ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

ii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{\ln x}$

iv) $f(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$

v) $f(x)=\dfrac{xe^x}{x^2+1}$

vi) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}$

vii) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2+1}$

viii) $f(x)=xe^x\varepsilon\varphi x$

ix) $f(x)=\dfrac{1-x\ln x}{1+x\ln x}$

x) $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$

Λύση:

i) $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

ii) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)'=-\dfrac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

$$=-\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

iii) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)'=-\dfrac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}+\dfrac{(\ln x)'}{\ln^2 x}$

$$=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}+\frac{1}{x\ln^2 x}.$$

iv) $f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x\ln x}\right)'=\dfrac{(x-1)'x\ln x-(x-1)(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}$

$$=\frac{x\ln x-(x-1)\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)}{x^2\ln^2 x}$$

$$=\frac{x\ln x-(x-1)\left(\ln x+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\right)}{x^2\ln^2 x}$$

$$=\frac{x\ln x-(x-1)(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x}$$

$$=\frac{\cancel{x\ln x}-\cancel{x\ln x}-x+\ln x+1}{x^2\ln^2 x}$$

$$=\frac{1-x+\ln x}{x^2\ln^2 x}.$$

v) $f'(x)=\left(\dfrac{xe^x}{x^2+1}\right)'$

$$=\frac{\left(xe^x\right)'(x^2+1)-(x^2+1)'xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left((x)'e^x+x(e^x)'\right)(x^2+1)-2x\cdot xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^x+xe^x\right)(x^2+1)-2x^2e^x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2e^x+e^x+x^3e^x+xe^x-2x^2e^x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-x^2e^x+e^x+x^3e^x+xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x(x^3-x^2+x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

vi) $f'(x)=\left(\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\right)'$

$$=\frac{(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{(\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}+x\eta\mu x)(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{x\eta\mu x(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x)(2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{2x\eta\mu^2 x+2x\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x\eta\mu x}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{2x(\overset{1}{\cancel{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}})-\eta\mu 2x}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$=\frac{2x-\eta\mu 2x}{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)^2}.$$

vii) $f'(x)=\left(\dfrac{x\ln x}{x^2+1}\right)'$

$$=\frac{(x\ln x)'(x^2+1)-x\ln x(x^2+1)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{((x)'\ln x + x(\ln x)')(x^2+1) - 2x\cdot x\ln x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(\ln x+1)(x^2+1) - 2x^2\ln x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^2\ln x + \ln x + x^2 + 1 - 2x^2\ln x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{\ln x + x^2 + 1 - x^2\ln x}{(x^2+1)^2}.$$

viii) $f'(x) = \left(xe^x \varepsilon\varphi x\right)'$
$$= (x)'e^x\varepsilon\varphi x + x(e^x)'\varepsilon\varphi x + xe^x(\varepsilon\varphi x)'$$
$$= e^x\varepsilon\varphi x + xe^x\varepsilon\varphi x + \frac{xe^x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ix) $f'(x) = \left(\frac{1-x\ln x}{1+x\ln x}\right)'$
$$= \frac{(1-x\ln x)'(1+x\ln x) - (1-x\ln x)(1+x\ln x)'}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{(-\ln x-1)(1+x\ln x) - (1-x\ln x)(\ln x+1)}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{-(\ln x+1)(1+x\ln x) - (1-x\ln x)(\ln x+1)}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{(\ln x+1)(-1-\cancel{x\ln x}-1+\cancel{x\ln x})}{(1+x\ln x)^2}$$
$$= \frac{-2(\ln x+1)}{(1+x\ln x)^2}.$$

x) $f'(x) = \left(\frac{1-2^x}{1+2^x}\right)'$
$$= \frac{(1-2^x)'(1+2^x) - (1-2^x)(1+2^x)'}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2^x\ln 2(1+2^x) - (1-2^x)2^x\ln 2}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2^x\ln 2(1+\cancel{2^x}+1-\cancel{2^x})}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2\cdot 2^x\ln 2}{(1+2^x)^2}$$
$$= \frac{-2^{x+1}\ln 2}{(1+2^x)^2}.$$

2) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

ii) $f(x) = xe^{\sqrt{1-x}}$

iii) $f(x) = e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1)$

iv) $f(x) = \ln^2\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)$

v) $f(x) = \sqrt{x^2-1-\ln x^2}$

vi) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x}$

vii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)$

viii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)^2$

ix) $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

x) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$

xi) $f(x) = e^{-2x} + e^{-x}$

Λύση:

i) $f'(x) = \left(e^{2x} - 2e^x\right)' = e^{2x}(2x)' - 2e^x$
$$= 2e^{2x} - 2e^x$$
$$= 2e^x(e^x - 1).$$

ii) $f'(x) = \left(xe^{\sqrt{1-x}}\right)'$
$$= (x)'e^{\sqrt{1-x}} + x\left(e^{\sqrt{1-x}}\right)'$$
$$= e^{\sqrt{1-x}} + xe^{\sqrt{1-x}}\left(\sqrt{1-x}\right)'$$
$$= e^{\sqrt{1-x}} + xe^{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(1-x)'$$
$$= e^{\sqrt{1-x}} - \frac{xe^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}.$$

iii) $f'(x) = \left(e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1)\right)'$
$$= (e^{\sqrt{3x}})'(\sqrt{3x}+1) + e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1)'$$
$$= e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x})'(\sqrt{3x}+1) + e^{\sqrt{3x}}\frac{1}{2\sqrt{3x}}(3x)'$$
$$= e^{\sqrt{3x}}\frac{1}{2\sqrt{3x}}(3x)'(\sqrt{3x}+1) + e^{\sqrt{3x}}\frac{3}{2\sqrt{3x}}$$
$$= \frac{3e^{\sqrt{3x}}}{2\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1) + \frac{3e^{\sqrt{3x}}}{2\sqrt{3x}}$$
$$= \frac{3(\sqrt{3x}+2)e^{\sqrt{3x}}}{2\sqrt{3x}}.$$

iv) $f'(x) = \left[\ln^2\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\right]'$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\left[\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\right]'$$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)'$$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{\cancel{x+2}}{x^2+x+1}\cdot\frac{(2x+1)(x+2)-(x^2+x+1)}{(x+2)^{\cancel{2}}}$$
$$= 2\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

v) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-1-\ln x^2}\right)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}(x^2-1-\ln x^2)'$$

$$=\frac{2x-\frac{1}{x^2}(x^2)'}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$$

$$=\frac{2x-\frac{2x}{x^2}}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$$

$$=\frac{2x-\frac{2}{x}}{2\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$$

$$=\frac{2(x^2-1)}{2x\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}$$

$$=\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1-\ln x^2}}.$$

vi) $f'(x)=\left(\frac{\ln x-2}{\ln^2 x}\right)'$

$$=\frac{(\ln x-2)'\ln^2 x-(\ln x-2)(\ln^2 x)'}{\left(\ln^2 x\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\ln^2 x-(\ln x-2)2\ln x(\ln x)'}{\ln^4 x}$$

$$=\frac{\frac{\ln^2 x}{x}-(\ln x-2)2\ln x\frac{1}{x}}{\ln^4 x}$$

$$=\frac{\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{(\ln x-2)2\ln x}{x}}{\ln^4 x}$$

$$=\frac{\ln^2 x-(\ln x-2)2\ln x}{x\ln^4 x}$$

$$=\frac{\ln^2 x-2\ln^2 x+4\ln x}{x\ln^4 x}$$

$$=\frac{-\ln^2 x+4\ln x}{x\ln^4 x}$$

$$=\frac{\ln x(4-\ln x)}{x\ln^4 x}$$

$$=\frac{4-\ln x}{x\ln^3 x}.$$

vii) $f'(x)=\left(\eta\mu^3(2x+3)\right)'$

$$=3\eta\mu^2(2x+3)\left(\eta\mu(2x+3)\right)'$$

$$=3\eta\mu^2(2x+3)\sigma\upsilon\nu(2x+3)\left(2x+3\right)'$$

$$=6\eta\mu^2(2x+3)\sigma\upsilon\nu(2x+3)$$

$$=3\eta\mu(4x+6)\eta\mu(2x+3).$$

viii) $f'(x)=\left(\eta\mu^3(2x+3)^2\right)'$

$$=3\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot\left(\eta\mu(2x+3)^2\right)'$$

$$=3\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot\sigma\upsilon\nu(2x+3)^2\left((2x+3)^2\right)'$$

$$=3\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot 2(2x+3)(2x+3)'\sigma\upsilon\nu(2x+3)^2$$

$$=12\eta\mu^2(2x+3)^2\cdot(2x+3)\sigma\upsilon\nu(2x+3)^2.$$

ix) $f'(x)=\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]'$

$$=2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$$

$$=2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\frac{-1-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{(1+x)^2}$$

$$=4\frac{x-1}{1+x}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}.$$

x) $f'(x)=\left(\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}}\cdot\left(\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}\right)'$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\cdot\frac{-\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x)-\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\cdot\frac{-\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x+1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}\cdot\frac{-2\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}$$

$$=\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}.$$

xi) $f'(x)=\left(e^{-2x}+e^{-x}\right)'=e^{-2x}(-2x)'+e^{-x}(-x)'$

$$=-2e^{-2x}-e^{-x}$$

$$=-e^{-x}(2e^{-x}+1).$$

3) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $f(x)=x^{\ln x}$

iii) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

Λύση:

i) $f'(x)=\left((\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\left(e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu x)}\right)'$

$$=e^{\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu x)}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(\eta\mu x)\right)'$$

$$=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left((\sigma\upsilon\nu x)'\cdot\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(\ln(\eta\mu x)\right)'\right)$$

$$=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(-\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}(\eta\mu x)'\right)$$

$$=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\varphi x-\eta\mu x\cdot\ln(\eta\mu x)\right).$$

ii) $$f'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\ln x}\right)'$$
$$=e^{\ln x\cdot\ln x}\left(\ln x\cdot\ln x\right)'$$
$$=x^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}\ln x\right)$$
$$=\frac{2x^{\ln x}\ln x}{x}.$$

iii) $$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\right)'$$
$$=e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)'$$
$$=x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

4) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού και $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ οι ρίζες του, να δείξετε ότι: $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}+\frac{1}{x-\rho_4}$.

Λύση: Αφού ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 οι ρίζες του πολυωνύμου P(x), αυτό μπορεί να γραφεί στην μορφή:
$P(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)$ οι ρίζες του.
$$\begin{aligned}P'(x)&=(x-\rho_1)'(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)+\\&+(x-\rho_1)(x-\rho_2)'(x-\rho_3)(x-\rho_4)+\\&+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)'(x-\rho_4)+\\&+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)'\\&=(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)+(x-\rho_1)(x-\rho_3)(x-\rho_4)+\\&+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_4)+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\end{aligned}$$
Άρα $$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{\cancel{(x-\rho_2)}\cancel{(x-\rho_3)}\cancel{(x-\rho_4)}}{(x-\rho_1)\cancel{(x-\rho_2)}\cancel{(x-\rho_3)}\cancel{(x-\rho_4)}}+\frac{\cancel{(x-\rho_1)}\cancel{(x-\rho_3)}\cancel{(x-\rho_4)}}{\cancel{(x-\rho_1)}(x-\rho_2)\cancel{(x-\rho_3)}\cancel{(x-\rho_4)}}+\frac{\cancel{(x-\rho_1)}\cancel{(x-\rho_2)}\cancel{(x-\rho_4)}}{\cancel{(x-\rho_1)}\cancel{(x-\rho_2)}(x-\rho_3)\cancel{(x-\rho_4)}}+\frac{\cancel{(x-\rho_1)}\cancel{(x-\rho_2)}\cancel{(x-\rho_3)}}{\cancel{(x-\rho_1)}\cancel{(x-\rho_2)}\cancel{(x-\rho_3)}(x-\rho_4)}=$$
$$=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\frac{1}{x-\rho_3}+\frac{1}{x-\rho_4}.$$

5) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και ρ_1,ρ_2,ρ_3 οι ρίζες του, διαφορετικές ανά δυο, να δείξετε ότι: $\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=0.$

Λύση: Αφού $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ οι ρίζες του πολυωνύμου P(x), αυτό μπορεί να γραφεί στην μορφή:
$P(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ οι ρίζες του. Τότε:
$$\begin{aligned}P'(x)&=(x-\rho_1)'(x-\rho_2)(x-\rho_3)+\\&+(x-\rho_1)(x-\rho_2)'(x-\rho_3)+\\&+(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)'=\\&=(x-\rho_2)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_2)\end{aligned}$$
οπότε $P'(\rho_1)=(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)$,
$P'(\rho_2)=(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)$
$=-(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)$ και
$P'(\rho_3)=(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)$
$=(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)$.

Άρα $$\left.\begin{aligned}&\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}=\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}\\&\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}=-\frac{\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)}\\&\text{και}\quad\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=\frac{\rho_3}{(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}\end{aligned}\right\}+$$
$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}-\frac{\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)}+\frac{\rho_3}{(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}=$$
$$=\frac{\rho_1(\rho_2-\rho_3)-\rho_2(\rho_1-\rho_3)+\rho_3(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}$$
$$=\frac{\cancel{\rho_1\rho_2}-\cancel{\rho_1\rho_3}-\cancel{\rho_1\rho_2}+\cancel{\rho_2\rho_3}+\cancel{\rho_1\rho_3}-\cancel{\rho_2\rho_3}}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}=0$$

6) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$, τέτοιο ώστε $P(x)-P'(x)=x^4-4$, για κάθε $x\in R$.

Λύση: $P'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$
$P(x)-P'(x)=x^4-4 \Leftrightarrow$
$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta-4x^3-3\alpha x^2-2\beta x-\gamma=x^4-4 \Leftrightarrow$
$(\alpha-4)x^3+(\beta-3\alpha)x^2+(\gamma-2\beta)x+(\delta-\gamma)=-4 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-4=0\\\beta-3\alpha=0\\\gamma-2\beta=0\\\delta-\gamma=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\\\beta=12\\\gamma=24\\\delta=20\end{cases}.$$
Άρα $P(x)=x^4+4x^3+12x^2+24x+20$.

7) Εάν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο R^*, με:
- **i)** $g(x)=xf(x)$, για κάθε $x\in R^*$,
- **ii)** $g(1)=14$ και
- **iii)** η g είναι παραγωγίσιμη στο R^*, με $g'(1)=17$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

Λύση: $g(x)=xf(x) \overset{x=1}{\Rightarrow} g(1)=f(1) \Rightarrow f(1)=14$.
Για $x\neq 0$ έχουμε:

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ και

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{g(x)}{x}-14}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-14x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-14x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-14+14-14x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{g(x)-14}{x(x-1)}-\frac{14(x-1)}{x(x-1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{g(x)-14}{x-1}-\frac{14}{x}\right)$$
$=1\cdot g'(1)-14$
$=17-14$
$=3.$

<u>*2ος τρόπος*</u>: $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο R* ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα για $x\neq0$ έχουμε:

$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$ και για x=1:

$f'(1)=\dfrac{g'(1)-g(1)}{1^2}=17-14=3.$

<u>*3ος τρόπος*</u>: $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο R* ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα για $x\neq0$ παραγωγίζουμε την δοθείσα και έχουμε:

$g(x)=xf(x) \Leftrightarrow g'(x)=f(x)+xf'(x)$ και για x=1:

$g'(1)=f(1)+1\cdot f'(1) \Leftrightarrow 17=14+f'(1)$

$\Leftrightarrow f'(1)=3.$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+2x^2-x$. Να βρείτε το $\alpha\in R$, ώστε η εφαπτομένη (ε) της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$, να:

i) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1): y=3x+1

ii) είναι κάθετη στην ευθεία (ε_2): y=-2x+1

iii) σχηματίζει γωνία 135^0 με τον ημιάξονα Ox.

<u>**Λύση**</u>: $f'(x)=3\alpha x^2+4x-1$

i) $\varepsilon//\varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_1}$

$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=3\\ \text{Επίσης } f'(x_0)=\lambda_\varepsilon\end{array}\right\} \Leftrightarrow f'(x_0)=3$

$\Leftrightarrow f'(1)=3$

$\Leftrightarrow 3\alpha+4-1=3 \Leftrightarrow \alpha=0$

ii) $\varepsilon\perp\varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1$

$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot(-2)=-1$

$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon={}^1/_2\\ \text{Επίσης } f'(x_0)=\lambda_\varepsilon\end{array}\right\} \Leftrightarrow f'(x_0)={}^1/_2$

$\Leftrightarrow f'(1)={}^1/_2$

$\Leftrightarrow 3\alpha+4-1={}^1/_2$

$\Leftrightarrow \alpha={}^{-5}/_6.$

iii) $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(1)=\varepsilon\varphi135^0$

$\Leftrightarrow 3\alpha+4-1=-1$

$\Leftrightarrow \alpha={}^{-4}/_3.$

9) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=συν2x

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\pi/8$,

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

<u>**Λύση**</u>:

i) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sigma\upsilon\nu2\dfrac{\pi}{8}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt2}{2}.$

$f'(x)=-2\eta\mu2x$

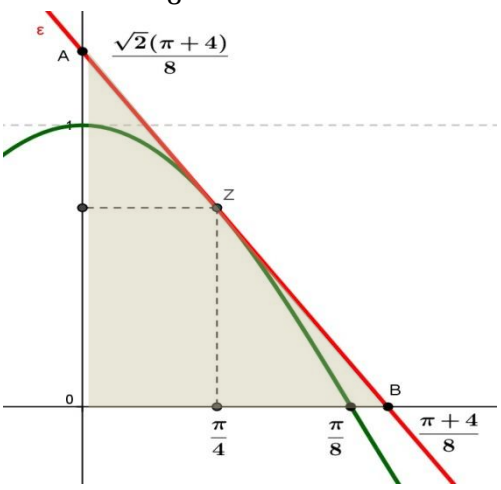
$f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=-2\eta\mu2\dfrac{\pi}{8}=-2\eta\mu\dfrac{\pi}{4}=-2\dfrac{\sqrt2}{2}=-\sqrt2.$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y-f\left(\frac{\pi}{8}\right)=f'\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow$$
$$y-\frac{\sqrt2}{2}=-\sqrt2\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow$$
$$y=-\sqrt2x+\frac{\sqrt2(\pi+4)}{8}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ii) $(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} y=\dfrac{\sqrt2(\pi+4)}{8}$

$(1)\overset{y=0}{\Rightarrow} x=\dfrac{\pi+4}{8}$



$(OAB)=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\pi+4}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\pi+4)^2}{128}.$$

10) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R.

i) Εάν f άρτια, τότε f΄ περιττή,

ii) Εάν f περιττή, τότε f΄ άρτια,

iii) Εάν f περιοδική με περίοδο T, τότε f΄ περιοδική με περίοδο επίσης T.

iv) Αν f περιττή και στο $x_0=1$ έχει κλίση 2008, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=-1$.

Λύση:

i) f άρτια $\Leftrightarrow$ f(-x)=f(x) για δάθε x

$\Rightarrow$ [f(-x)]΄=f΄(x)

$\Rightarrow$ f΄(-x)·(-x)΄=f΄(x).

$\Rightarrow$ -f΄(-x)=f΄(x).

$\Rightarrow$ f΄(-x)=-f΄(x).

Άρα f΄περιττή.

ii) f περιττή $\Leftrightarrow$ f(-x)=-f(x) για δάθε x

$\Rightarrow$ [f(-x)]΄=-f΄(x)

$\Rightarrow$ f΄(-x)·(-x)΄=-f΄(x).

$\Rightarrow$ -f΄(-x)=-f΄(x).

$\Rightarrow$ f΄(-x)=f΄(x).

Άρα f΄ άρτια.

iii) f περιοδική με περίοδο T

$\Leftrightarrow$ f(x+T)=f(x) για δάθε x

$\Rightarrow$ [f(x+T)]΄=f΄(x)

$\Rightarrow$ f΄(x+T)·(x+T)΄=f΄(x).

$\Rightarrow$ f΄(x+T)=f΄(x).

Άρα f΄ περιοδική με περίοδο T.

iv) Αφού f περιττή, η f΄ είναι άρτια.

Άρα f΄(-1)=f΄(1)=2008.

11) Εάν f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f(x_0)=2$, $[f^3(x_0)]'=3$, να δείξετε ότι $f'(x_0)=1/4$.

Λύση: $[f^3(x)]'=3f^2(x)f'(x)$ και για $x=x_0$:

$[f^3(x_0)]'=3f^2(x_0)f'(x_0)$

$\Leftrightarrow 3=3\cdot 4f'(x_0)$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=1/4$.

12) Εάν f παραγωγίσιμη στο R και $f(2x+3)=x^5$ για κάθε $x\in R$, να βρείτε την f΄(x).

Λύση: $[f(2x+3)]'=(x^5)'$

$\Leftrightarrow f'(2x+3)\cdot(2x+3)'=5x^4$

$\Leftrightarrow 2f'(2x+3)=5x^4$ ……..(1)

Θέτω 2x+3=u.

Τότε $x=\frac{u-3}{2}$ και η (1) γίνεται:

$2f'(u)=5\left(\frac{u-3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow f'(u)=\frac{5(u-3)^4}{32}$.

13) Εάν y=xημx, $x\in R$, να δείξετε ότι $(y'''+y')^2+(y''+y)^2=4$.

Λύση: y΄=ημx+xσυνx

y΄΄=συνx+συνx-xημx

=2συνx-xημx

y΄΄΄=-2ημx-ημx-xσυνx

=-3ημx-xσυνx. Άρα

$(y'''+y')^2+(y''+y)^2=(-3ημx-\cancel{xσυνx}+ημx+\cancel{xσυνx})^2+$

$+(2συνx-\cancel{xημx}+\cancel{xημx})^2$

$=(-2ημx)^2+(2συνx)^2$

$=4ημ^2x+4συν^2x$

$=4(ημ^2x+συν^2x)$

$=4\cdot 1$

$=4$.

14) Εάν $y=xe^{2x}$, $x\in R$, να δείξετε ότι:

y΄΄=4y΄-4y.

Λύση: $y'=e^{2x}+xe^{2x}(2x)'$

$=e^{2x}+2xe^{2x}$

$y''=e^{2x}(2x)'+2e^{2x}+2xe^{2x}(2x)'$

$=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}$

$=4e^{2x}+4xe^{2x}$.

$=4(e^{2x}+4xe^{2x})$.

Άρα $4y'-4y=4(e^{2x}+2xe^{2x})-4xe^{2x}$

$=4(e^{2x}+2xe^{2x}-xe^{2x})$

$=4(e^{2x}+xe^{2x})$

=y΄΄.

15) Εάν f δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(\ln x)=e^x+\ln x$, x>0, να βρείτε την f΄΄(0).

Λύση: $[f(\ln x)]'=(e^x+\ln x)'$

$\Leftrightarrow f'(\ln x)\cdot(\ln x)'=e^x+\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{f'(\ln x)}{x}=e^x+\frac{1}{x}$ ……(1)

$$\left(\frac{f'(\ln x)}{x}\right)'=\left(e^x+\frac{1}{x}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\frac{[f'(\ln x)]'x-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f''(\ln x)(\ln x)'x-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{f''(\ln x)\frac{1}{x}x-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}=e^x-\frac{1}{x^2}$$ ……(2)

Η σχέση (1) για x=1 δίνει

$\frac{f'(\ln 1)}{1}=e^1+\frac{1}{1}\Leftrightarrow f'(0)=e+1$……..(3)

Η σχέση (2) για x=1 δίνει

$$\frac{f''(\ln 1)-f'(\ln 1)}{1^2}=e^1-\frac{1}{1^2}\Leftrightarrow$$

$f''(0)-f'(0)=e-1\Leftrightarrow$…….λόγω της (3)

$f''(0)-e-1=e-1\Leftrightarrow$

$f''(0)=2e$.

16) Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x), για τα οποία ισχύει $P(x)=[P'(x)]^2$, για κάθε $x\in R$.

Λύση: Εάν το P(x) είναι ν-στού βαθμού, το $[P'(x)]^2$ είναι 2(ν-1)=2ν-2 βαθμού.
Άρα ν=2ν-2 ⇔ ν=2.
Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$.
Τότε $[P'(x)]^2=(2\alpha x+\beta)^2$
$=4\alpha^2x^2+4\alpha\beta+\beta^2$.
$P(x)=[P'(x)]^2 \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma=4\alpha^2x^2+4\alpha\beta+\beta^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha^2=\alpha \\ 4\alpha\beta=\beta \\ \gamma=\beta^2 \end{cases} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha=\frac{1}{4} \\ \beta\in R \\ \gamma=\beta^2 \end{cases}$$

Άρα $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\beta x+\beta^2$.

17) **α)** Να δείξετε ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει ρίζα τον αριθμό x=ρ με πολλαπλότητα κ (κ∈N, κ>1), τότε το x=ρ είναι ρίζα της f΄ με πολλαπλότητα κ-1
β) Υπολογίστε τα α,β∈R, ώστε η εξίσωση $3x^3-5x^2+(\alpha+1)x-\beta=0$ να έχει διπλή ρίζα το x=1.

Λύση:
α) Αφού η f έχει ρίζα τον αριθμό x=ρ με πολλαπλότητα κ, τότε $f(x)=(x-\rho)^\kappa\cdot\pi(x)$, με $\pi(\rho)\neq 0$.
$f'(x)=\kappa(x-\rho)^{\kappa-1}\cdot\pi(x)+(x-\rho)^\kappa\cdot\pi'(x)$
$=(x-\rho)^{\kappa-1}(\kappa\pi(x)+(x-\rho)\cdot\pi'(x))$.
Προφανώς $f'(\rho)=0$ και
$\kappa\pi(\rho)+(\rho-\rho)\cdot\pi'(\rho)=\kappa\pi(\rho)\neq 0$, γιατί $\pi(\rho)\neq 0$.
Άρα το ρ είναι ρίζα της f΄ με πολλαπλότητα κ-1.
β) Αφού η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=3x^3-5x^2+(\alpha+1)x-\beta$, έχει διπλή ρίζα το 1, από το πρώτο ερώτημα η παράγωγος $f'(x)=9x^2-10x+\alpha+1$ έχει απλή ρίζα το 1.

Άρα $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-5+a+1-\beta=0 \\ 9-10+\alpha+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

⇔ α=0 και β=-1.

18) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^3+2x+1$ δια $(x-1)^2$.

Λύση: Επειδή το $(x-1)^2$ είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο υ(x) θα είναι 1ου βαθμού.
Έστω υ(x)=αx+β.
Τότε $P(x)=(x-1)^2\pi(x)+\alpha x+\beta$
⇔ $x^3+2x+1=(x-1)^2\pi(x)+\alpha x+\beta$
⇔ $x^3+2x+1-\alpha x-\beta=(x-1)^2\pi(x)$……(1)
Άρα το πολυώνυμο $Q(x)=x^3+2x+1-\alpha x-\beta$ έχει διπλή ρίζα το 1, οπότε από την προηγούμενη άσκηση η $Q'(x)=3x^2+2-\alpha$ έχει απλή ρίζα το 1.

$$\begin{cases} Q(1)=0 \\ Q'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2+1-a-\beta=0 \\ 3+2-\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

⇔ α=5 και β=-1.
Άρα υ(x)=5x-1.

19) Έστω f,g:R→R, παραγωγίσιμες στο R με $f(x)g(x)e^x+\ln x=xe^{x-1}$, για κάθε x>0, να δείξετε ότι $\frac{f'(1)}{g'(1)}=-\frac{f(1)}{g(1)}$.

Λύση: $f(x)g(x)e^x+\ln x=xe^{x-1}$
⇔ $f(x)g(x)+\frac{\ln x}{e^x}=\frac{x}{e}$ και παραγωγίζοντας

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+\frac{\frac{1}{x}e^x-e^x\ln x}{e^{2x}}=\frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}=\frac{1}{e}$$

η οποία για x=1 δίνει:

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)+\frac{1}{e}=\frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=0$ ⇔
$f'(1)g(1)=-f(1)g'(1)$ ⇔
$\frac{f'(1)}{g'(1)}=-\frac{f(1)}{g(1)}$.

20) Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2} & ,\alpha\nu\ x\in R^* \\ 0 & ,\alpha\nu\ x=0 \end{cases}.$$

i) Να δείξετε ότι

$$f'(x)=\begin{cases} 4x\left(\eta\mu\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2}\right) & ,\alpha\nu\ x\in R^* \\ 0 & ,\alpha\nu\ x=0 \end{cases}$$

ii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=f'(0)$

iii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=2\pi^2\eta\mu\frac{1}{\pi^2}$.

Λύση:

i) • για x≠0 $f'(x)=\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)'=$

$$=4x\eta\mu\frac{1}{x^2}+2x^2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2x}{x^4}\right)=$$

$$=4x\left(\eta\mu\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2}\right).$$

• $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

(γιατί $\left|2x\eta\mu\frac{1}{x^2}\right|\le|2x|$

$\Leftrightarrow -|2x|\le 2x\eta\mu\frac{1}{x^2}\le|2x|$

και επειδή $\lim\limits_{x\to0}(-|2x|)=\lim\limits_{x\to0}(|2x|)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=0$.

Άρα

$$f'(x)=\begin{cases}4x\left(\eta\mu\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^2}\right) & ,\text{αν } x\in R^*\\ 0 & ,\text{αν } x=0\end{cases}.$$

ii) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, θα είναι και συνεχής στο 0.

Άρα $\lim\limits_{x\to0}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=$f(0)=0=f΄(0).

iii)Ομοίως $\lim\limits_{x\to\pi}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=$

=f(π)= $2\pi^2\eta\mu\frac{1}{\pi^2}$.

21) Η συνάρτηση f:R→R, είναι παραγωγίσιμη με f(1)=3 και f(x^3)=f(x), για κάθε x∈R. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2f(x)-3}{x-1}$.

Λύση: Παραγωγίζουμε την δοθείσα σχέση f(x^3)=f(x) και βρίσκουμε

[f(x^3)]΄=f΄(x) ⇔ f΄(x^3)·(x^3)΄=f΄(x)

⇔ 3x^2f΄(x^3)=f΄(x)

$\overset{x=1}{\Rightarrow}$ 3f΄(1)=f΄(1)

⇔ f΄(1)=0.

Θέτω g(x)=x^2f(x), x∈R.

Τότε g(1)=f(1)=3 και

g΄(x)=2xf(x)+x^2f΄(x) οπότε

g΄(1)=2f(1)+f΄(1)

=2·3+0

=6.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

=g΄(1)=6.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a_1^x+a_2^{2x}+...+a_\nu^{\nu x}$, όπου α_1, α_2, …, α_ν θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν f΄(0)=0, να δείξετε ότι $a_1a_2^2...a_\nu^\nu=1$.

Λύση:

$f'(x)=a_1^x\ln a_1+2a_2^{2x}\ln a_2+...+\nu a_\nu^{\nu x}\ln a_\nu$

και για x=0:

$f'(0)=a_1^0\ln a_1+2a_2^0\ln a_2+...+\nu a_\nu^0\ln a_\nu\Leftrightarrow$

$0=\ln a_1+2\ln a_2+...+\nu\ln a_\nu\Leftrightarrow$

$\ln a_1+\ln a_2^2+...+\ln\alpha_\nu^\nu=0$

$\ln(a_1a_2^2...\alpha_\nu^\nu)=\ln1\Leftrightarrow$

$a_1a_2^2...a_\nu^\nu=1$.

23) Έστω f παραγωγίσιμη στο R με f(x^3)=f^3(x), f(x)>0 και f΄(x)≠0, για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(1)=1.

Λύση: Παραγωγίζουμε την σχέση f(x^3)= =f^3(x) και βρίσκουμε: [f(x^3)]΄=[f^3(x)]΄

⇔ f΄(x^3)·(x^3)΄=3f^2(x)·f΄(x)

⇔ 3x^2·f΄(x^3)=3f^2(x)·f΄(x)

η οποία για x=1 δίνει

3~~f΄(1)~~=3f^2(1)·~~f΄(1)~~

και επειδή f΄(x)≠0, για κάθε x∈R, θα είναι f΄(1)≠0 η τελευταία γίνεται

f^2(1)=1

⇒ f(1)=±1

και αφού f(x)>0 για κάθε x∈R, ⇒ f(1)>0, οπότε η τελευταία σχέση δίνει f(1)=1.

24) Έστω $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Να δείξετε ότι:

i) f^2(x)+f΄(x)=1

ii) f΄΄(x)=-2f(x)f΄(x)

Λύση:

i) $f'(x)=\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)'$

$$=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

$$f^2(x)+f'(x)=\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(e^{2x}+1)^2}}{\cancel{(e^{2x}+1)^2}}=1.$$

ii) f^2(x)+f΄(x)=1⇔ [f^2(x)+f΄(x)]΄=(1)΄

⇔ 2f(x)f΄(x)+f΄΄(x)=0

⇔ f΄΄(x)=-2f(x)f΄(x).

25) Εάν για την συνάρτηση f ισχύει f(0)=0, $f'(x)=3+f^3(x)$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι:

i) $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=3f^2(x),\ x\in R$

ii) $f''(0)=0$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$

Λύση:

i) $f''(x)=3f^2(x)f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f''(x)}{f'(x)}=3f^2(x),\ x\in R$.

ii) $f''(x)=3f^2(x)f'(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} f''(0)=3\cancelto{0}{f^2(0)}f'(0)$

$\Leftrightarrow f''(0)=0.$

iii) $f'(x)=3+f^3(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} f'(0)=3+\cancelto{0}{f^3(0)}$

$\Leftrightarrow f'(0)=3$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\cancelto{0}{f(0)}}{x-0}=3$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3.$

26) Έστω f παραγωγίσιμη στο R, 1-1 και τέτοια ώστε $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x}$.

(*Υπόδειξη*: $f(f^{-1}(x))=x$)

Λύση: $f(f^{-1}(x))=x \Rightarrow [f(f^{-1}(x))]'=(x)'$

$\Rightarrow f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))'=1$

$\overset{f'=f}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))'=1$

$\Rightarrow x\cdot(f^{-1}(x))'=1$

$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x}.$

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ2x+2συν^2x$, $x\in(0,2π)$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη (δ) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): 2x-y+5=0.

Λύση: $f(x)=ημ2x+2συν^2x$

$\Rightarrow f'(x)=2συν2x+4συνx(συνx)'$

$\Rightarrow f'(x)=2συν2x-4συνxημx.$

$\Rightarrow f'(x)=2συν2x-2ημ2x.$

$(δ)//(ε) \Leftrightarrow λ_δ=λ_ε$

$\Leftrightarrow f'(x_0)=2$

$\Leftrightarrow 2συν2x_0-2ημ2x_0=2$

$\Leftrightarrow συν2x_0-ημ2x_0=1$……(1)

$\Leftrightarrow (συν2x_0-2ημ2x_0)^2=1$

$\Leftrightarrow \mathbf{συν^2 2x_0}-2συν2x_0ημ2x_0+\mathbf{ημ^2 2x_0}=1$

1

$\Leftrightarrow ημ4x_0=1$

$\Leftrightarrow 4x_0=κπ,\ κ\in Z$……(2)

$x_0\in(0,2π) \Leftrightarrow 0<4x_0<8π$

$\Leftrightarrow 0<κπ<8π$

$\Leftrightarrow 0<κ<8$

- κ=1. Τότε (2) $\Rightarrow 4x_0=π$
  $\Rightarrow x_0=π/4.$

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:

$συν2x_0-ημ2x_0=συν(π/2)-ημ(π/2)$
$=0-1$
$=-1.$

- κ=2. Τότε (2) $\Rightarrow 4x_0=2π$
  $\Rightarrow x_0=π/2.$

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:

$συν2x_0-ημ2x_0=συνπ-ημπ$
$=-1-0$
$=-1.$

- κ=3. Τότε (2) $\Rightarrow 4x_0=3π$
  $\Rightarrow x_0=3π/4.$

Δεκτή λόγω της (1) γιατί:

$συν2x_0-ημ2x_0=συν(3π/2)-ημ(3π/2)$
$=0-(-1)$
$=1.$

$f(3π/4)=ημ(3π/2)+2συν^2(3π/2)$
$=-1+0$
$=-1.$

Άρα A(3π/4,-1).

- κ=4. Τότε (2) $\Rightarrow 4x_0=4π$
  $\Rightarrow x_0=π.$

Δεκτή λόγω της (1) γιατί:

$συν2x_0-ημ2x_0=συν2π-ημ2π$
$=1-0$
$=1.$

$f(π)=ημ2π+2συν^2 2π$
$=0+2$
$=2.$

Άρα A(π,2).

- κ=5. Τότε (2) $\Rightarrow 4x_0=5π$
  $\Rightarrow x_0=5π/4.$

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:

$συν2x_0-ημ2x_0=συν(5π/2)-ημ(5π/2)$
$=0-1$
$=-1.$

- κ=6. Τότε (2) $\Rightarrow 4x_0=6π$
  $\Rightarrow x_0=3π/2.$

Απορρίπτεται λόγω της (1) γιατί:

$συν2x_0-ημ2x_0=συν(3π)-ημ(3π)$
$=-1-0$
$=-1.$

- κ=7. Τότε (2) $\Rightarrow 4x_0=7π$
  $\Rightarrow x_0=7π/4.$

Δεκτή λόγω της (1) γιατί:

$συν2x_0-ημ2x_0=συν(7π/2)-ημ(7π/2)$
$=0-(-1)$
$=1$

$f(7π/4)=ημ(7π/2)+2συν^2(7π/2)$
$=-1+0$

=-1.

Άρα Α(7π/4,-1).

28) Υπολογίστε τα α,β∈R, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{x^2+x+1}{2x}$ και g(x)=x²+αx+β, να έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, κάθετη στην ευθεία (δ): 2x-3y+5=0.

Λύση: $\lambda_\delta=-\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$.

Άρα αν (ε) η κοινή εφαπτομένη, τότε $\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{2}$.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)2x-2(x^2+x+1)}{4x^2}=\frac{2x^2-2}{4x^2}.$$

g΄(x)=2x+α.

$f'(x_0)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow =\frac{2x_0^2-2}{4x_0^2}=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{1}{2}$.

- Αν $x_0=\frac{1}{2}$ τότε $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow$ 1+α=$-\frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow$ α=$-\frac{5}{2}$.

και $f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$ β=$\frac{11}{4}$.

- Αν $x_0=-\frac{1}{2}$ τότε $g'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow$ -1+α=$-\frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow$ α=$-\frac{1}{2}$.

και $f\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$ β=$-\frac{5}{4}$.

29) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄Ox.

Λύση: Αρκεί να βρούμε τα σημεία που οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης f΄(x)=0.

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'$$

$$=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'$$

$$=x^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}\cdot(1-\ln x)$$

$$=x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x).$$

f΄(x)=0 $\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x)$=0

$\Leftrightarrow$ 1-lnx=0

$\Leftrightarrow$ lnx=1

$\Leftrightarrow$ x=e.

$$f(e)=e^{\frac{1}{e}}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι $A\left(e,e^{\frac{1}{e}}\right)$.

30) Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$, x>1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (δ): x-y+5=0.

Λύση: $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$

$\Leftrightarrow f(x)\ln x=x-f(x)$ δσδφ

$\Leftrightarrow f(x)(1+\ln x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+\ln x}\right)'=\frac{1+\ln x-x\frac{1}{x}}{1+\ln x}$$

$$=\frac{\ln x}{1+\ln x}\ \text{-1}$$

Εάν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (δ): x-y+5=0, πρέπει και αρκεί f΄(x)=1, το οποίο δεν μπορεί να γίνει γιατί $f'(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}<1$.

31) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ και $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

Λύση: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}$

$$=\left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0}$$

$$=e^x\Big|_{x=0}$$

$=e^0=1.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}$$

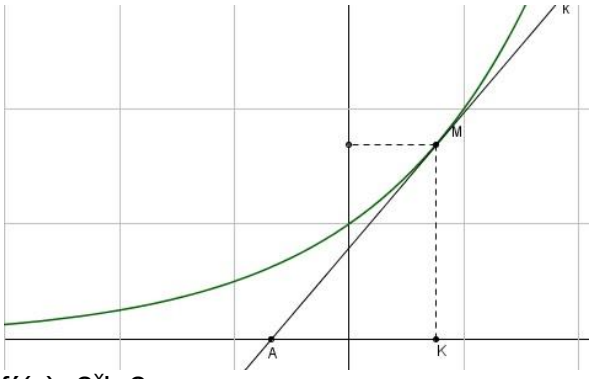
$$=\frac{d(\ln x)}{dx}\Big|_{x=1}$$

$$=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}$$

$=1.$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x$. Αν η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ τέμνει τον άξονα xOx΄ στο Α, να δείξετε ότι η προβολή του ΜΑ στον άξονα xOx΄ έχει σταθερό μήκος.

Λύση: Φέρνουμε ΜΚ ⊥ x΄Ox (σχ,ημα).
Η προβολή του ΜΑ στον άξονα xx΄ είναι το ΑΚ.



$f'(x)=2^x\ln 2.$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-2^{x_0}=2^{x_0}\ln 2(x-x_0)$

η οποία για y=0 δίνει $x=\dfrac{x_0\ln 2-1}{\ln 2}$.

Άρα $K(x_0,0)$ και $A\left(\dfrac{x_0\ln 2-1}{\ln 2},0\right)$

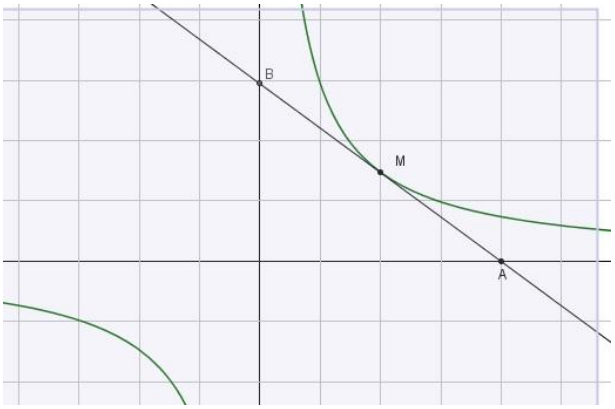
Επομένως $(AK)=\left|\dfrac{x_0\ln 2-1}{\ln 2}-x_0\right|$

$=\left|-\dfrac{1}{\ln 2}\right|=\dfrac{1}{\ln 2}$ =σταθ.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a}{x}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε τυχαίο σημείο της Μ, τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β, να δείξετε ότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Λύση: Εάν $M(x_0,f(x_0))$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Μ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$\Leftrightarrow\ y-\frac{a}{x_0}=-\frac{a}{x_0^2}(x-x_0)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



$(1)\overset{y=0}{\Rightarrow}\ x=2x_0$, άρα $A(2x_0,0)$

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}\ y=\dfrac{2a}{x_0}$, άρα $B\left(0,\dfrac{2a}{x_0}\right)$

Είναι $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2x_0+0}{2}=x_0=x_M$

και $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{0+\dfrac{2a}{x_0}}{2}=\dfrac{a}{x_0}=y_M$,

επομένως το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

34) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $c(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$s(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $t(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{s(x)}{c(x)}$ και

$\sigma(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{c(x)}{s(x)}$, $x\in R$. Να δείξετε ότι:

i) s(0)=0, c(0)=1, t(0)=0.
ii) s(-x)=-s(x) και c(-x)=c(x)
iii) t(-x)=-t(x) και σ(-x)=-σ(x)
iv) $c^2(x)-s^2(x)=1$
v) $c(x)+s(x)=e^x$, $c(x)-s(x)=e^{-x}$
vi) c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)
vii) c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)
viii) s(x+y)=s(x)c(y)+c(x)s(y)
ix) s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)
x) $t(x+y)=\dfrac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}$
xi) $t(x-y)=\dfrac{t(x)-t(y)}{1-t(x)t(y)}$
xii) $c(x)+c(y)=2c\left(\dfrac{x+y}{2}\right)c\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
xiii) $c(x)-c(y)=2s\left(\dfrac{x+y}{2}\right)s\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
xiv) $c(2x)=c^2(x)+s^2(x)$

xv) s(2x)=2s(x)c(x)

xvi) $t(2x)=\dfrac{2t(x)}{1+t^2(x)}$

xvii) $c(2x)=\dfrac{1+t^2(x)}{1-t^2(x)}$

xviii) $c(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

xix) $s(x)=\dfrac{t(x)}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

<u>Για την παράγωγο των παραπάνω συναρτήσεων ισχύουν τα:</u>

i) c΄(x)=s(x) και s΄(x)=c(x)

ii) t΄(x)=$1/c^2(x)$=1-t^2(x)

iii) σ΄(x)=-$1/s^2(x)$=1-σ^2(x)

<u>Λύση</u>:

i) $s(0)=\dfrac{e^0-e^{-0}}{2}=0.$

$$c(0)=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

$$t(0)=\frac{s(0)}{c(0)}=\frac{0}{1}=0$$

ii) $s(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-s(x)$

$$c(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=c(x)$$

iii) $t(-x)=\dfrac{s(-x)}{c(-x)}=\dfrac{-s(x)}{c(x)}=-t(x)$

$$\sigma(-x)=\frac{c(-x)}{s(-x)}=\frac{c(x)}{-s(x)}=-\sigma(x)$$

iv) $c^2(x)-s^2(x)=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+2+\cancel{e^{-2x}}-\cancel{e^{2x}}+2-\cancel{e^{-2x}}}{4}$$

$$=\frac{4}{4}=1.$$

v) c(x)+s(x)= $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{e^x+\cancel{e^{-x}}+e^x-\cancel{e^{-x}}}{2}$$

$$=\frac{2e^x}{2}=e^x.$$

c(x)-s(x)= $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{\cancel{e^x}+e^{-x}-\cancel{e^x}+e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{2e^{-x}}{2}=e^{-x}.$$

vi) c(x)c(y)+s(x)s(y)=

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\frac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{y-x}}+e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{y-x}}+e^{-x-y}}{4}$$

$$=\frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}$$

= c(x+y).

vii) c(x)c(y)-s(x)s(y)=

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{e^{x+y}}+e^{x-y}+e^{y-x}+\cancel{e^{-x-y}}}{4}-\frac{\cancel{e^{x+y}}-e^{x-y}-e^{y-x}+\cancel{e^{-x-y}}}{4}$$

$$=\frac{2e^{x-y}+2e^{y-x}}{4}$$

$$=\frac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}$$

= c(x-y).

viii) s(x)c(y)+c(x)s(y)=

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\frac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{y-x}}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{y-x}}-e^{-x-y}}{4}$$

$$=\frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}$$

$$=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$$

= s(x+y).

ix) s(x)c(y)-c(x)s(y)=

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{e^{x+y}}+e^{x-y}-e^{y-x}-\cancel{e^{-x-y}}}{4}-\frac{\cancel{e^{x+y}}-e^{x-y}+e^{y-x}-\cancel{e^{-x-y}}}{4}$$

$$=\frac{2e^{x-y}-2e^{y-x}}{4}$$

$$=\frac{e^{x-y}-e^{y-x}}{2}$$

= s(x-y).

x) $\dfrac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}=\dfrac{\dfrac{s(x)}{c(x)}+\dfrac{s(y)}{c(y)}}{1+\dfrac{s(x)}{c(x)}\dfrac{s(y)}{c(y)}}$

$$=\frac{\dfrac{s(x)c(y)+s(y)c(x)}{\cancel{c(x)c(y)}}}{\dfrac{c(x)cy)+s(x)s(y)}{\cancel{c(x)c(y)}}}$$

$$=\frac{s(x+y)}{c(x+y)}$$

=t(x+y).

xi) $$\frac{t(x)-t(y)}{1-t(x)t(y)}=\frac{\dfrac{s(x)}{c(x)}-\dfrac{s(y)}{c(y)}}{1-\dfrac{s(x)}{c(x)}\dfrac{s(y)}{c(y)}}$$

$$=\frac{\dfrac{s(x)c(y)-s(y)c(x)}{\cancel{c(x)c(y)}}}{\dfrac{c(x)cy)-s(x)s(y)}{\cancel{c(x)c(y)}}}$$

$$=\frac{s(x-y)}{c(x-y)}$$

=t(x-y).

xii) $\left.\begin{array}{l}c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)\\ c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)\end{array}\right\}$ +

c(x+y)+c(x-y)=2c(x)c(y)……(1)

Θέτω x+y=A και x-y=B.

Τότε c(x)c(y)-s(x)s(y)

$\left.\begin{array}{l}x+y=A\\ x-y=B\end{array}\right\}$ +

2x=A+B $\Leftrightarrow$ x=$\frac{A+B}{2}$ και

$\left.\begin{array}{l}x+y=A\\ x-y=B\end{array}\right\}$ -

2y=A-B $\Leftrightarrow$ y=$\frac{A-B}{2}$ οπότε η (1) γίνε-

ται $c(A)+c(B)=2c\left(\frac{A+B}{2}\right)c\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

xiii) $\left.\begin{array}{l}c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)\\ c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)\end{array}\right\}$ -

c(x+y)-c(x-y)=2s(x)s(y)……(1)

Θέτω x+y=A και x-y=B.

Τότε c(x)c(y)-s(x)s(y)

$\left.\begin{array}{l}x+y=A\\ x-y=B\end{array}\right\}$ +

2x=A+B $\Leftrightarrow$ x=$\frac{A+B}{2}$ και

$\left.\begin{array}{l}x+y=A\\ x-y=B\end{array}\right\}$ -

2y=A-B $\Leftrightarrow$ y=$\frac{A-B}{2}$ οπότε η (1) γίνε-

ται $c(A)-c(B)=2s\left(\frac{A+B}{2}\right)s\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

xiv) $c^2(x)+s^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$$=\frac{e^{2x}+\cancel{2}+e^{-2x}+e^{2x}-\cancel{2}+e^{-2x}}{4}$$

$$=\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{4}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$ =c(2x).

xv) $2s(x)c(x)=\cancel{2}\frac{e^x-e^{-x}}{\cancel{2}}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$ =s(2x).

xvi) $t(2x)=t(x+x)$

$$=\frac{t(x)+t(x)}{1+t(x)t(x)}$$

$$=\frac{2t(x)}{1+t^2(x)}.$$

xvii) $$\frac{1+t^2(x)}{1-t^2(x)}=\frac{1+\dfrac{s^2(x)}{c^2(x)}}{1-\dfrac{s^2(x)}{c^2(x)}}$$

$$=\frac{\dfrac{c^2(x)+s^2(x)}{\cancel{c^2(x)}}}{\dfrac{c^2(x)-s^2(x)}{\cancel{c^2(x)}}}$$

$$=\frac{c(2x)}{1}=c(2x).$$

xviii) $$\frac{1}{\sqrt{1-t^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{s^2(x)}{c^2(x)}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{c^2(x)-s^2(x)}{c^2(x)}}}$$

$$=\frac{c(x)}{\sqrt{c^2(x)-s^2(x)}}$$

$$=\frac{c(x)}{\sqrt{1}}$$ =c(x).

xix) $$\frac{t(x)}{\sqrt{1-t^2(x)}}=\frac{\dfrac{s(x)}{c(x)}}{\sqrt{1-\dfrac{s^2(x)}{c^2(x)}}}$$

$$=\frac{\frac{s(x)}{c(x)}}{\sqrt{\frac{c^2(x)-s^2(x)}{c^2(x)}}}$$

$$=\frac{\frac{s(x)}{\cancel{c(x)}}}{\frac{1}{\cancel{c(x)}}}=s(x).$$

Για τις παραγώγους:

i) $c'(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}(-x)'}{2}$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$=s(x).$

$$s'(x)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}(-x)'}{2}$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$=c(x).$

ii) $t'(x)=\left(\frac{s(x)}{c(x)}\right)'=\frac{s'(x)c(x)-s(x)c'(x)}{c^2(x)}$

$$=\frac{c(x)c(x)-s(x)s(x)}{c^2(x)}$$

$$=\frac{c^2(x)-s^2(x)}{c^2(x)}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{c^2(x)}\\ \frac{c^2(x)}{c^2(x)}-\frac{s^2(x)}{c^2(x)}=1-t^2(x)\end{cases}.$$

iii) $\sigma'(x)=\left(\frac{c(x)}{s(x)}\right)'=\frac{c'(x)s(x)-c(x)s'(x)}{s^2(x)}$

$$=\frac{s(x)s(x)-c(x)c(x)}{s^2(x)}$$

$$=\frac{s^2(x)-c^2(x)}{c^2(x)}$$

$$=-\frac{c^2(x)-s^2(x)}{s^2(x)}$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{s^2(x)}\\ \frac{s^2(x)}{s^2(x)}-\frac{c^2(x)}{s^2(x)}=1-\sigma^2(x)\end{cases}.$$

41)…