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

y- $f\left(\frac{1}{e}\right)= f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow$ (ε): g(x)=y=-ex+2.

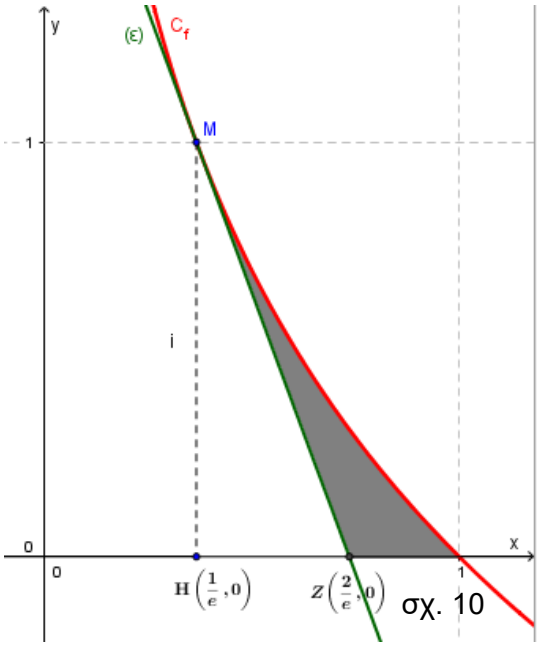
Επειδή f΄΄(x)=$\dfrac{1}{x^2}>0$ στο $A_f$=(0,+∞), η f στρέφει τα Κ.Α. η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη της.

Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $Z\left(\frac{2}{e},0\right)$.....(σχ. 10).

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{1/e}^{1} f(x)dx-(ZHM)=\int_{-2}^{0}(-\ln x)dx-\tfrac{1}{2}(HZ)\cdot(HM)$$

$$=\left[x-x\ln x\right]_{1/e}^{1}-\frac{1}{2e}=\ldots=1-\frac{5}{2e}.$$



σχ. 10

**18.** **α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ω του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\dfrac{6}{x}$, και τις ευθείες με εξισώσεις x=0, y=1 και y=3.

**β)** Να βρεθεί η τιμή του α, για την οποία η ευθεία y=α, χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα χωρία.

**Λύση**: **α)** f(x)=$\dfrac{6}{x} \Leftrightarrow$ y=$\dfrac{6}{x} \Leftrightarrow$ x=$\dfrac{6}{y}$.

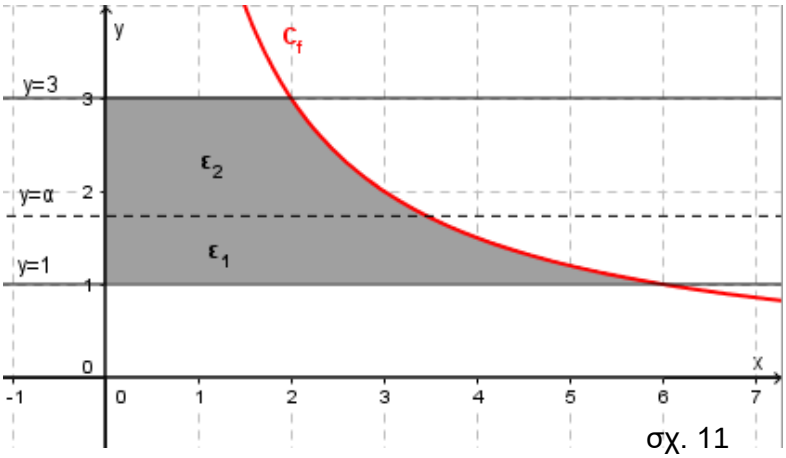
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^3 \frac{6}{y}dy=\left[6\ln y\right]_1^3$=…=6ln3.

(αντιστράφηκαν οι ρόλοι x και y, βλέπε σχ. 11).

**β)** $\varepsilon_1=\varepsilon_2 \Leftrightarrow \int_1^{\alpha}\frac{6}{y}dy=\int_{\alpha}^{3}\frac{6}{y}dy$

$\Leftrightarrow \left[6\ln y\right]_1^{\alpha}=\left[6\ln y\right]_{\alpha}^{3}$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ α= $\sqrt{3}$.



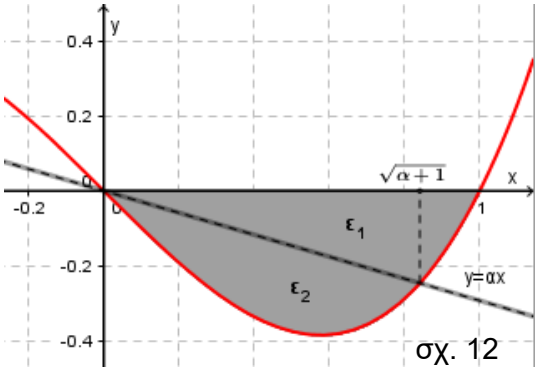
σχ. 11

**19.** Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$x^3$-x, και τις ευθείες με εξισώσεις y=0, x=0, x=1. Να βρεθεί η τιμή του α, για την οποία η ευθεία y=αx, χωρίζει το Ω σε δυο ισοδύναμα χωρία.

**Λύση**: $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\int_0^1(x-x^3)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}\right]_0^1=\dfrac{1}{4}$,.....(1)

γιατί στο διάστημα (0,1) είναι f(x)<0 (?)

Η ευθεία y=αx τέμνει την $C_f$ στα σημεία με τετμημένες x=0, $x=\pm\sqrt{a+1}$. Από αυτά στο διάστημα (0,1) είναι το σημείο με $x=\sqrt{a+1}$, α>-1 (σχ. 12).



σχ. 12

$$\varepsilon_2=\int_0^{\sqrt{\alpha+1}}(\alpha x-x^3+x)dx=\left[(a+1)\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a+1}}$$

$$=\ldots=\frac{(a+1)^2}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$\varepsilon_1=\varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \frac{(a+1)^2}{4}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ α=$-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή α>-1, θα είναι α=$-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**20.** Για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν f(0)=g(0), f΄(3)=4+g΄(3) και f΄΄(x)=2+g΄΄(x) για κάθε x∈[0,3]. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=3.

**Λύση**:

f΄΄(x)=2+g΄΄(x) ⇔ f΄΄(x)-g΄΄(x)=2 ⇔ f΄(x)-g΄(x)=2x+$c_1$……(1)

(1) $\overset{x=3}{\Rightarrow}$ $c_1$=-2.

(1) ⇒ f΄(x)-g΄(x)=2x-2 ⇔ f(x)-g(x)=$x^2$-2x+$c_2$. ……(2)

(2) $\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $c_2$=0.

(2) ⇒ f(x)-g(x)=$x^2$-2x……(3)

| x | -∞ | 0 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2$-2x | + | | - | + |

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^3|f(x)-g(x)|dx \overset{(3)}{=}\int_0^3|x^2-2x|dx$

$$=\int_0^2\left(-x^2+2x\right)dx+\int_2^3\left(x^2-2x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=\ldots=\frac{8}{3}.$$

**21.** α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\frac{1}{x^2}$, και τις ευθείες με εξισώσεις y=0, x=1 και x=λ, με λ∈R, λ>1.

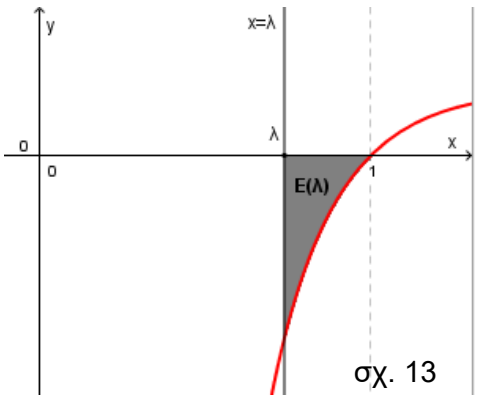
β) Να υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

**Λύση**: α) $E(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\lambda}$=1-$\frac{1}{\lambda}$.

β) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)$=1-0=1.

**22.** α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$\frac{\ln x}{x^2}$, τον άξονα x'x και την ευθεία x=λ, με λ∈R, 0<λ≠1.

β) Να υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to0}E(\lambda)$.



σχ. 13

**Λύση**: Η συνάρτηση f(x)=$\frac{\ln x}{x^2}$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο (1,0).

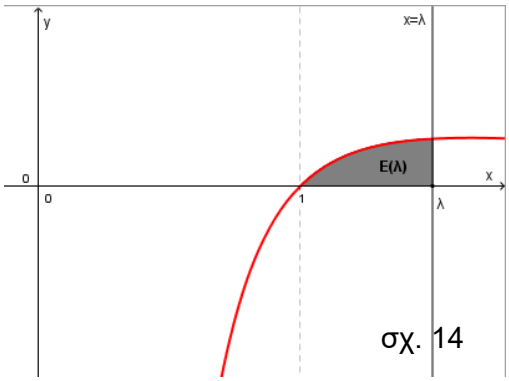
α) Για 0<x<1 είναι f(x)<0 και για x>1 είναι f(x)>0.

☛ Για 0<λ<1 είναι $E(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)dx=\int_{\lambda}^{1}\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx \overset{\pi.o.}{=}\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_{\lambda}^{1}-\int_{\lambda}^{1}\frac{1}{x}(\ln x)'dx$

$$=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\int_{\lambda}^{1}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}+\left[\frac{1}{x}\right]_{\lambda}^{1}=1-\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$$ .....(σχ. 13).

☛ Για λ>1 είναι $E(\lambda)=\int_{1}^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_{1}^{\lambda}\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx \overset{\pi.o.}{=}\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_{1}^{\lambda}+\int_{1}^{\lambda}\frac{1}{x}(\ln x)'dx$



σχ. 14

$$=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}+\int_{1}^{\lambda}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\left[\frac{1}{x}\right]_{1}^{\lambda}=1-\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$$ .....(σχ. 14).

**β)** $\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(1-\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}\right)=1-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}1-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{(1+\ln\lambda)'}{(\lambda)'}=1-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}$=1-0=1.

$\lim_{\lambda\to0}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to0^+}\left(1-\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}\right)=1-\lim_{\lambda\to0^+}(1+\ln\lambda)\cdot\lim_{\lambda\to0^+}\frac{1}{\lambda}$=1-(-∞)(+∞)=1+∞=+∞.

**23.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$e^x$+x-1.

**i.** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

**ii.** Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$.

**iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f^{-1}$, τον άξονα x'x και την ευθεία x=e.

**Λύση**: $A_f$=R.

**i.** f΄(x)=$e^x$+1>0 άρα είναι γνησίως αύξουσα στο R.

**ii.** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι «1-1», άρα αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της f.
Επειδή η f είναι συνεχής στο R ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $e^x$ και x-1 και επίσης είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της f είναι $f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$=(-∞,+∞)=R.

**iii.** Προφανής ρίζα της f το x=0 και επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{0}^{e}f^{-1}(x)dx=\int_{0}^{1}y\cdot f'(y)dy$

Θέτω $y=f^{-1}(x)$. Τότε:
x=f(y)
dx=f΄(y)dy
για x=0, y=0
για x=e, y=1

$$\overset{\pi.o.}{=}[yf(y)]_0^1-\int_0^1(y)'\cdot f(y)dy=f(1)-\int_0^1 f(y)dy=e-\int_0^1(e^y+y-1)dy=$$

$$=e-\left[e^y+\frac{y^2}{2}-y\right]_0^1=\ldots=\frac{3}{2}.$$

**24.** Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x-ημx, x∈[0,2π].

**i.** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

**ii.** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

**iii.** Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

**iv.** Να δείξετε ότι αντιστρέφεται.

**v.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και της $f^{-1}$.

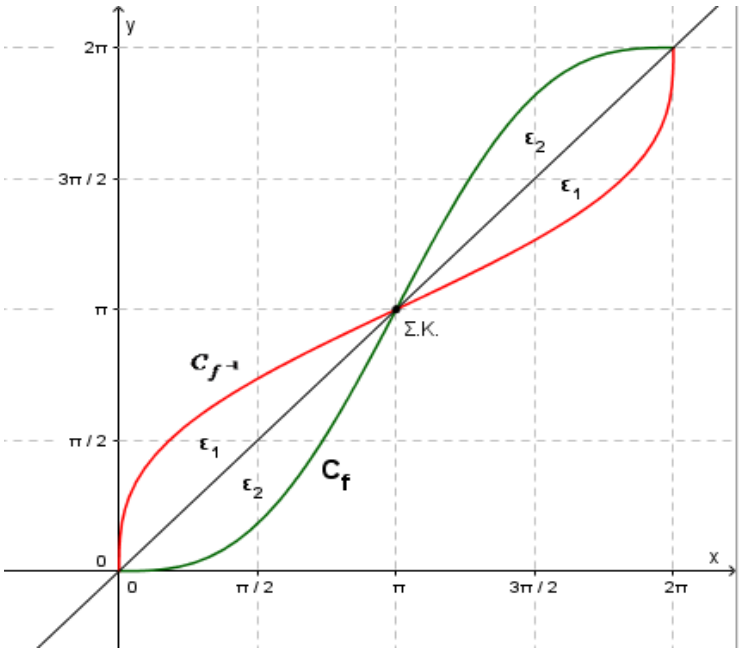
**Λύση**:

**i.** f΄(x)=1-συνx≥0 στο [0,2π] με f΄(x)=0 μόνο για x=$^{\pi}/_{2}$ και x=$^{3\pi}/_{2}$.
Άρα είναι γνησίως αύξουσα στο [0,2π].

**ii.** Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,2π] ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων x και ημx και γνησίως αύξουσα στο [0,2π], το σύνολο τιμών της είναι f([0,2π])=[f(0),f(2π)]=[0,2π].

**iii.** f΄΄(x)=ημx με f΄΄(x)=0 στο x=0, x=π και x=2π.
f΄΄(x)>0 στο (0,π) και f΄΄(x)<0 στο (π,2π).
Στο x=π έχει Σ.Κ. το f(π)=π.
f(0)=0 και f(2π)=2π.
Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

| x | 0 | π | 2π |
|---|---|---|---|
| f΄΄(x) | + | | - |
| f΄(x) | + | | + |
| f(x) | ↗ | | ↗ |




**iv.** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι «1-1», άρα αντιστρέφεται.

**v.** Το ζητούμενο εμβαδόν είναι E=2ε₁+2ε₂=2(ε₁+2ε₂)= $2\int_0^{2\pi}|f(x)-x|dx$

$$=2\int_0^{\pi}(x-f(x))dx+2\int_{\pi}^{2\pi}(f(x)-x)dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\eta\mu x dx+2\int_{\pi}^{2\pi}(-\eta\mu x)dx$$

$$=2[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}+2[\sigma\upsilon\nu x]_{\pi}^{2\pi}=\ldots=8.$$

**25.** Έστω συνάρτηση f: R→R η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε f(1)=0, $f'(x)=e^{x^2}$ για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τους άξονες x'x και y'y.

**Λύση**: Επειδή $f'(x)=e^{x^2}>0$ για κάθε x∈R, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο R.
Προφανής ρίζα x=1, γιατί f(1)=0 και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, είναι μοναδική.
Για x<1 ⇒ f(x)<f(1)=0, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1 |f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 (x)'f(x)dx \overset{\pi.o.}{=} -[xf(x)]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$=-f(1)+\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)'e^{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\ldots=\frac{e-1}{2}.$$

**26.** Έστω συνάρτηση f: R→R η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f^3(x)+2f(x)=3x$ για κάθε x∈R. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1.

**Λύση**: $f^3(x)+2f(x)=3x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+2)=3x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3x}{f^2(x)+2}\geq 0$ στο [0,1]……..(1)

Άρα $E=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx$ ……(2)

$f^3(x)+2f(x)=3x \overset{x=0}{\Rightarrow} f^3(0)+2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0)+2)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$……..(3)
γιατί $f^2(0)+2\neq 0$.

Horner

$f^3(x)+2f(x)=3x \overset{x=1}{\Rightarrow} f^3(1)+2f(1)-3=0 \Leftrightarrow (f(1)-1)(f^2(1)+f(1)+3)=0 \Leftrightarrow f(1)=1$……..(4)
γιατί $f^2(1)+f(1)+3\neq 0$ αφού έχει διακρίνουσα Δ=-11<0.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | -3 | 1 |
| ↓ | 1 | 1 | 3 | |
| 1 | 1 | 3 | 0 | |

$f^3(x)+2f(x)=3x \Leftrightarrow (f^3(x)+2f(x))'=(3x)'$
$\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+2f'(x)=3$
$\Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x)+2)=3$
$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{3f^2(x)+2}$ ……..(5)

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (2), θέτουμε u=f(x)……(6)

$du=f'(x)dx \overset{(5)}{=} \dfrac{3}{3f^2(x)+2}dx \overset{(6)}{=} \dfrac{3}{3u^2+2}dx \Leftrightarrow dx=\dfrac{3u^2+2}{3}du$ ……(7)

Για x=0 ⇒ u=f(0)=0…….. λόγω της (3) ……(8)
Για x=1 ⇒ u=f(1)=1…….. λόγω της (4) ……(9)
Από τις (7), (8) και (9) το ολοκλήρωμα (2) γίνεται:

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 u\frac{3u^2+2}{3}du=\int_0^1 u^3du+\frac{2}{3}\int_0^1 udu=\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1+\frac{1}{3}\left[u^2\right]_0^1=\ldots=\frac{7}{12}.$$

**27.** Έστω συνάρτηση f: R→R η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

☛ f(-1)=-1 καιf(1)=1.

☛ f(x)≠0 για κάθε x∈R*.

☛ $f'(x)=\dfrac{1+2x^2}{x}f(x)$ για κάθε $x\in R^*$.

**i.** Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f.

**ii.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{x^2-1}$ για κάθε $x\in R$.

**iii.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της $f^{-1}$.

**iv.** Υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και $f^{-1}$.

**Λύση**:

**i.** Επειδή f(-1)f(1)=-1<0, από το Θ. Bolzano, η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-1,1) και επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R^*$, συμπεραίνουμε ότι f(0)=0 και το x=0 είναι μοναδική ρίζα της f.

Επειδή η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτά. Άρα:

Επειδή f(-1)=-1<0 $\Rightarrow$ f(x)<0 στο διάστημα $(-\infty,0)$.

Επειδή f(1)=1>0 $\Rightarrow$ f(x)>0 στο διάστημα $(0,+\infty)$.

**ii.** Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1+2x^2}{x}f(x)\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}+2x$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln|f(x)|\right)'=\left(\ln|x|+x^2\right)'$$

$$\Leftrightarrow \ln|f(x)|=\ln|x|+x^2+c \quad\ldots\ldots(1)$$

$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}$ c=-1.

Άρα (1) $\Rightarrow$ $\ln|f(x)|=\ln|x|+x^2-1 \Leftrightarrow \ln|f(x)|=\ln|x|+\ln e^{x^2-1} \Leftrightarrow \ln|f(x)|=\ln(|x|e^{x^2-1}) \Leftrightarrow |f(x)|=|x|e^{x^2-1}$……(2)

• Για x<0, η (2) $\Rightarrow$ $-f(x)=-xe^{x^2-1} \Leftrightarrow f(x)=xe^{x^2-1}$……...(3)

• Για x>0, η (2) $\Rightarrow$ $f(x)=xe^{x^2-1}$……..(4)

Από (3), (4) και από f(0)=0, έχουμε $f(x)=xe^{x^2-1}$ για κάθε $x\in R$.

**iii.** Επειδή $f'(x)=(xe^{x^2-1})'=e^{x^2-1}+2x^2e^{x^2-1}>0$ για κάθε $x\in R$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επομένως αντιστρέφεται.

Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και $f^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο y=x, και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων των f και $f^{-1}$ είναι πάνω στην διχοτόμο. Επομένως τα κοινά σημεία είναι οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=x $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xe^{x^2-1}=x \Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow$ x=0 ή x=1 ή x=-1.

**iv.** Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=2\int_{-1}^{1}|f(x)-x|dx$.

$f''(x)=2x(3+2x^2)e^{x^2-1}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$…….. γιατί $(3+2x^2)e^{x^2-1}>0$.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$. …….. γιατί $(3+2x^2)e^{x^2-1}>0$.

• Στο διάστημα [-1,0] η f στρέφει τα κοίλα κάτω και η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την διχοτόμο y=x.

• Στο διάστημα [-1,0] η f στρέφει τα κοίλα άνω και η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την διχοτόμο y=x. Επομένως:

$$E=2\int_{-1}^{1}|f(x)-x|dx=2\int_{-1}^{0}(f(x)-x)dx+2\int_{0}^{1}(x-f(x))dx$$

$$=2\int_{-1}^{0}\left(xe^{x^2-1}-x\right)dx+2\int_{0}^{1}\left(x-xe^{x^2-1}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(2xe^{x^2-1}-2x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(2x-2xe^{x^2-1}\right)dx$$

$$=\left[e^{x^2-1}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^2-e^{x^2-1}\right]_{0}^{1}=\ldots=\frac{2}{e}.$$

## ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΗΝ Ε.Μ.Ε.

**28.** *(Προτεινόμενο ΕΜΕ 2016)* Δίνονται οι συναρτήσεις f,g: (-1,+∞)→R με f(x)=ln(x+1) και $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

**i.** Να λύσετε την εξίσωση f(x)+g(x)=0 και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης Φ(x)=f(x)+g(x).

**ii.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις $C_f$ και $C_g$ των f και g αντίστοιχα, δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο Ο(0,0), η οποία διχοτομεί την γωνία 1ου – 3ου τεταρτημορίων.

**iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την $C_f$, την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία x=3.

**iv.** Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στην $C_f$ και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec. Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x'x και Α(0,α) σημείο του άξονα y'y, με α>0, τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής Ε΄(t) του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΜΝ κάθε στιγμή t ισούται με Φ(x(t)).

**β)** Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, την χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με $\left(2\ln 3+\dfrac{8}{9}\right)cm^2/\sec$.

**Λύση**:

**i.** f(x)+g(x)=0 ⇔ $\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}=0$.

Θέτω $\Phi(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$.

Φ΄(x)=…=$\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$>0 στο (-1,+∞). Άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,+∞).

Προφανής ρίζα της Φ(x)=0 είναι η x=0 και επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

- Για -1<x<0 $\overset{\Phi\uparrow}{\Rightarrow}$ Φ(x)<Φ(0) ⇔ Φ(x)<0.
- Για x>0 $\overset{\Phi\uparrow}{\Rightarrow}$ Φ(x)>Φ(0) ⇔ Φ(x)>0.

**ii.** $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ και $g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

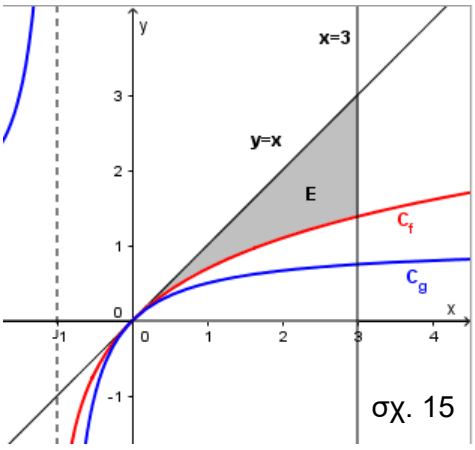
f΄(0)=1, f(0)=0, g΄(0)=1 και g(0)=0.

Επομένως έχουν κοινή εφαπτομένη y-0=1(x-0) ⇔ y=x που διχοτομεί την γωνία 1ου – 3ου τεταρτη-μορίων.

**iii.** $f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$<0, οπότε η $C_f$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο (-1,+∞). Άρα η $C_f$ είναι κάτω από την εφαπτομένη της y=x. Δηλαδή f(x)≤x στο (-1,+∞). (σχ. 15)

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

E(Ω)=$\displaystyle\int_0^3|f(x)-x|dx=\int_0^3(x-f(x))dx=\int_0^3(x-\ln(x+1))dx=$



σχ. 15

$$=\int_0^3 x\,dx-\int_0^3 \ln(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3-\int_0^3 (x+1)'\cdot\ln(x+1)dx$$

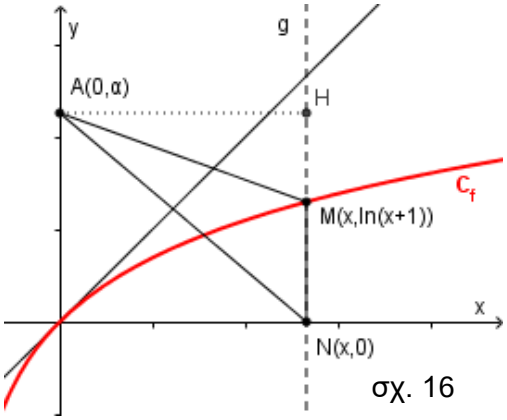
$$\overset{\pi.o.}{=}\frac{9}{2}-\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^3+\int_0^3 (x+1)\cdot\left(\ln(x+1)\right)'dx$$

$$=\frac{9}{2}-\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^3+\int_0^3 (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\frac{9}{2}-4\ln 4+\int_0^3 1dx$$

$$=\frac{9}{2}-4\ln 4+3$$

$$=\frac{15}{2}-4\ln 4.$$



σχ. 16

**iv. α)** E=(AMN)= $\frac{1}{2}\cdot(MN)\cdot(AH)=\frac{1}{2}x\ln(x+1)$ (σχ. 16)

Επειδή η τετμημένη x του σημείου M είναι συνάρτηση του χρόνου t, E(t)=$\frac{1}{2}x(t)\ln(x(t)+1)$.

E΄(t)=$\left(\frac{1}{2}x(t)\ln(x(t)+1)\right)'=\frac{1}{2}x'(t)\ln(x(t)+1)+\frac{1}{2}x(t)\left(\ln(x(t)+1)\right)'$

$$=\frac{1}{2}x'(t)\ln(x(t)+1)+\frac{1}{2}x(t)\frac{\left((x(t)+1)\right)'}{(x(t)+1)}$$

$$=\frac{x'(t)\ln(x(t)+1)}{2}+\frac{x(t)x'(t)}{2(x(t)+1)}$$ ……και επειδή x΄(t)=2cm/sec

$$=\frac{2\ln(x(t)+1)}{2}+\frac{2x(t)}{2(x(t)+1)}$$

$$=\ln(x(t)+1)+\frac{x(t)}{x(t)+1}$$ =Φ(x(t)).

**β)** Φ(x(t))= $2\ln 3+\frac{8}{9}$ ⇔ Φ(x(t))= $\ln 3^2+\frac{8}{9}$

⇔ Φ(x(t))= $\ln 9+\frac{8}{9}$

⇔ Φ(x(t))= $\ln(8+1)+\frac{8}{9}$

⇔ Φ(x(t))=Φ(8)…… και επειδή Φ ↗ ⇒ Φ «1-1»

⇔ x(t)=8cm.

**29.** *(Προτεινόμενο ΕΜΕ 2016)*

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση xlnx-1=0, με x>1, έχει ακριβώς μια λύση.

**β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: (1,+∞)→R, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- f(x)=xlnx(f(x)-f΄(x)), για κάθε x>1.
- f(e)=$e^e$.

**i.** Να βρείτε τον τύπο της f.

**ii.** Αν $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$, x>1

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
2. Εάν Ε(α) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση $C_g$ της συνάρτησης g(x)=f(x)+xlnx·f΄(x), τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=2 και x=α με α>2, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{a\to+\infty}\left(E(a)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{E(a)}\right)$.

**Λύση**:

**α)** Θεωρούμε την συνάρτηση h(x)=xlnx-1, x>1.

h΄(x)=(xlnx-1)΄=lnx+1>0 για x>1.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (1,+∞).

Η h είναι συνεχής στο (1,+∞) ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων x και lnx, οπότε το σύνολο τιμών της είναι h((1,+∞))=$\left(\lim\limits_{x\to1^+}h(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)$=(-1,+∞).

Επειδή 0∈h((1,+∞)) η εξίσωση h(x)=0 ⇔ xlnx-1=0 και επειδή h ↗ μοναδική.

**β) i.** f(x)=xlnx**(**f(x)-f΄(x)**)** ⇔ f(x)+xlnxf΄(x)=xlnxf(x)

⇔ $\dfrac{1}{x}$f(x)+lnxf΄(x)=lnxf(x)

⇔ (lnx)΄f(x)+lnxf΄(x)=lnxf(x)

⇔ (lnxf(x))΄=lnxf(x)

⇔ lnxf(x)=ce$^x$

⇔ $f(x)=\dfrac{ce^x}{\ln x}$ ……(1)

(1) $\overset{x=e}{\Rightarrow} f(e)=\dfrac{ce^e}{\ln e}$ ⇔ $e^e=ce^e$ ⇔ c=1.

Άρα $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$.

**ii. 1.** $f'(x)=\dfrac{e^x(x\ln x-1)}{x\ln^2 x}=\dfrac{e^x h(x)}{x\ln^2 x}$.

Επειδή e$^x$>0 και xln$^2$x>0 για x>1, το πρόσημο του f΄(x) είναι ίδιο με το πρόσημο του h(x).

Εάν ξ η μοναδική ρίζα του h(x) από το (α) ερώτημα, τότε:

☛ για 1<x<ξ $\overset{h\uparrow}{\Rightarrow}$ h(x)<h(ξ) ⇔ h(x)<0 ⇔ f΄(x)<0.

☛ για x>ξ $\overset{h\uparrow}{\Rightarrow}$ h(x)>h(ξ) ⇔ h(x)>0 ⇔ f΄(x)>0.

| x | 1 | ξ | +∞ |
|---|---|---|---|
| f΄(x) | - | ○ | + |
| f(x) | ↘ | ελάχιστο | ↗ |

*Σύνολο τιμών*:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^x}{\ln x}=\lim_{\substack{x\to1^+\\ x>1\\ \ln x>0}}\frac{1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to1^+}e^x=+\infty\cdot e=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty.$$

Άρα f((1,+∞))=(f(ξ),+∞).

**2.** g(x)=f(x)+xlnx·f΄(x)= $\frac{e^x}{\ln x}+x\ln x\frac{e^x h(x)}{x\ln^2 x}=\frac{e^x}{\ln x}+\frac{e^x h(x)}{\ln x}=\frac{e^x(h(x)+1)}{\ln x}=\frac{e^x x\ln x}{\ln x}$=xe$^x$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι Ε(α) $=\int_2^{\alpha} xe^x dx=\int_2^{\alpha} x(e^x)'dx \overset{\pi.o.}{=}\left[xe^x\right]_2^a-\int_2^{\alpha}(x)'e^x dx$

$$=ae^a-2e^2-\int_2^{\alpha}e^x dx$$

$$=ae^a-2e^2-\left[e^x\right]_2^a$$

$$=ae^a-2e^2-e^a+e^2$$

$$=(a-2)e^a-e^2.$$

Θέτω *u=E(α).*

$$\lim_{a\to+\infty}u=\lim_{a\to+\infty}\left((a-2)e^a-e^2\right)=+\infty.$$

$$\lim_{a\to+\infty}\left(E(a)\cdot\eta\mu\frac{1}{E(a)}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\eta\mu\frac{1}{u}\right)\overset{\frac{1}{u}=t}{=}\lim_{t\to0}\left(\frac{\eta\mu t}{t}\right)=1.$$

**30.** *(Προτεινόμενο ΕΜΕ 2016)* Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: R→R, της οποίας η γραφική παράσταση $C_f$ διέρχεται από το σημείο Μ(1,2e). Αν η εφαπτομένη της $C_f$ σε κάθε σημείο της $(x_0,f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0+1,2e^{x_0})$:

**α)** Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x+e^{2-x}$.

**β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a-2x)}{x-a}+\frac{f(2x)}{x-\beta}=2017$, α,β∈R, με α<β, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

**δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ και την ευθεία $y=e^2+1$.

**ε)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=1.

**Λύση:**

**α)** Η εφαπτομένη (ε) της $C_f$ στο σημείο της $(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$……(1)

Αφού η (ε) διέρχεται από το $A(x_0+1,2e^{x_0})$, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1).

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow 2e^{x_0}-f(x_0)=f'(x_0)(x_0+1-x_0)$

$\Leftrightarrow 2e^{x_0}-f(x_0)=f'(x_0)$

$\Leftrightarrow 2e^{x_0}=f(x_0)+f'(x_0)$……(2)

Επειδή $x_0$ τυχαίο, $2e^x=f(x)+f'(x)$, για κάθε x∈R ……(3)

Η (3) γίνεται ισοδύναμα $2e^{2x}=e^xf(x)+e^xf'(x) \Leftrightarrow (e^{2x})'=(e^xf(x))'$.

$\Leftrightarrow e^{2x}+c=e^xf(x)$……(4)

$(4)\overset{x=1}{\Rightarrow} e^2+c=ef(1) \overset{f(1)=2e}{\Rightarrow} c=e^2.$

$(4)\overset{c=e^2}{\Rightarrow} e^{2x}+e^2=e^xf(x) \Rightarrow f(x)=e^x+e^{2-x}.$

**β)** $f'(x)=e^x-e^{2-x}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-e^{2-x}=0 \Leftrightarrow e^x=e^{2-x} \Leftrightarrow x=2-x \Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-e^{2-x}>0 \Leftrightarrow e^x>e^{2-x} \Leftrightarrow x>2-x \Leftrightarrow x>1$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<1$.

| x | -∞ | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f΄(x) | - | ○ | + |
| f(x) | ↘ | ελάχιστο | ↗ |

Στο διάστημα (-∞.1] η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διάστημα [1,+∞) η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $\Delta_1=(-\infty,1]$ και $\Delta_2=[1,+\infty)$.

$f(\Delta_1) \overset{f\downarrow}{=} \left[ f(1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \right) = [2e,+\infty)$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + e^{2-x}) = 0+\infty = +\infty$.

$f(\Delta_2) \overset{f\uparrow}{=} \left[ f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \right) = [2e,+\infty)$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + e^{2-x}) = +\infty + 0 = +\infty$.

Άρα $f(R)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = [2e,+\infty)$.

**γ)** $\dfrac{f(a-2x)}{x-a} + \dfrac{f(2x)}{x-\beta} = 2017 \Leftrightarrow f(\alpha-2x)(x-\beta)+f(2x)(x-\alpha)-2017(x-\alpha)(x-\beta)=0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(\alpha-2x)(x-\beta)+f(2x)(x-\alpha)-2017(x-\alpha)(x-\beta)$.

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $g(\alpha)=f(-\alpha)(\alpha-\beta)$.
  $g(\beta)=f(2\beta)(\beta-\alpha)$.

Άρα $g(\alpha)g(\beta)= f(-\alpha)(\alpha-\beta)f(2\beta)(\beta-\alpha)=-f(-\alpha)f(2\beta)(\beta-\alpha)^2<0$, γιατί $f(R)=[2e,+\infty) \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, επομένως $f(-\alpha)>0$ και $f(2\beta)>0$ και $(\beta-\alpha)^2>0$.

Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. **Bolzano** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την συνάρτηση g. Επομένως η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(\alpha-2x)(x-\beta)+f(2x)(x-\alpha)-2017(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(a-2x)}{x-a} + \dfrac{f(2x)}{x-\beta} = 2017$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha,\beta)$.

**δ)** Τα σημεία τομής της $C_f$ με την ευθεία $y=e^2+1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=e^2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x+e^{2-x}=e^2+1 \Leftrightarrow e^x + \dfrac{e^2}{e^x} = e^2+1 \Leftrightarrow e^{2x}-(e^2+1)e^x+e^2=0$……(5)

Η (5) είναι δευτεροβάθμια ως προς $e^x$ και έχει ρίζες $e^x=e^2 \Leftrightarrow x=2$ και $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

$f''(x)=e^x+e^{2-x}>0$ άρα η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο R. Άρα η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=e^2+1$ στο διάστημα $[0,2]$. Επομένως $e^2+1\geq f(x)$ στο $[0,2]$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^2 \left|e^2+1-f(x)\right|dx = \int_0^2 \left(e^2+1-f(x)\right)dx$

$$= \int_0^2 \left(e^2+1-(e^x+e^{2-x})\right)dx$$

$$= \left[(e^2+1)x - e^x + e^{2-x}\right]_0^2 = \ldots = 4.$$

**ε)** Αρκεί να δείξουμε ότι $f(1+x)=f(1-x)$ για κάθε $x\in R$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1+x)=e^{1+x}+e^{2-(1+x)}=e^{1+x}+e^{1-x} \\ f(1-x)=e^{1-x}+e^{2-(1-x)}=e^{1-x}+e^{1+x} \end{array}\right\} \Rightarrow f(1+x)= f(1-x).$$

**31.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}(x^3-x)$, $x\in R$.

- **i.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- **ii.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- **iii.** Να δείξετε ότι, αν $x_1$ και $x_2$ οι θέσεις τοπικών ακροτάτων, τότε τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και το σημείο καμπής είναι συνευθειακά.
- **iv.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.
- **v.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση $C_f$ της f και τον άξονα x'x.

**Λύση**:

**i.** $f'(x) =2xe^{x^2}(x^3-x)+e^{x^2}(3x^2-1)$

$=e^{x^2}[2x(x^3-x)+3x^2-1]$

$=e^{x^2}(2x^4+x^2-1)$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}(2x^4+x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2x^4+x^2-1=0 \overset{y=x^2>0}{\Leftrightarrow} 2y^2+y-1=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=-1$ (απορρ.) ή $y={}^1/_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2={}^1/_2 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x^2}(2x^4+x^2-1)>0$ ……και επειδή $e^{x^2}>0$……

$\Leftrightarrow 2x^4+x^2-1>0$

$\overset{y=x^2>0}{\Leftrightarrow}$ $2y^2+y-1>0$

| y | $-\infty$ | | -1 | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2y^2+y-1$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

$\Leftrightarrow y<-1$ (απορρ) ή $y>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x^2>\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |x|>\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ομοίως $f'(x)<0 \Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

| x | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f´(x) | | + | 0 | - | 0 | + | |
| f(x) | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

*Μονοτονία*: Στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

*Ακρότατα*: Στο $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ παρουσιάζει Τ.Μ. το $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2e}}{4}$.

Στο $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2e}}{4}$.

**ii.** $f''(x)=2xe^{x^2}(2x^4+x^2-1)+e^{x^2}(8x^3+2x)$

$=e^{x^2}(4x^5+2x^3-2x+8x^3+2x)$

$=e^{x^2}(4x^5+10x^3)$

$=2x^3e^{x^2}(2x^2+5)$.

Επειδή $e^{x^2}>0$ και $2x^2+5>0$ για κάθε $x\in R$, θα έχουμε:

• $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3=0 \Leftrightarrow x=0$.

• $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2x^3>0 \Leftrightarrow x>0$ και $f''(x)<0 \Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow x<0$.

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f´´(x) | | - | 0 | + | |
| f(x) | | **Κ.Κ.** | | **Κ.Α.** | |

**Σ.Κ.**

Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η συνάρτηση είναι κοίλη και στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι κυρτή.

Το σημείο $O(0,f(0))=O(0,0)$ είναι σημείο καμπής.

**iii.** Είναι $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2e}}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2e}}{4}\right)$ συμμετρικά ως προς το σημείο καμπής O(0,0), άρα συνευθειακά.

**iv.** Προφανής ρίζα της $f(x)=-x$ η $x=0$.

Επειδή $f(0)=0$ και $f'(0)=-1$ η ευθεία $y=-x$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της O(0,0).

• Επειδή η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0]$, η εφαπτομένη της $y=-x$ είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $(-\infty,0]$. Άρα $f(x)<-x$ στο διάστημα $(-\infty,0]$.

• Επειδή η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$, η εφαπτομένη της $y=-x$ είναι κάτω από την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα $f(x)>-x$ στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Άρα η x=0 είναι μοναδική ρίζα της f(x)=-x.

**v.** f(x)=0 $\Leftrightarrow e^{x^2}(x^3-x)$

$\Leftrightarrow x^3-x=0$…… γιατί $e^{x^2}\neq 0$,

$\Leftrightarrow$ x=0 ή x=-1 ή x=1.

| χ | -∞ | -1 | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$-x | - | + | - | + | |

Επειδή $e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in R$, το πρόσημο του f(x) είναι ίσο με το πρόσημο του $x^3$-x.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}(-f(x))dx$

f(-x)=$e^{(-x)^2}((-x)^3-(-x)$
=$e^{x^2}(-x^3+x)$
=$-e^{x^2}(x^3-x)$=-f(x).

$=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(-x)dx$ …… γιατί η f είναι περιττή.

$=\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{-1}f(u)du$

Θέτω u=-x.
dx=-du.
Όταν x=0 τότε u=0.
Όταν x=1 τότε u=-1.

$=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{-1}^{0}f(u)du$

$=2\int_{-1}^{0}f(x)dx=2\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}(x^3-x)\right)dx$

$=2\int_{-1}^{0}e^{x^2}x^3dx-2\int_{-1}^{0}e^{x^2}xdx$

$=\int_{-1}^{0}e^{x^2}2x\cdot x^2dx-\int_{-1}^{0}e^{x^2}2xdx$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση.

$=\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\right)'x^2dx-\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\right)'dx$

$=\left[e^{x^2}x^2\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{x^2}\left(x^2\right)'dx-\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\right)'dx$

$=-e-\int_{-1}^{0}e^{x^2}2xdx-\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\right)'dx$

$=-e-\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\right)'dx-\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\right)'dx$

$=-e-2\int_{-1}^{0}\left(e^{x^2}\right)'dx$

$=-e-2\left[e^{x^2}\right]_{-1}^{0}$=…=e-2.

**32.** (Θέμα 2ου 2001) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}ax^2, & \alpha\nu\ x\le 3\\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & \alpha\nu\ x>3\end{cases}$.

**i.** Αν η f είναι συνεχής, να δείξετε ότι α=$-\frac{1}{9}$. Μονάδες 9

**ii.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $C_f$ της f στο σημείο A(4,f(4)). Μονάδες 7

**iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=1 και x=2. Μονάδες 9

**Λύση**:

**i.** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3^-\\ x<3}} (ax^2) = 9a$.....(1)

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3^+\\ x>3}} \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{\substack{x\to 3^+\\ x>3}} \dfrac{\left(1-e^{x-3}\right)'}{(x-3)'} = \lim\limits_{x\to 3^+} (-e^{x-3})$ =-1.....(2)

f(3)=9α.....(3)

Στα διαστήματα (-∞,3) και (3,+∞) είναι συνεχής ως πολυωνυμική και ρητή αντίστοιχα.

Για να είναι συνεχής στο x=3, πρέπει $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \overset{(1),(2),(3)}{\Longleftrightarrow}$ 9α=-1 ⇔ α=$-\dfrac{1}{9}$.

**ii.** Για x>3 έχουμε $f(x) = \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}$,

$$f'(x) = \left(\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{(1-e^{x-3})'(x-3)-(1-e^{x-3}))(x-3)'}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2} = \ldots = \frac{4e^{x-3}-xe^{x-3}-1}{(x-3)^2}.$$

f(4)=1-e

f(4)=-1

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι y-f(4)=f΄(4)(x-4) ⇔ **...** ⇔ y=-x+5-e.

**iii.** Στο διάστημα [1,2] είναι f(x)=$-\dfrac{1}{9}$x²<0 οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E} = \int_1^2 (-f(x))dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2 = \ldots = \frac{7}{27}.$$

**33.** (Θέμα 4ον 2002)

**i.** Δίνονται οι συναρτήσεις h και g συνεχείς στο [α,β].

Να δείξετε ότι αν h(x)>g(x) στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$. Μονάδες 2

**ii.** Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, που ικανοποιεί τις σχέσεις f(x)-e$^{-f(x)}$=x-1 για κάθε x∈R και f(0)=0.

**a)** Να εκφράσετε την f΄ ως συνάρτηση της f. Μονάδες 5

**b)** Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε x>0. Μονάδες 12

**c)** Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=0 και x=1, να δείξετε ότι $\dfrac{1}{4} < \mathrm{E} < \dfrac{1}{2}f(1)$. Μονάδες 6

**Λύση**:

**i.** h(x)>g(x) ⇔ h(x)-g(x)>0 ⇔ $\int_\alpha^\beta (h(x)-g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

**ii.** Παραγωγίζουμε την δοθείσα σχέση:

**a)** f΄(x)+f΄(x)e$^{-f(x)}$=1 ⇔ $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$.

**b)** $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$ >0 και $f''(x) = \ldots = \dfrac{f'(x)e^{-f(x)}}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}$ >0.

Άρα f΄ γνησίως αύξουσα στο R.
Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την f στο [0,x].
Η f συνεχής στο [0,x] και παραγωγίσιμη στο (0,x), γιατί είναι παραγωγίσιμη στο R.

Άρα υπάρχει ξ∈(0,x) με $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$ .....(1)

$$\xi\in(0,x) \Leftrightarrow 0<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$$

**c)** Από το προηγούμενο ερώτημα f(x)>0, για κάθε x>0.

Άρα $E=\int_1^2 f(x)dx$.

$$\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x) \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \int_0^1 \frac{x}{2}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$\overset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.}{\underset{o\lambda o\kappa\lambda.}{\Longleftrightarrow}} \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1<E<\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 (x)'f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}<E<f(1)-\int_0^1 f(x)dx \text{ .....(2)}$$

Η (2) ⇔ E<f(1)-E ⇔ 2E<f(1) ⇔ $E<\dfrac{1}{2}f(1)$ .....(3)

Από (2) και (3) ⇒ $\dfrac{1}{4}<E<\dfrac{1}{2}f(1)$.

**34.** (Θέμα 3ον 2003) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

**i.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Μονάδες 6

**ii.** Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε x∈R. Μονάδες 6

**iii.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο O(0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των f και $f^{-1}$. Μονάδες 5

**iv.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f^{-1}$, τον άξονα x'x και την ευθεία με εξίσωση x=3. Μονάδες 6

**Λύση**:

**i.** $f'(x)=x^4+x^2+1>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα αντιστρέφεται.
$f''(x)=4x^3+2x=2x(2x^2+1)$.

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$, γιατί $2x^2+1>0$ για κάθε x∈R.

| x | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f΄΄(χ) | - | ○ | + |
| f(x) | K.K. | | K.A. |

Στο διάστημα (-∞,0] είναι κοίλη και στο διάστημα [0,+∞) είναι κυρτή.

**ii.** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αρκεί να δείξουμε ότι $e^x\geq 1+x \Leftrightarrow e^x-1-x\geq 0$.
Έστω $g(x)=e^x-1-x$, x∈R.
$g'(x)=e^x-1$ με πίνακα μεταβολών τον παρακάτω:

| x | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| g΄(χ) | - | ○ | + |
| g(x) | ↘ | | ↗ |

Στο x=0 η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το g(0)=0. Άρα για κάθε x, ισχύει $g(x)\geq g(0)=0 \Leftrightarrow e^x-1-x\geq 0$
$\Leftrightarrow e^x\geq 1+x$.

**iii.** Λόγω συμμετρίας της f και της $f^{-1}$ ως προς την ευθεία y=x, το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της $C_f$, της ευθείας y=3 και των ευθειών x=0 και x=1,

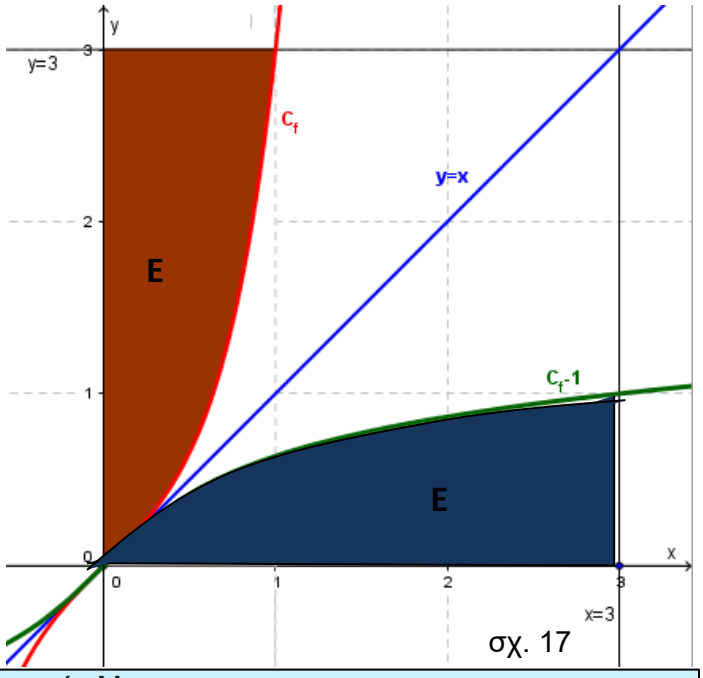
γιατί $\begin{cases} y = x^5 + x^3 + x \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x = 3$

$\Leftrightarrow x^5 + x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 1$

(σχ. 17). Επομένως:

$$E = \int_0^1 (3 - f(x))dx = \int_0^1 (3 - x^5 - x^3 - x)dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \ldots = \frac{25}{12}.$$



σχ. 17

**35.** (Θέμα 3ον 2005) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}$, λ>0.

**i.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 3

**ii.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ η οποία διέρχεται από το O(0,0) έχει εξίσωση y=λex. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. Μονάδες 7

**iii.** Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα y'y και την εφαπτομένη της στο σημείο Μ, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$. Μονάδες 8

**iv.** Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$. Μονάδες 7

**Λύση**:

**i.** $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}>0$ για λ>0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

**ii.** Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(x_0,y_0)$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0)$……(1)

Η (1) για x=y=0 δίνει $-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$.

Άρα η (1) για $x_0 = \frac{1}{\lambda}$ γίνεται y=λex και το σημείο επαφής $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$.

**iii.** Επειδή $f''(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}>0$, η f στρέφει τα κοίλα άνω οπότε η εφαπτομένη είναι κάτω από την γραφική παράσταση της f. Επομένως f(x)>λex ⇔ f(x)-λex>0.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^{1/\lambda} |f(x) - \lambda ex| dx = \int_0^{1/\lambda} (f(x) - \lambda ex)dx$

$$= \int_0^{1/\lambda} \left(e^{\lambda x} - \lambda ex\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \lambda e \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/\lambda} = \ldots = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

**iv.** $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{4 + 2\eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e-2}{\frac{4 + 2\eta\mu\lambda}{\lambda}}.$$

$$\left|\frac{4+2\eta\mu\lambda}{\lambda}\right| = \frac{|4+2\eta\mu\lambda|}{|\lambda|} \le \frac{|4|+2|\eta\mu\lambda|}{\lambda} \le \frac{6}{\lambda}$$, γιατί όταν λ→+∞, λ>0.

Αρα $-\frac{6}{\lambda} \le \frac{4+2\eta\mu\lambda}{\lambda} \le \frac{6}{\lambda}$.

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{6}{\lambda}\right) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{6}{\lambda}\right) = 0$.

$\xLeftrightarrow[\text{παρεμβ.}]{\text{κριτήριο}} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{4+2\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0.$

και επειδή e-2>0, $\frac{4+2\eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$, θα είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{e-2}{\frac{4+2\eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$.

**36.** (Θέμα 2ον 2006) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$, με $x\ge2$.

**i.** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1». Μονάδες 6

**ii.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}$. Μονάδες 8

**iii.** Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $f^{-1}$ με την ευθεία y=x. Μονάδες 4

**iv.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και $f^{-1}$. Μονάδες 7

**Λύση**:

**i.** $f'(x)=2(x-2)\ge0$ για $x\ge2$, με $f'(x)=0$ μόνο για x=2.
Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1».

**ii.** Επειδή η f είναι «1-1», αντιστρέφεται.
Επειδή $f(x)=2+(x-2)^2\ge2$, το σύνολο τιμών της f είναι $f(D_f)=[2,+\infty)$.
Θέτω $y=2+(x-2)^2 \Leftrightarrow y-2=(x-2)^2$

$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{y-2}$ …… γιατί $x\ge2$ και $y\ge2$.

$\Leftrightarrow x=2+\sqrt{y-2}$.

Άρα $f^{-1}(y)=2+\sqrt{y-2} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-2}$ με πεδίο ορισμού $f(D_f)=[2,+\infty)$.

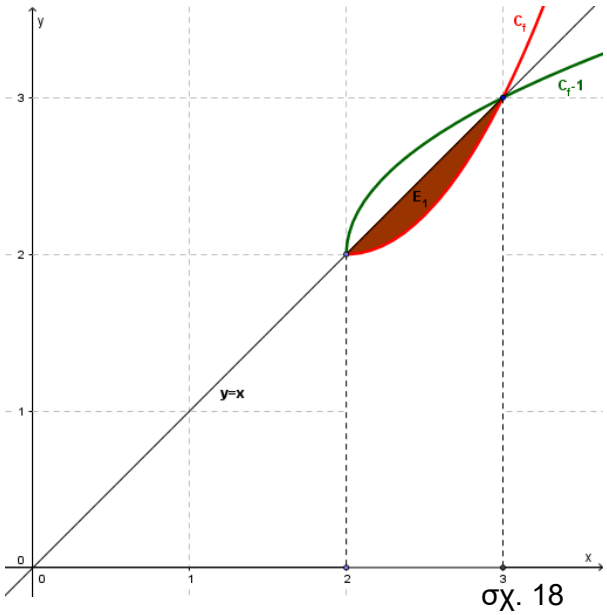
**iii.** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$, οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και $f^{-1}$ με την ευθεία y=x, αρκεί να λύσουμε μια από αυτές.
$f(x)=x \Leftrightarrow 2+(x-2)^2=x \Leftrightarrow (x-2)^2=x-2 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$.

**iv.** Επειδή $f''(x)=2>0$, η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[2,+\infty)$, επομένως η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία y=x στο διάστημα [2,3]. Δηλαδή $x\ge f(x) \Leftrightarrow x-f(x)\ge0$. Λόγω συμμετρίας των f και $f^{-1}$ με την ευθεία y=x, το ζητούμενο εμβαδόν E είναι το διπλάσιο του εμβαδού $E_1$του χωρίου που σχηματίζεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της y=x και της $f^{-1}$. (σχ. 18)

$$E = 2\int_2^3 |x-f(x)|dx = 2\int_2^3 (x-f(x))dx$$

$$= 2\int_2^3 \left(x-2-(x-2)^2\right)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-2x-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_2^3 = \ldots = \frac{1}{3}.$$



σχ. 18

**37.** (Θέμα Γ 2012) Δίνεται συνάρτηση f(x)=(x-1)lnx-1, x>0.

**Γ1.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, x>0, έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες. Μονάδες 6

**Γ3.** Αν $x_1$, $x_2$ οι δυο ρίζες της εξίσωσης του Γ2 ερωτήματος, με $x_1<x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$. Μονάδες 6

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=f(x)+1, x>0, τον άξονα x'x και την ευθεία x=e. Μονάδες 7

**Λύση**:

**Γ1.** $f'(x)=(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$.

• για 0<x<1 $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}<0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \ln x<\ln 1=0 \end{cases} \Rightarrow \ln x+\dfrac{x-1}{x}<0 \Rightarrow f'(x)<0$ και

• για x>1 $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}>0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \ln x>\ln 1=0 \end{cases} \Rightarrow \ln x+\dfrac{x-1}{x}>0 \Rightarrow f'(x)>0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$.

*Σύνολο τιμών*: Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων x-1 και lnx, θα έχουμε:

• $f(\Delta_1)\overset{f\downarrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-1,+\infty)$, ……(1)

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left((x-1)\ln x-1\right)=-1\cdot(-\infty)-1=+\infty$.

• $f(\Delta_2)\overset{f\uparrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$, ……(2)

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left((x-1)\ln x-1\right)=+\infty\cdot(+\infty)-1=+\infty$.

Από (1) και (2) $\Rightarrow f((0,+\infty))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)\cup[-1,+\infty)=[-1,+\infty)$.

**Γ2.** $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013}$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012$

$\Leftrightarrow f(x)=2012$.

• Επειδή $2012\in f(\Delta_1)$, η εξίσωση f(x)=2012 $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{x-1}=e^{2013}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1), άρα θετική και επειδή στο διάστημα αυτό είναι ↘, είναι μοναδική.

• Επειδή $2012\in f(\Delta_2)$, η εξίσωση f(x)=2012 $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{x-1}=e^{2013}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$, άρα θετική και επειδή στο διάστημα αυτό είναι ↗, είναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ έχει δυο ακριβώς θετικές ρίζες.

**Γ3.** Θεωρούμε την συνάρτηση h(x)=f'(x)+f(x)-2012, x>0.

• Η είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

• $h(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012=f'(x_1)<0$……..(3)

γιατί $x_1$ ρίζα της εξίσωσης f(x)=2012 $\Leftrightarrow f(x_1)=2012$

και $f'(x_1)<0$, επειδή $x_1\in(0,1)$ και f'(x)<0 στο (0,1).

$h(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012=f'(x_2)>0$……..(4)

γιατί $x_2$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2012 \Leftrightarrow f(x_2)=2012$

και $f'(x_2)>0$, επειδή $x_2\in(1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$.

Από (3) και (4) $\Rightarrow h(x_1)h(x_2)<0$ και επομένως λόγω του Θ.**Bolzano**, υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h(x)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$.

**Γ4.** $g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x-1+1=(x-1)\ln x\geq 0$ στο $(0,+\infty)$, με $g(x)=0$ στο $x=1$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx$

$$=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx$$

$$\overset{\pi.o.}{=}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)(\ln x)'dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\ldots==\frac{e^2-3}{4}.$$

**38.** (Θέμα Γ 2014) Δίνεται συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1)$, $x\in R$.

**Γ1.** Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία. Μονάδες 5

**Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}$. Μονάδες 7

**Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$ και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$. Μονάδες 6

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$, τον άξονα x'x και την ευθεία $x=1$. Μονάδες 7

**Λύση**:

**Γ1.** $h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$ και $h''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$, για κάθε $x\in R$. Άρα η h είναι κοίλη.

**Γ2.** Επειδή $h'(x)>0$, η συνάρτηση h είναι ↗.

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}$$

$$\Leftrightarrow h(2h'(x))<\ln e-\ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow h(2h'(x))<1-\ln(e+1)$$

$\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)$ …… και επειδή η συνάρτηση h είναι ↗

$\Leftrightarrow 2h'(x)<1$

$$\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x>0.$$

**Γ3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln(e^x+1)\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x - \ln(e^x+1)\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$

$= \lim\limits_{u\to1}(\ln u)$=ln1=0,

Θέτω $u=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x}\right)$=1.

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία y=0 (άξονας x'x).

λ= $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\ln(e^x+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right)$

$=1-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\right)$

$\left(\frac{0}{\infty}\right)$

$= 1-\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}$

$=1-0\cdot0=1.$

β= $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-\lambda x) \overset{\lambda=1}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-x)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(-\ln(e^x+1))$ =-ln1=0.

Άρα η ευθεία y=λx+β ⇔ y=x είναι πλάγια ασύμπτωτή της h στο -∞.

**Γ4.** φ(x)=$e^x$(h(x)+ln2)=$e^x$(x-ln($e^x$+1)+ln2)

=$e^x$(ln$e^x$-ln($e^x$+1)+ln2)

$=e^x\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}$>0, γιατί $e^x$>0 και $\dfrac{2e^x}{e^x+1}$>1 για x>0.

Η γραφική παράσταση της φ(x) τέμνει τον άξονα x'x στο x=0.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^1\phi(x)dx=\int_0^1 e^x\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}dx$

$=\int_0^1\left(e^x\right)'\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}dx$

$\overset{\pi.o.}{=}\left[e^x\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1-\int_0^1 e^x\left(\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)'dx$

$=e\ln\dfrac{2e}{e+1}-\int_0^1\cancel{e^x}\dfrac{e^x+1}{\cancel{2e^x}}\left(\dfrac{\cancel{2}e^x}{e^x+1}\right)'dx$

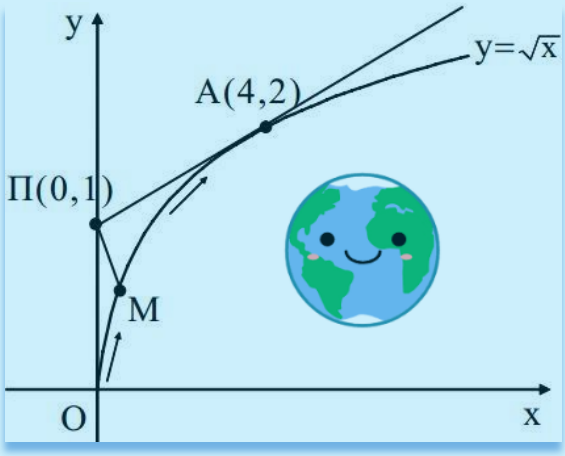
$=e\ln\dfrac{2e}{e+1}-\int_0^1(e^x+1)\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'dx$

$=e\ln\dfrac{2e}{e+1}-\int_0^1\cancel{(e^x+1)}\dfrac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^{\cancel{2}}}dx$

$$= e\ln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$= e\ln\frac{2e}{e+1} - \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 = \ldots = e\ln\frac{2e}{e+1} - \ln\frac{e+1}{2}.$$

**39.** Ένα κινητό Μ ξεκινά από το Ο και κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=$\sqrt{x}$ , x≥0. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό Μ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, t≥0 είναι x′(t)= =16m/min.

**i.** Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, t ≥ 0 δίνεται από τον τύπο: x(t)=16t. Μονάδες 5

**ii.** Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. Μονάδες 6

**iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α. Μονάδες 6

**iv.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, {}^1/_4)$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

**Λύση:**

**i.** x′(t)=16 ⇔ x(t)=16t+c……(1)

Η σχέση (1) για x(t)=0 και t=0 δίνει c=0.

Άρα x(t)=16t……...(2)

**ii.** Το ζητούμενο σημείο είναι εκείνο για το οποίο η ευθεία ΠΑ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x)=$\sqrt{x}$ .

f΄(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Εάν Α($x_0$, $\sqrt{x_0}$ ), τότε η ευθεία ΠΕ έχει εξίσωση (ε): y-f($x_0$)=f($x_0$)(x-$x_0$)

⇔ y-$\sqrt{x_0}$ =$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (x-$x_0$)……..(3)

Π(0,1)∈(ε) ⇔ 1-$\sqrt{x_0}$ =$-\frac{x_0}{2\sqrt{x_0}}$

⇔ 2-2$\sqrt{x_0}$ = -$\sqrt{x_0}$

⇔ $\sqrt{x_0}$ = 2

⇔ $x_0$= 4

$y=f(x_0)=f(4)=\sqrt{4}=2$.

Άρα A(4,2)

Η σχέση (2) για x(t)=4 δίνει 16t=4

$\Leftrightarrow t={}^{1}/_{4}$sec.

***iii.*** $f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}<0$ οπότε η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Άρα η εφαπτομένη (ε) είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f……(4)

Η σχέση (3) για $x_0=4$ δίνει (ε): $y=\frac{1}{4}x+1$.

Εάν $g(x)=\frac{1}{4}x+1$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^4 |f(x)-g(x)|dx \overset{(4)}{=} \int_0^4 (g(x)-f(x))dx$$

$$\overset{(4)}{=} \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{8}+x-\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^4 = \ldots = \frac{2}{3}\text{ τ.μ.}$$

**iv.** Εάν $M(x,\sqrt{x})$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f μεταξύ O και A, με $x\in[0,4]$, τότε (ΠΜ)=

$$\sqrt{(x-0)^2+(\sqrt{x}-1)^2}=\sqrt{x^2+x-2\sqrt{x}+1}.$$

Η απόσταση (ΠΜ) γίνεται ελάχιστη, όταν η συνάρτηση $h(x)=x^2+x-2\sqrt{x}+1$ γίνεται ελάχιστη.

$h'(x)=2x+1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$h''(x)=2+\frac{1}{2x\sqrt{x}}>0$. Επομένως η συνάρτηση h΄(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ=(0,4].

$$h'(\Delta) \overset{h'\uparrow}{=} \left(\lim_{x\to 0} h'(x), h'(4)\right]$$

$$=\left(-\infty,\frac{17}{2}\right].$$

Επειδή $0\in h'(\Delta)$, η συνάρτηση h΄(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ στο διάστημα (0,4] και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, μοναδική.

• Για $x<\rho \overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(x)<h'(\rho)$

$\Leftrightarrow h'(x)<0$

• Για $x>\rho \overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(x)>h'(\rho)$

$\Leftrightarrow h'(x)>0$

| x | 0 | ρ | 4 |
|---|---|---|---|
| h΄(x) | - | 0 | + |
| h(x) | ↘ | Τ.Ε. | ↗ |

Στο x=ρ η συνάρτηση h(x) και επομένως και η απόσταση (ΠΑ) γίνεται ελάχιστη.

Η σχέση (2) για x(t)=ρ δίνει 16t=ρ

$\Leftrightarrow t={}^{\rho}/_{16}$ sec.

**40.** END