ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 14-21

14. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

14.1) $\int_3^{e+2} \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx$

14.2) $\int_0^1 \frac{2x-1}{x-2}dx$

14.3) $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi^3 x dx$

14.4) $\int_0^{\frac{c(e-1)}{e+1}} \frac{dx}{c^2-x^2}$, x∈R.

14.5) $\int_3^{e+2} \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

14.6) $\int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-x-2}dx$

14.7) $\int_2^{e+1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}dx$

14.8) $\int_2^{e} \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

14.9) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$

14.10) $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$

14.11) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1}dx$

14.12) $\int_1^{e-1} \frac{2-x}{x^2+x}dx$

14.13) $\int_1^{e-2} \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx$

Λύση:

14.1. $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x^2-4)}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{\Gamma}{x+2}\Leftrightarrow$

$4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+\Gamma x(x-2)$……(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ -8=-4^A ⇔ A=2

$(1)\overset{x=2}{\Rightarrow}$ 40=8B ⇔ B=5

$(1)\overset{x=-2}{\Rightarrow}$ -24=8Γ ⇔ Γ=-3

Άρα $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}$

και $\int_3^{e+2}\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx=\int_3^{e+2}\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx=2\int_3^{e+2}\frac{1}{x}dx+5\int_3^{e+2}\frac{1}{x-2}dx-3\int_3^{e+2}\frac{1}{x+2}dx=$

$=\left[2\ln x+5\ln(x-2)-3\ln(x+2)\right]_3^{e+2}$=…=$\ln\frac{125e^5(e+2)^2}{9(e+4)^3}$.

14.2. $\int_0^1\frac{2x-1}{x-2}dx=\int_0^1\frac{2x-4+3}{x-2}dx=\int_0^1\frac{2(x-2)+3}{x-2}dx=\int_0^1\frac{2(x-2)}{x-2}dx+\int_0^1\frac{3}{x-2}dx=2\int_0^1 dx+3\int_0^1\frac{1}{x-2}dx=$

=2+$3\left[\ln|x-2|\right]_0^1$ =2-3ln2.

14.3. I=$\int_0^{\pi/4}\varepsilon\phi^3 x dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\eta\mu x dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\eta\mu x dx$.

Θέτω συνx=y. Τότε (συνx)΄dx=dy ⇔ ημxdx=-dy και:

- όταν x=0 τότε y=συν0=1.
- όταν x=$^{\pi}/_4$ τότε y=συν$^{\pi}/_4$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$I=-\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{1-y^2}{y^3}dy=\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{y^2-1}{y^3}dy=\int_1^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{y^2}{y^3}-\frac{1}{y^3}\right)dy=\int_1^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1}{y}-y^{-3}\right)dy=\left[\ln y-\frac{y^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=$$

$$=\left[\ln y+\frac{1}{2y^2}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=\ldots=\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

14.4. $\dfrac{1}{c^2-x^2}\,\dfrac{1}{(c-x)(c+x)}=\dfrac{A}{c-x}+\dfrac{B}{c+x}\Leftrightarrow$ 1=A(c-x)+B(c+x)……(1)

(1) $\overset{x=c}{\Rightarrow}$ 1=2cA $\Leftrightarrow$ A=$\dfrac{1}{2c}$.

(1) $\overset{x=-c}{\Rightarrow}$ 1=2cB $\Leftrightarrow$ B=$\dfrac{1}{2c}$.

Άρα $\dfrac{1}{c^2-x^2}=\dfrac{1/2c}{c-x}+\dfrac{1/2c}{c+x}$

και $\displaystyle\int_0^{\frac{c(e-1)}{e+1}}\frac{dx}{c^2-x^2}dx=\frac{1}{2c}\int_0^{\frac{c(e-1)}{e+1}}\left(\frac{1}{c-x}+\frac{1}{c+x}\right)dx=\frac{1}{2c}\Big[-\ln(c-x)+\ln(c+x)\Big]_0^{\frac{c(e-1)}{e+1}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2c}\left[\ln\frac{c+x}{c-x}\right]_0^{\frac{c(e-1)}{e+1}}=\ldots=\frac{1}{2c}$.

14.5. Κάνουμε την διαίρεση (x^5+x^4-8):(x^3-4x)

$\cancel{x^5}+x^4-8$	x^3-4x
$-\cancel{x^5}+4x^3$	x^2+x+4
$\cancel{x^4}+4x^3-8$	
$-\cancel{x^4}+4x^2$	
$\cancel{4x^3}+4x^2-8$	
$-\cancel{4x^3}+16x$	
$4x^2+16x-8$	

Από ταυτότητα διαίρεσης Δ(x)=δ(x)π(x)+υ(x) έχουμε:
$x^5+x^4-8=(x^3-4x)(x^2+x+4)+(4x^2+16x-8)\Leftrightarrow$
$\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$
Άρα

Άσκηση 13.1

$\displaystyle\int_3^{e+2}\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int_3^{e+2}\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=\int_3^{e+2}x^2dx+\int_3^{e+2}xdx+4\int_3^{e+2}dx+\int_3^{e+2}\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx=$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^{e+2}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{e+2}+e-3+\ln\frac{125e^5(e+2)^2}{9(e+4)^3}=\frac{(e+2)^3}{3}+\frac{(e+2)^2}{2}+e-14+\ln\frac{125e^5(e+2)^2}{9(e+4)^3}$.

14.6. $\dfrac{2x-3}{x^2-x-2}=\dfrac{2x-3}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+1}\Leftrightarrow$ 2x-3=A(x+1)+B(x-2)……(1)

(1) $\overset{x=-1}{\Rightarrow}$ -5=-3B $\Leftrightarrow$ B=$^5/_3$.

(1) $\overset{x=2}{\Rightarrow}$ 1=3A $\Leftrightarrow$ A=$^1/_3$.

Άρα $\dfrac{2x-3}{x^2-x-2}=\dfrac{1/3}{x-2}+\dfrac{5/3}{x+1}$

και $\displaystyle\int_0^1\frac{2x-3}{x^2-x-2}dx=\int_0^1\left(\frac{1/3}{x-2}+\frac{5/3}{x+1}\right)dx=\tfrac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x-2}dx+\tfrac{5}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\tfrac{1}{3}\big[\ln|x-2|\big]_0^1+\tfrac{5}{3}\big[\ln|x+1|\big]_0^1=$

$=-\tfrac{1}{3}\ln 2+\tfrac{5}{3}\ln 2=\tfrac{4}{3}\ln 2$.

14.7. $\displaystyle\int_2^{e+1}\frac{x-3}{x^2-2x+1}dx=\int_2^{e+1}\frac{x-1-2}{(x-1)^2}dx=\int_2^{e+1}\frac{x-1}{(x-1)^2}dx-2\int_2^{e+1}\frac{1}{(x-1)^2}dx=\int_2^{e+1}\frac{1}{x-1}dx-2\int_2^{e+1}\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}dx=$

$\displaystyle=\left[\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}\right]_2^{e+1}=\frac{2}{e}$.

14.8. $\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{1}{x(x^2-2x+1)}=\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{\Gamma}{(x-1)^2}\Leftrightarrow$

$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+\Gamma x$……(1)

$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ A=1.

$(1) \overset{x=1}{\Rightarrow}$ Γ=1.

$(1) \overset{x=2}{\Rightarrow}$ A+2B+2Γ=1 ⇔ B=-1 γιατί A=1 και Γ=1.

Άρα $\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

και $\displaystyle\int_2^e \frac{dx}{x^3-2x^2+x}=\int_2^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\int_2^e\frac{1}{x}dx-\int_2^e\frac{1}{x-1}dx+\int_2^e\frac{1}{(x-1)^2}dx=$

$\displaystyle=\int_2^e\frac{1}{x}dx-\int_2^e\frac{1}{x-1}dx+\int_2^e\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}dx\left[\ln x-\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\right]_2^e$=2-ln2-ln(e-1)- $\dfrac{1}{e-1}$.

14.9. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$ ⇔ 1=A(x-3)+B(x-2)……..……(1)

$(1) \overset{x=3}{\Rightarrow}$ B=1.

$(1) \overset{x=2}{\Rightarrow}$ A=-1.

Άρα $\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$

και $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int_0^1\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\left[\ln|x-3|-\ln|x-2|\right]_0^1=\left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_0^1$=…=$\ln\frac{4}{3}$.

14.10. $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{\Gamma}{(x+1)^2}$ ⇔ x=A(x+1)^2+B(x^2-1)+Γ(x-1)……(1)

$(1) \overset{x=1}{\Rightarrow}$ A=$^1/_4$, $(1) \overset{x=-1}{\Rightarrow}$ Γ=$^1/_2$ και $(1) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ A-B-Γ=0 ⇔ B=-$^1/_4$ γιατί A=$^1/_4$ και Γ=$^1/_2$.

Άρα $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{1/4}{x-1}-\dfrac{1/4}{x+1}+\dfrac{1/2}{(x+1)^2}$

και $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=\int_0^{1/2}\left(\frac{1/4}{x-1}-\frac{1/4}{x+1}+\frac{1/2}{(x+1)^2}\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{(x+1)^2}dx=$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}dx==\left[\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}\right]_0^{1/2}=$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x+1)}\right]_0^{1/2}=\ldots=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\ln 3$.

14.11. $\dfrac{x-1}{x^3+1}=\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+\Gamma}{x^2-x+1}$ ⇔ x-1=A(x^2-x+1)+(Bx+Γ)(x+1)……(1)

$$\left.\begin{array}{l}(1) \overset{x=1}{\Rightarrow} 0=A+2B+2\Gamma\\ (1) \overset{x=-1}{\Rightarrow} A=-{}^2/_3\\ (1) \overset{x=0}{\Rightarrow} -1=A+\Gamma\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}A=-{}^2/_3\\ B={}^2/_3\\ \Gamma=-{}^1/_3\end{array}\right.$$

Άρα $\dfrac{x-1}{x^3+1}=\dfrac{-2/3}{x+1}+\dfrac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

και $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1}dx = -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = -\frac{2}{3}\left[\ln(x+1)\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx =$

$= -\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\ln 2$.

14.12. $\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow$ 2-x=A(x+1)+Bx……(1)

$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ A=2.

$(1) \overset{x=-1}{\Rightarrow}$ B=-3.

Άρα $\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+1}$ και $\int_1^{e-1} \frac{2-x}{x^2+x}dx = \int_1^{e-1}\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1}\right)dx = \left[2\ln x - 3\ln(x+1)\right]_1^{e-1}$ αφα

14.13. I= $\int_1^{e-2} \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx = \int_1^{e-2} \frac{x^3+2x^2+4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx = \int_1^{e-2}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^3+2x^2} + \frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}\right)dx =$

$= \int_1^{e-2}\left(1 + \frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}\right)dx = \int_1^{e-2} dx + \int_1^{e-2} \frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx = e-3+\int_1^{e-2} \frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx$ ……(1)

$\frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2} = \frac{4x^2+3x+6}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow$ $4x^2+3x+6=A(x+2)+Bx^2$……(2)

$(2) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ A=3.

$(2) \overset{x=-2}{\Rightarrow}$ B=4.

Άρα $\frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2} = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x+2}$ και $\int_1^{e-2} \frac{4x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx = \int_1^{e-2}\left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x+2}\right)dx = \left[4\ln(x+2) - \frac{3}{x}\right]_1^{e-2} =$

$= 4\ln\frac{e}{3} + \frac{3e-9}{e-2}$.

Επομένως η (1) $\Rightarrow$ $\mathrm{I} = e-3+4\ln\frac{e}{3} + \frac{3e-9}{e-2} = e - \frac{3}{e-2} + 4\ln\frac{e}{3}$.

15. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

15.1) $\int_{\frac{8}{7}}^{\frac{27}{26}} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\frac{1}{x(x-1)}dx$

15.2) $\int_{-\frac{1}{7}}^{-\frac{1}{26}} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\frac{1}{x(x-1)}dx$

15.3) $\int_2^5 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

15.4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

15.5) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1}}$

15.6) $\int_0^{14/9} \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

Λύση:

15.1. Θέτω $y = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \Leftrightarrow y^3 = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow$ $xy^3-y^3=x \Leftrightarrow xy^3-x=y^3 \Leftrightarrow x(y^3-1)=y^3 \Leftrightarrow$ $x = \frac{y^3}{y^3-1}$ …….(1)

$dx = \left(\frac{y^3}{y^3-1}\right)' dy \Leftrightarrow$ …$\Leftrightarrow dx = -\frac{3y^2}{(y^3-1)^2}dy$ ……(2)

Όταν $x = \frac{8}{7}$ τότε $y = \sqrt[3]{\frac{\frac{8}{7}}{\frac{8}{7}-1}} = \sqrt[3]{8} = 2$ και όταν $x = \frac{27}{26}$ τότε $y = \sqrt[3]{\frac{\frac{27}{26}}{\frac{27}{26}-1}} = \sqrt[3]{27} = 3$ ……(3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\int_{\frac{8}{7}}^{\frac{27}{26}} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1}{x(x-1)} dx = -\int_2^3 y \cdot \frac{1}{\frac{y^3}{y^3-1}\left(\frac{y^3}{y^3-1}-1\right)} \frac{3y^2}{(y^3-1)^2} dy = ... = -\int_2^3 dy = -1.$$

15.2. Θέτω $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow y^3 = \frac{x-1}{x}$ $\Leftrightarrow$ $xy^3=x-1$ $\Leftrightarrow$ $x-xy^3=1$ $\Leftrightarrow$ $x(1-y^3)=1$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{1-y^3}$ ……..(1)

$dx = \left(\frac{1}{1-y^3}\right)' dy \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow dx = \frac{3y^2}{(1-y^3)^2} dy$ ……(2)

Όταν $x = -\frac{1}{7}$ τότε $y = \sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{7}-1}{-\frac{1}{7}}} = \sqrt[3]{8} = 2$ και όταν $x = -\frac{1}{26}$ τότε $y = \sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{26}-1}{-\frac{1}{26}}} = \sqrt[3]{27} = 3$ …..(3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\int_{-\frac{1}{7}}^{-\frac{1}{26}} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_2^3 y \cdot \frac{1}{\frac{1}{1-y^3}\left(\frac{1}{1-y^3}-1\right)} \frac{3y^2}{(1-y^3)^2} dy = ... = \int_2^3 dy = 1.$$

15.3. Θέτω $y = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow y^2=x-1 \Leftrightarrow x=y^2+1$ ……...……..(1)

$dx=2ydy$……..……..…(2)

Όταν x=2 τότε y=1 και όταν x=5 τότε y=2……..(3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\int_2^5 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{(y^2+1)^3}{y} 2ydy = 2\int_1^2 (y^2+1)^3 dy = 2\int_1^2 (y^6+3y^4+3y^2+1)dy =$$

$$= .\left[2\frac{y^7}{7} + 6\frac{y^5}{5} + 6\frac{y^3}{3} + 2y\right]_1^2 = ... = \frac{3.132}{35}.$$

15.4. Θέτω $\sqrt{1+x^2} = t - x$ $\Leftrightarrow$ $(t-x)^2=1+x^2$ $\Leftrightarrow$ $t^2-2tx+x^2=1+x^2$ $\Leftrightarrow$ $2tx=t^2-1$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{t^2-1}{2t}$ ……..(1)

$dx = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)' dt = ... = \frac{t^2+1}{2t^2} dt$ ……..……..…(2)

Όταν x=0 τότε t=1 και όταν x=1 τότε t=1+$\sqrt{2}$ ……..(3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{t - \frac{t^2-1}{2t}} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = ... = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^{1+\sqrt{2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

15.5. Θέτω $\sqrt{x+1} = t$ $\Leftrightarrow$ $t^2=1+x$ $\Leftrightarrow$ $x= t^2-1$……...……..(1)

$dx=2tdt$……..……..…(2)

Όταν x=3 τότε t=2 και όταν x=8 τότε t=3……...……..(3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t^3-t} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t(t^2-1)} = 2\int_2^3 dt = 2(3-2)=2.$$

15.6. Θέτω $y = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \Leftrightarrow y^3 = \frac{2-x}{2+x}$ $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ $x = 2\frac{1-y^3}{1+y^3}$ ……..(1)

$dx = \left(\frac{1-y^3}{1+y^3}\right)' dy \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow dx = -\frac{12y^2}{(1+y^3)^2} dy$ ……(2)

Όταν x=0 τότε y=1 και όταν x=$^{14}/_{9}$ τότε y=2 ……..(3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\int_0^{14/9} \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = -\int_1^2 \frac{2}{\left(2-2\frac{1-y^3}{1+y^3}\right)^2} y \frac{12y^2}{(1+y^3)^2}dy = -\int_1^2 \frac{24y^3}{4\left(1-\frac{1-y^3}{1+y^3}\right)^2(1+y^3)^2}dy =$$

$$= -6\int_1^2 \frac{y^3}{\left(2y^3\right)^2}dy = -6\int_1^2 \frac{y^3}{4y^6}dy = -\frac{6}{4}\int_1^2 \frac{1}{y^3}dy = -\frac{3}{2}\int_1^2 y^{-3}dy = -\frac{3}{2}\left[\frac{y^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^2 = \ldots = -\frac{9}{16}.$$

16. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

16.1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{10}x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

16.2) $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \eta\mu^4 3x\sigma\upsilon\nu^2 3x dx$

16.3) $\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^5\phi d\phi$

16.4) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sigma\upsilon\nu^5\chi}{\sqrt[3]{\eta\mu\chi}}d\chi$

16.5) $\int_{7\pi/4}^{2\pi} \frac{\eta\mu^5 y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}dy$

16.6) $\int_{\pi}^{3\pi/2} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx$

16.7) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$

16.8) $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

16.9) $\int_{\pi/2}^{\pi} \eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

16.10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

Λύση:

16.1. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{10}x\sigma\upsilon\nu^3 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{10}x\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{10}x(1-\eta\mu^2 x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx.$

Θέτω ημx=w. Τότε (ημx)΄dx=dw ⇒ συνxdx=dw και:

- όταν x=-$^{\pi}/_{2}$ τότε w=ημ(-$^{\pi}/_{2}$)=-ημ$^{\pi}/_{2}$=-1
- όταν x=$^{\pi}/_{2}$ τότε w=ημ $^{\pi}/_{2}$ =1.

Άρα $I=\int_{-1}^{1} w^{10}(1-w^2)dw = \int_{-1}^{1}\left(w^{10}-w^{12}\right)dw = \left[\frac{w^{11}}{11}-\frac{w^{13}}{13}\right]_{-1}^{1} = \ldots = \frac{4}{143}.$

16.2. $I=\int_{\pi/2}^{\pi/3} \eta\mu^4 3x\sigma\upsilon\nu^2 3x dx = \int_{\pi/2}^{\pi/3}\left(\eta\mu^2 3x\right)^2\sigma\upsilon\nu^2 3x dx = \int_{\pi/2}^{\pi/3}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 6x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu 6x}{2}dx =$

$$= \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}(1-\sigma\upsilon\nu 6x)^2(1+\sigma\upsilon\nu 6x)dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}(1-\sigma\upsilon\nu^2 6x)(1-\sigma\upsilon\nu 6x)dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu^2 6x\cdot(1-\sigma\upsilon\nu 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\left(\eta\mu^2 6x-\eta\mu^2 6x\sigma\upsilon\nu 6x\right)dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu^2 6x dx - \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu^2 6x\sigma\upsilon\nu 6x dx.$$

Υπολογίζουμε τα δυο ολοκληρώματα ξεχωριστά:

☛ $\frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu^2 6x dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 12x}{2}dx = \frac{1}{16}\int_{\pi/2}^{\pi/3}dx - \frac{1}{16}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\sigma\upsilon\nu 12x dx =$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{16}\left[\frac{1}{12}\eta\mu 12x\right]_{\pi/2}^{\pi/3} = -\frac{\pi}{96} - \frac{1}{192}\left[\eta\mu 12x\right]_{\pi/2}^{\pi/3} = \ldots = -\frac{\pi}{96}.$$

☛ Θέτω ημ6x=w. Τότε (ημ6x)΄dx=dw ⇒ 6συν6xdx=dw ⇒ συν6xdx=$\frac{1}{6}$ dw και:

- όταν x=$^{\pi}/_{2}$ τότε w=ημ$^{6\pi}/_{2}$=ημ3π=0.
- όταν x=$^{\pi}/_{3}$ τότε w=ημ $^{6\pi}/_{3}$ =ημ2π=0.

Άρα $-\frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu^2 6x\sigma\upsilon\nu 6x dx=-\frac{1}{8}\int_0^0\frac{1}{6}w^2 dw$=0.

Επομένως I=$-\frac{\pi}{96}$.

16.3. I=$\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^5\phi d\phi=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^4\phi\cdot\sigma\upsilon\nu\phi d\phi=\int_0^{\pi/2}\left(\sigma\upsilon\nu^2\phi\right)^2\cdot\sigma\upsilon\nu\phi d\phi=\int_0^{\pi/2}\left(1-\eta\mu^2\phi\right)^2\cdot\sigma\upsilon\nu\phi d\phi$.

Θέτω ημφ=w. Τότε (ημφ)΄dφ=dw ⇒ συνφdφ=dw και:

- όταν φ=$^{\pi}/_2$ τότε w=ημ$^{\pi}/_2$=1.
- όταν φ=0 τότε w=ημ0=0.

Άρα I=$\int_0^1\left(1-w^2\right)^2 dw=\int_0^1\left(1-2w^2+w^4\right)dw=\left[w-2\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}\right]_0^1=...=\frac{8}{15}$.

16.4. I=$\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu^5\chi}{\sqrt[3]{\eta\mu\chi}}d\chi=\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu^4\chi}{\sqrt[3]{\eta\mu\chi}}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)^2}{\sqrt[3]{\eta\mu\chi}}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{\left(1-\eta\mu^2\chi\right)^2}{\sqrt[3]{\eta\mu\chi}}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi$.

Θέτω ημχ=w. Τότε (ημχ)΄dχ=dw ⇒ συνχdχ=dw και:

- όταν χ=$^{\pi}/_2$ τότε w=ημ$^{\pi}/_2$=1.
- όταν χ=$^{3\pi}/_4$ τότε w=ημ$^{3\pi}/_4$=$\sqrt{2}/2$.

Άρα I=$\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{\left(1-w^2\right)^2}{\sqrt[3]{w}}dw=\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{\left(1-2w^2+w^4\right)}{w^{1/3}}dw=\int_1^{\sqrt{2}/2}\left(w^{-\frac{1}{3}}-2w^{2-\frac{1}{3}}+w^{4-\frac{1}{3}}\right)dw=$

$=\int_1^{\sqrt{2}/2}\left(w^{-\frac{1}{3}}-2w^{\frac{5}{3}}+w^{\frac{11}{3}}\right)dw=\left[\frac{w^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}-2\frac{w^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}+\frac{w^{\frac{11}{3}+1}}{\frac{11}{3}+1}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=\left[\frac{3}{2}w^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}w^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{14}w^{\frac{14}{3}}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{14}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{14}{3}}-\frac{27}{28}$.

16.5. I=$\int_{7\pi/4}^{2\pi}\frac{\eta\mu^5 y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}dy=\int_{7\pi/4}^{2\pi}\frac{\eta\mu^4 y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}\eta\mu y dy=\int_{7\pi/4}^{2\pi}\frac{\left(\eta\mu^2 y\right)^2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}\eta\mu y dy=\int_{7\pi/4}^{2\pi}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 y\right)^2}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}\eta\mu y dy$.

Θέτω συνy=w. Τότε (συνy)΄dy=dw ⇒ -ημydy=dw ⇒ ημydy=-dw και:

- όταν y=$^{7\pi}/_4$ τότε w=συν$^{7\pi}/_4$=$\sqrt{2}/2$.
- όταν y=2π τότε w=συν2π=1.

Άρα I=$-\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\left(1-w^2\right)^2}{\sqrt{w}}dw=\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{\left(1-2w^2+w^4\right)}{w^{1/2}}dw=\int_1^{\sqrt{2}/2}\left(w^{-\frac{1}{2}}-2w^{2-\frac{1}{2}}+w^{4-\frac{1}{2}}\right)dw=$

$=\int_1^{\sqrt{2}/2}\left(w^{-\frac{1}{2}}-2w^{\frac{3}{2}}+w^{\frac{7}{2}}\right)dw=\left[\frac{w^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-2\frac{w^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{w^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=\left[2w^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{5}w^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{9}w^{\frac{9}{2}}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{9}{2}}-\frac{64}{45}$.

16.6. I=$\int_{\pi}^{3\pi/2}\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx=\int_{\pi}^{3\pi/2}\eta\mu^2 x\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{\pi}^{3\pi/2}\eta\mu^2 x\left(1-\eta\mu^2 x\right)^2\sigma\upsilon\nu x dx$.

Θέτω ημx=w. Τότε (ημx)΄dx=dw ⇒ συνxdx=dw και:

- όταν x=π τότε w=ημπ=0.
- όταν x=$^{3\pi}/_2$ τότε w=ημ$^{3\pi}/_2$=-1.

Άρα I=$\int_0^{-1}w^2\left(1-w^2\right)^2 dw=\int_0^{-1}w^2\left(1-2w^2+w^4\right)dw=\int_0^{-1}\left(w^2-2w^4+w^6\right)dw=\left[\frac{w^3}{3}-2\frac{w^5}{5}+\frac{w^7}{7}\right]_0^{-1}=...=-\frac{8}{105}$.

16.7. I= $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 x\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^2 dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1-\sigma\upsilon\nu 2x)(1+\sigma\upsilon\nu 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1-\sigma\upsilon\nu^2 2x)(1+\sigma\upsilon\nu 2x) dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 2x(1+\sigma\upsilon\nu 2x) dx =$

$= \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\eta\mu^2 2x + \eta\mu^2 2x\sigma\upsilon\nu 2x\right) dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 2x dx + \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 2x\sigma\upsilon\nu 2x dx.$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα δυο ολοκληρώματα:

☛ $\frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 2x dx = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 4x}{2} dx = \frac{1}{16}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} dx - \frac{1}{16}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma\upsilon\nu 4x dx = \frac{1}{16}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{64}\left[\eta\mu 4x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$

☛Θέτω ημ2x=w. Τότε (ημ2x)΄dx=dw ⇒ 2συν2xdx=dw ⇒ συν2xdx=$\frac{1}{2}$ dw και:

- όταν x=$^{\pi}/_{2}$ τότε w=ημπ=0.
- όταν x=$^{3\pi}/_{2}$ τότε w=ημ3π=0.

Άρα $\frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 2x\sigma\upsilon\nu 2x dx = \frac{1}{16}\int_{0}^{0} w^2 dw = 0.$

Επομένως I=$\frac{\pi}{16}$.

16.8. I=$\int_{0}^{\pi} \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_{0}^{\pi} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx = \int_{0}^{\pi} (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx.$

Θέτω συνx=w. Τότε (συνx)΄dx=dw ⇒ -ημxdx=dw ⇒ ημxdx=-dw και:

- όταν x=0^0 τότε w=συν0^0=1.
- όταν x=π τότε w=συνπ= -1.

Άρα $I = -\int_{1}^{-1} (1-w^2)w^2 dw = \int_{1}^{-1} (w^4 - w^2) dw = \left[\frac{w^5}{5} - \frac{w^3}{3}\right]_{-1}^{1} = ... = -\frac{4}{15}.$

16.9. I= $\int_{\pi/2}^{\pi} \eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu^3 x dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu^3 x dx = 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^4 x\eta\mu x dx.$

Θέτω συνx=w. Τότε (συνx)΄dx=dw ⇒ -ημxdx=dw ⇒ ημxdx=-dw και:

- όταν x=$^{\pi}/_{2}$ τότε w=συν $^{\pi}/_{2}$=0.
- όταν x=π τότε w=συνπ= -1.

Άρα $I = -2\int_{0}^{-1} w^4 dw = 2\int_{-1}^{0} w^4 dw = 2\left[\frac{w^5}{5}\right]_{-1}^{0} = ... = \frac{2}{5}$.

16.10. Η συνάρτηση f(x)=ημ^{2}xσυν^{3}x είναι άρτια στο [-$^{\pi}/_{2}$,$^{\pi}/_{2}$] γιατί f(-x)=ημ^2(-x)συν^3(-x)=(-ημx)^{2}συν^{3}x=

=ημ^{2}xσυν^{3}x=f(x). Άρα I= $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x(1-\eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu x dx.$

Θέτω ημx=w. Τότε (ημx)΄dx=dw ⇒ συνxdx=dw και:

- όταν x=0^0 τότε w=ημ0^0=0.
- όταν x=$^{\pi}/_{2}$ τότε w=ημ $^{\pi}/_{2}$=1.

Άρα $I = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} w^2(1-w^2) dw = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (w^2 - w^4) dw = 2\left[\frac{w^3}{3} - \frac{w^5}{5}\right]_{0}^{1} = ... = \frac{4}{15}.$

17. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

17.1) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x\eta\mu x dx$

17.2) $\int_{0}^{1} xe^x dx$

17.3) $\int_{1}^{e} x^\nu \ln x dx, \nu \in \mathrm{N}^*$

17.4) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \chi\sigma\upsilon\nu\chi d\chi$

17.5) $\int_{0}^{1} e^x x^2 dx$

17.6) $\int_{\pi/4}^{\pi} e^x \eta\mu x dx$

17.7) $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$

17.8) $\int_{e}^{e^2} \ln x dx$

17.9) $\int_{0}^{3} e^{3x} x^2 dx$

17.10) $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu 3x dx$

17.11) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x} dx$

17.12) $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x^3} dx$

17.13) $\int_{0}^{1} \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

Παρατήρηση: $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)'$

17.14) $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \eta\mu x \eta\mu 3x dx$

17.15) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{5x} \sigma\upsilon\nu 4x dx$

Λύσεις: *Στα επόμενα το σύμβολο «$\overset{\pi.o.}{=\!=}$» σημαίνει παραγοντική ολοκλήρωση.*

17.1. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x\eta\mu x dx = -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x(\sigma\upsilon\nu x)' dx = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} x(\sigma\upsilon\nu x)' dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \cancelto{0}{[x\sigma\upsilon\nu x]_{3\pi/2}^{\pi/2}} - \int_{3\pi/2}^{\pi/2} (x)'\sigma\upsilon\nu x dx$

$= -\int_{3\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2$.

17.2. $\int_{0}^{1} xe^x dx = \int_{0}^{1} x\left(e^x\right)' dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \left[xe^x\right]_0^1 - \int_{0}^{1} (x)'e^x dx = e - \int_{0}^{1} e^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = 1$.

17.3. $\int_{1}^{e} x^\nu \ln x dx = \int_{1}^{e} \left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)' \ln x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{\nu+1}\int_{1}^{e} x^{\nu+1}(\ln x)' dx = \frac{e^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+1}\int_{1}^{e} x^{\nu+1}\frac{1}{x} dx =$

$= \frac{e^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+1}\int_{1}^{e} x^\nu dx = \frac{e^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+1}\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_1^e = \frac{e^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{1}{(\nu+1)^2}\left[x^{\nu+1}\right]_1^e = \frac{\nu e^{\nu+1}+1}{(\nu+1)^2}$.

17.4. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \chi\sigma\upsilon\nu\chi d\chi \quad \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \chi(\eta\mu\chi)' d\chi \overset{\pi.o.}{=\!=} [\chi\eta\mu\chi]_{\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\chi)'\eta\mu\chi d\chi = -2\pi - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu\chi d\chi =$

$= -2\pi + [\sigma\upsilon\nu\chi]_{\pi/2}^{3\pi/2} =$ -2π.

17.5. $\int_{0}^{1} e^x x^2 dx = \int_{0}^{1} \left(e^x\right)' x^2 dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \left[e^x x^2\right]_0^1 - \int_{0}^{1} e^x (x^2)' dx = e - 2\int_{0}^{1} e^x x dx = e - 2\int_{0}^{1} (e^x)' x dx \overset{\pi.o.}{=\!=}$

$= e - 2\left[xe^x\right]_0^1 + 2\int_{0}^{1} e^x (x)' dx = e - 2e + 2\int_{0}^{1} e^x dx = -e + 2\left[e^x\right]_0^1 =$ -e+2(e-1)=e-2.

17.6. $I=\int_{\pi/4}^{\pi} e^x \eta\mu x dx = \int_{\pi/4}^{\pi} (e^x)'\eta\mu x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \left[e^x \eta\mu x\right]_{\pi/4}^{\pi} - \int_{\pi/4}^{\pi} e^x (\eta\mu x)' dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} - \int_{\pi/4}^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x dx =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} - \int_{\pi/4}^{\pi} (e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} - \left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_{\pi/4}^{\pi} + \int_{\pi/4}^{\pi} e^x (\sigma\upsilon\nu x)' dx =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} + e^{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} - \int_{\pi/4}^{\pi} e^x \eta\mu x dx = e^{\pi} - I$.

Άρα $2I=e^{\pi} \Rightarrow I = \frac{e^{\pi}}{2}$.

17.7. $I=\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx = \int_{-\pi}^{\pi} (e^x)'\sigma\upsilon\nu 2x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \left[e^x \sigma\upsilon\nu 2x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x (\sigma\upsilon\nu 2x)' dx = e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\int_{-\pi}^{\pi} e^x \eta\mu 2x dx =$

$= e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\int_{-\pi}^{\pi} (e^x)'\eta\mu 2x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\cancelto{0}{\left[e^x \eta\mu 2x\right]_{-\pi}^{\pi}} - 2\int_{-\pi}^{\pi} e^x (\eta\mu 2x)' dx = e^{\pi} - e^{-\pi} - 4\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx =$

$= e^{\pi} - e^{-\pi} - 4I$.

Άρα $5I = e^{\pi} - e^{-\pi} \Leftrightarrow I = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{5}$.

17.8. $\int_{e}^{e^2} \ln x dx = \int_{e}^{e^2} 1\cdot \ln x dx = \int_{e}^{e^2} (x)' \ln x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \left[x \ln x\right]_{e}^{e^2} - \int_{e}^{e^2} x(\ln x)' dx = 2e^2 - e - \int_{e}^{e^2} x \frac{1}{x} dx = 2e^2 - e - \int_{e}^{e^2} dx =$

$= 2e^2 - e - \left[x\right]_{e}^{e^2} = \ldots = e^2$.

17.9. $\int_{0}^{3} e^{3x} x^2 dx = \int_{0}^{3} \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' x^2 dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \frac{1}{3}\left[x^2 e^{3x}\right]_{0}^{3} - \frac{1}{3}\int_{0}^{3} e^{3x} (x^2)' dx = 3e^9 - \frac{2}{3}\int_{0}^{3} e^{3x} x dx = 3e^9 - \frac{2}{3}\int_{0}^{3} \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)' x dx =$

$\overset{\pi.o.}{=\!=} 3e^9 - \frac{2}{9}\left[x e^{3x}\right]_{0}^{3} + \frac{2}{9}\int_{0}^{3} e^{3x} (x)' dx = 3e^9 - \frac{2}{3}e^9 + \frac{2}{9}\int_{0}^{3} e^{3x} dx = \frac{7}{3}e^9 + \frac{2}{27}\left[e^{3x}\right]_{0}^{3} = \frac{7}{3}e^9 + \frac{2}{27}e^9 - \frac{2}{27} =$

$= \frac{65}{27}e^9 - \frac{2}{27}$.

17.10. $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu 3x dx = \int_{\pi/2}^{\pi} x\left(\frac{\eta\mu 3x}{3}\right)' dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \frac{1}{3}\left[x\eta\mu 3x\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi} (x)'\eta\mu 3x dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi} \eta\mu 3x dx =$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{9}\left[\sigma\upsilon\nu 3x\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$.

17.11. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} x e^{-x} dx = -\int_{\ln 2}^{\ln 4} x\left(e^{-x}\right)' dx \overset{\pi.o.}{=\!=} -\left[x e^{-x}\right]_{\ln 2}^{\ln 4} + \int_{\ln 2}^{\ln 4} (x)' e^{-x} dx = \left[\frac{x}{e^x}\right]_{\ln 4}^{\ln 2} + \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{-x} dx =$

$= -\left[e^{-x}\right]_{\ln 2}^{\ln 4} = \left[\frac{1}{e^x}\right]_{\ln 4}^{\ln 2} = \frac{1}{4}$.

17.12. $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x^3} dx = \int_{1/e}^{e} x^{-3} \ln x dx = \int_{1/e}^{e} \left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)' \ln x dx = \int_{1/e}^{e} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' \ln x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} \left[-\frac{1}{2x^2}\ln x\right]_{1/e}^{e} +$

$+ \int_{1/e}^{e} \frac{1}{2x^2} (\ln x)' dx = \left[\frac{\ln x}{2x^2}\right]_{e}^{1/e} + \int_{1/e}^{e} \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x} dx = \frac{-e^4 - 1}{2e^2} + \frac{1}{2}\int_{1/e}^{e} x^{-3} dx = \frac{-e^4 - 1}{2e^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_{1/e}^{e} =$

$= \frac{-e^4 - 1}{2e^2} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2}\right]_{e}^{1/e} = \frac{-e^4 - 1}{2e^2} + \frac{e^4 - 1}{4e^2} = \frac{-e^4 - 3}{4e^2} = -\frac{e^4 + 3}{4e^2}$.

17.13. $\int_{0}^{1} \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1+x)^2} x e^x dx = -\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x}\right)' x e^x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} -\left[\frac{x e^x}{1+x}\right]_{0}^{1} + \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x} (x e^x)' dx =$

$$=-\frac{e}{2}+\int_0^1\frac{1}{1+x}(x+1)e^x dx=-\frac{e}{2}+\int_0^1 e^x dx=-\frac{e}{2}+\left[e^x\right]_0^1=\frac{e}{2}-1.$$

17.14. $$\mathrm{I}=\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu x\,\eta\mu 3x dx=-\int_{\pi/2}^{\pi/3}(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu 3x dx\overset{\pi.o.}{=\!=}-\cancelto{0}{[\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu 3x]_{\pi/2}^{\pi/3}}+\int_{\pi/2}^{\pi/3}\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 3x)'dx=$$

$$=3\int_{\pi/2}^{\pi/3}\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 3x dx=3\int_{\pi/2}^{\pi/3}(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu 3x dx\overset{\pi.o.}{=\!=}3[\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu 3x]_{\pi/2}^{\pi/3}-3\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu 3x)'dx=$$

$$=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+9\int_{\pi/2}^{\pi/3}\eta\mu x\,\eta\mu 3x dx=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+9\mathrm{I}$$

Άρα $\mathrm{I}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+9\mathrm{I}\Leftrightarrow\mathrm{I}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

17.15. $$\mathrm{I}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{5x}\sigma\upsilon\nu 4x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{5x}}{5}\right)'\sigma\upsilon\nu 4x dx\overset{\pi.o.}{=\!=}\left[\frac{e^{5x}}{5}\sigma\upsilon\nu 4x\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\pi}e^{5x}(\sigma\upsilon\nu 4x)'dx=$$

$$=\frac{e^{5\pi}-e^{-5\pi}}{5}+\frac{4}{5}\int_{-\pi}^{\pi}e^{5x}\eta\mu 4x dx=\frac{e^{5\pi}-e^{-5\pi}}{5}+\frac{4}{5}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{5x}}{5}\right)'\eta\mu 4x dx\overset{\pi.o.}{=\!=}\frac{e^{5\pi}-e^{-5\pi}}{5}+$$

$$+\frac{4}{25}\cancelto{0}{\left[e^{5x}\eta\mu 4x\right]_{-\pi}^{\pi}}-\frac{4}{25}\int_{-\pi}^{\pi}e^{5x}(\eta\mu 4x)'dx=\frac{e^{5\pi}-e^{-5\pi}}{5}-\frac{16}{25}\int_{-\pi}^{\pi}e^{5x}\sigma\upsilon\nu 4x dx=\frac{e^{5\pi}-e^{-5\pi}}{5}-\frac{16}{25}\mathrm{I}.$$

Άρα $\mathrm{I}=\frac{e^{5\pi}-e^{-5\pi}}{5}-\frac{16}{25}\mathrm{I}\Leftrightarrow\frac{41}{25}\mathrm{I}=\frac{e^{5\pi}-e^{-5\pi}}{5}\Leftrightarrow\mathrm{I}=\frac{5}{41}\left(e^{5\pi}-e^{-5\pi}\right)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

18. Θέμα 3ο 2004: Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R. και $f(0)=f(^3/_2)=0$.

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,{}^3/_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.
2. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx$ φζφ
3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\mathrm{I}(\alpha)$

Λύση:

1. Η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=$ $=e^x(f(x)+f'(x))$.
   Η g είναι συνεχής στο $[0,{}^3/_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,{}^3/_2)$. Επιπλέον $f(0)=f(^3/_2)=0$.
   Άρα εφαρμόζεται για την g το Θ. Rolle στο $[0,{}^3/_2]$ και συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,{}^3/_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow e^\xi(f(\xi)+f'(\xi))=0$
   $\Leftrightarrow f(\xi)+f'(\xi)=0$……γιατί $e^\xi\neq 0$
   $\Leftrightarrow f'(\xi)=-f(\xi)$.
2. $$\mathrm{I}(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx=\int_\alpha^0 e^x f(x)dx=\int_\alpha^0 e^x(2x^2-3x)dx=\int_\alpha^0(2e^x x^2-3e^x x)dx$$

   $$=2\int_\alpha^0 e^x x^2 dx-3\int_\alpha^0 e^x x dx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

   Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα δυο ολοκληρώματα:

   ☛ $$\int_\alpha^0 e^x x^2 dx=\int_\alpha^0\left(e^x\right)'x^2 dx\overset{\pi.o.}{=\!=}\left[e^x x^2\right]_a^0-\int_\alpha^0 e^x(x^2)'dx=-e^a a^2-2\int_\alpha^0 e^x x dx\cdot$$

   Άρα (1) $\Rightarrow$ $$\mathrm{I}(\alpha)=-2e^a a^2-7\int_\alpha^0 e^x x dx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

☛ $\int_{\alpha}^{0} e^x x dx = \int_{\alpha}^{0} (e^x)' x dx \overset{\pi.o.}{=\!=} [e^x x]_a^0 - \int_{\alpha}^{0} e^x (x)' dx = -e^a a - \int_{\alpha}^{0} e^x dx = -e^a a - [e^x]_a^0 =$

$= -e^a a - 1 + e^a$.

Επομένως (2) $\Rightarrow$ $\mathrm{I}(\alpha) = -2e^a a^2 - 7(-e^a a - 1 + e^a) = -2e^a a^2 + 7e^a a + 7 - 7e^a =$

$= -e^a(2a^2 - 7a + 7) + 7$.

3. $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \left(e^a(2a^2 - 7a + 7)\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=\!=\!=} \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{(2a^2 - 7a + 7)}{\frac{1}{e^a}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=\!=}} \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{(2a^2 - 7a + 7)'}{\left(\frac{1}{e^a}\right)'} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{4a - 7}{-\frac{1}{e^a}} =$

$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=\!=\!=}} \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{(4a - 7)'}{\left(-\frac{1}{e^a}\right)'} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{4}{\frac{1}{e^a}} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} (4e^a) = 0.$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \mathrm{I}(a) = 7$.

19. Θέμα 4° 2008: Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R για την οποία ισχύει :

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45.$$

1. Να δείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$. Μονάδες 8
2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δυο φορές παραγωγίσιμη στο . Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = g''(x)$. Μονάδες 4
3. Αν για την συνάρτηση f του (1) ερωτήματος και την συνάρτηση g του δεύτερου ερωτήματος ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$. Μονάδες 10

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1». Μονάδες 3

Λύση:

1. Το $\int_0^2 f(t)dt$ είναι αριθμός. Έστω $\kappa = \int_0^2 f(t)dt$.

Τότε η δοθείσα γίνεται $f(x) = (10x^3 + 3x)\kappa - 45 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left((10x^3 + 3x)\kappa - 45\right)dx \Rightarrow$

$\kappa = \kappa\int_0^2 (10x^3 + 3x)dx - 45\int_0^2 dx \Rightarrow \kappa = \kappa\left[10\dfrac{x^4}{4} + 3\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 - 90 \Rightarrow \kappa = 46\kappa - 90 \Rightarrow$ κ=2.

Τότε η δοθείσα γίνεται $f(x)=2(10x^3+3x)-45=20x^3+6x-45$.

2. $g''(x_0) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0} \underset{\substack{\text{όταν } x\to x_0 \\ \text{το } h\to0}}{\overset{x=x_0-h}{=\!=\!=\!=\!=}} \lim\limits_{h\to0} \dfrac{g'(x_0 - h) - g'(x_0)}{-h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{g'(x_0) - g'(x_0 - h)}{h}$ για κάθε $x_0 \in R$.

Άρα $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = g''(x)$ για κάθε $x \in R$.

3. Είναι:

i. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{h\to0} \dfrac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = f(x) + 45$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \dfrac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right) = f(x) + 45$ και από το (2) ερώτημα έχουμε:

$\frac{1}{2}g''(x)+\frac{1}{2}g''(x)=f(x)+45 \underset{(1)}{\overset{\text{ερώτ.}}{\Leftrightarrow}} g''(x)=20x^3+6x$.

Άρα $g'(x)=20\frac{x^4}{4}+6\frac{x^2}{2}+c_1=5x^4+3x^2+c_1$.

g΄(0)=1 ⇔ c_1=1

Επομένως $g'(x)=5x^4+3x^2+1$, οπότε $g(x)=x^5+x^3+x+c_2$.

g(0)=1 ⇔ c_2=1.

Άρα $g(x)=x^5+x^3+x+1$.

ii. $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ άρα είναι ↗ και επομένως «1-1» άρα αντιστρέφεται.

20. Θέμα Γ 2010 ερώτημα Γ4: Δίνεται η συνάρτηση f(x)=2x+ln(x^2+1), x∈R. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx$. Μονάδες 7

Λύση: $I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(2x^2+x\ln(x^2+1))dx=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\cancelto{0}{\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx}=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=...=\frac{4}{3}$ γιατί η συνάρτηση h(x)=xln(x^2+1) είναι **περιττή** στο [-1,1], αφού h(-x)=-xln**(**(-x)^2+1**)**=-xln(x^2+1)=-h(x).

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx=0$ μπορεί να αποδειχθεί και με παραγοντική ολοκλήρωση ή με αντικατάσταση x^2+1=w.

21. Θέμα Δ 2016: Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\pi$.
- f(R)=R και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε x∈R.

Δ.1. Να δείξετε ότι f(π)=π (μονάδες 4) και f΄(0)=1 (μονάδες 3) Μονάδες 7

Δ.2.

Δ.2.1. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. (μονάδες 4)

Δ.2.2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ.3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. Μονάδες 6

Δ.4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. Μονάδες 6

Λύση:

Δ.1. $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x dx=\pi$

$\overset{\pi.o.}{\Leftrightarrow} \int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx+\cancelto{0}{[f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi}}-\int_0^{\pi}f'(x)(\eta\mu x)'dx=\pi$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx-\int_0^{\pi}f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi$

$\overset{\pi.o.}{\Leftrightarrow} \int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx-[f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)(\sigma\upsilon\nu x)'dx=\pi$

$$\Leftrightarrow \cancel{\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx} + f(\pi) - f(0) - \cancel{\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx} = \pi$$

$$\Leftrightarrow f(\pi) - f(0) = \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1 \\ \text{Θέτω } g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ \text{και } f(x)=g(x)\eta\mu x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{array}\right.$$

Από (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[g(x)\eta\mu x] = \lim\limits_{x\to 0} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x \overset{(1)}{=} 1\cdot \eta\mu 0^0 = 1\cdot 0 = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ……(4)

Από (1) και (4) $\Rightarrow$ f(π)=π.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Δ.2.

Δ.2.3. $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \underset{\text{τα δυο μέλη}}{\overset{\text{παραγωγίζουμε}}{<=====>}} e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x))\cdot f'(x) + e^x$ ……(5)

Εάν η f είχε ακρότατο στο x_0, τότε από το Θ. Fermat $f'(x_0)=0$……...(6)

$(5) \overset{x=x_0}{\Rightarrow} e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0))\cdot f'(x_0) + e^{x_0}$

$\overset{(6)}{\Rightarrow} 1 = e^{x_0} \Rightarrow x_0 = 0$ και η (6) $\Rightarrow$ f΄(0)=0 **άτοπο**, γιατί f΄(0)=1.

Άρα δεν έχει ακρότατα.

Δ.2.4. Επειδή f΄(x)≠0, για κάθε x∈R και η f΄ είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή f΄(0)=1>0, θα είναι f΄(x)>0 στο R, άρα η f είναι ↗ στο R.

Δ.3. Επειδή f ↗ στο R και συνεχής, θα έχουμε:

f(R)=R $\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ……(7)

Επομένως f(x)>0 κοντά στο +∞……(8)

Έχουμε $\left|\dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| = \dfrac{|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \overset{(8)}{=} \dfrac{|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{f(x)} \le \dfrac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)} \le \dfrac{1+1}{f(x)} = \dfrac{2}{f(x)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Επομένως } -\dfrac{2}{f(x)} \le \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)}. \\ \text{Από (7)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{f(x)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{f(x)}\right) = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{παραμβολής}}{\overset{\text{κριτήριο}}{====>}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0.$$

Δ.4. Θέτω lnx=y. Τότε (lnx)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow \dfrac{1}{x}$dx=dy και:

- όταν x=1τότε y=ln1=0.
- όταν x=e^{π} τότε y=lne^{π}=π.

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^{e^{\pi}} f(\ln x)\frac{1}{x} dx = \int_0^{\pi} f(y) dy = \int_0^{\pi} f(x) dx$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,π] άρα f(0)≤f(x)≤f(π) $\Rightarrow$ 0≤f(x)≤π

Επειδή f(x)≥0 στο [0,π] με f(x)=0 μόνο για x=0, θα είναι $\int_0^{\pi} f(x)dx > 0$.

Επειδή f(x)≤π στο [0,π], π-f(x)≥0 με π-f(x)=0 μόνο για x=π, θα είναι $\int_0^{\pi}(\pi - f(x))dx > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \pi dx - \int_0^{\pi} f(x)dx > 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \pi dx > \int_0^{\pi} f(x)dx \Rightarrow \pi(\pi - 0) > \int_0^{\pi} f(x)dx \Rightarrow \pi^2 > \int_0^{\pi} f(x)dx.$$

Άρα $0 < \int_0^{\pi} f(x)dx < \pi^2 \Rightarrow 0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$.

22. ΓΔΓΣ

ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ