ΣΥΝΕΧΕΙΑ – ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ
ΛΥΣΕΙΣ

1. Εάν $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$, για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Λύση: Η σχέση $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$……(1)

Για x=0 γίνεται $1 \le f(0) \le 1 \Leftrightarrow f(0)=1$……(2)

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x^2)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x^2)=1 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτ.παρεμβ}} \lim_{x\to 0} f(x)=1 \ldots(3)$$

Από (2) και (3) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

2. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta \in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+\beta x-3}{x-1}, & \text{αν } x\neq 1 \\ 4, & \text{αν } x=1 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο R.

Λύση: Αφού είναι συνεχής στο $x_0=1$,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{ax^2+\beta x-3}{x-1}=4 \ldots\ldots(1)$$

Θέτω $g(x)=\dfrac{ax^2+\beta x-3}{x-1}$ ……(2)

$(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)=4$ ……(3)

και $ax^2+\beta x-3=(x-1)g(x)$, οπότε

$$\lim_{x\to 1}(ax^2+\beta x-3)=\lim_{x\to 1}[(x-1)g(x)] \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$\alpha+\beta-3=0 \Leftrightarrow \beta=3-\alpha$……(4)

$$(1) \overset{(4)}{\Rightarrow} \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{ax^2+(3-\alpha)x-3}{x-1}=4 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(ax+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=4$$

α	3-α	-3	1
↓	α	3	
α	3	0	

$\Leftrightarrow \alpha+3=4 \Leftrightarrow \alpha=1$.

$(4) \Leftrightarrow \beta=2$.

3. Να υπολογίσετε τα **α, β∈R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2-(\beta-2)x-6}{x-2}, & \text{αν } x\neq 2 \\ 9, & \text{αν } x=2 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο R.

Λύση: Αφού είναι συνεχής στο $x_0=2$,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{ax^2-(\beta-2)x-6}{x-2}=9 \ldots..(1)$$

Θέτω $g(x)=\dfrac{ax^2-(\beta-2)x-6}{x-2}$ ……(2)

$(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=9$ ……(3)

και $ax^2-(\beta-2)x-6=(x-2)g(x)$, οπότε

$$\lim_{x\to 2}(ax^2-(\beta-2)x-6)=\lim_{x\to 2}[(x-2)g(x)] \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$4\alpha-2(\beta-2)-6=0 \Leftrightarrow \beta=2\alpha-1$……(4)

$$(2) \overset{(4)}{\Rightarrow} \lim_{x\to 2}\frac{ax^2-(2\alpha-3)x-6}{x-2}=9 \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(ax+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=9 \Leftrightarrow$$

α	-2α+3	-6	2
↓	2α	6	
α	3	0	

$2\alpha+3=9 \Leftrightarrow \alpha=3$.

$(4) \Leftrightarrow \beta=5$.

4. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta,\gamma \in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}, & \text{αν } x\neq 1 \\ 7, & \text{αν } x=1 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο R.

Λύση: Αφού είναι συνεχής στο $x_0=1$,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x^3+ax^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}=7 \ldots(1)$$

Θέτω $g(x)=\dfrac{x^3+ax^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}$ ……(2)

$(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)=7$ ……(3)

και $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=(x-1)^2 g(x)$, οπότε

$$\lim_{x\to 1}(x^3+ax^2+\beta x+\gamma)=\lim_{x\to 1}[(x-1)^2 g(x)] \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$1+\alpha+\beta+\gamma=0$……(4)

$$(1) \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+(a+1)x+a+\beta+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=7$$

1	α	β	γ	1
↓	1	α+1	α+β+1	
1	α+1	α+β+1	α+β+γ+1=0	

γιατί α+β+γ+1=0 λόγω της (1)

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+(a+1)x+a+\beta+1}{x-1}=7 \ldots\ldots(5)$$

Θέτω $h(x)=\dfrac{x^2+(a+1)x+a+\beta+1}{x-1}$ ……(6)

$(5) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} h(x)=7$ ……(7)

και $x^2+(\alpha+1)x+\alpha+\beta+1=(x-1)h(x)$, οπότε

$$\lim_{x\to 1}(x^2+(a+1)x+a+\beta+1)=\lim_{x\to 1}[(x-1)h(x)] \overset{(7)}{\Rightarrow}$$

$2\alpha+\beta+3=0$……(8)

$$(5) \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{(x+a+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=7$$

1	α+1	α+β+1	1
↓	1	α+2	
1	α+2	2α+β+3=0	

γιατί 2α+β+3=0 λόγω της (8)

$\Leftrightarrow \alpha+3=7 \Leftrightarrow \alpha=4$.

$(8) \Leftrightarrow \beta=-11$.

$(4) \Leftrightarrow \gamma=6$.

5. Να υπολογίσετε τα α,β∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x-\beta\eta\mu 2x}{x}, & \text{αν } x<0\\ \alpha-1, & \text{αν } x=0\\ \dfrac{2-\sqrt{4+x}}{\beta x}, & \text{αν } x>0\end{cases}$, να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Λύση: Αφού είναι συνεχής στο $x_0=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=\alpha-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\alpha-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\alpha-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{ax-\beta\eta\mu 2x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ax}{x}-\frac{\beta\eta\mu 2x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(a-2\beta\underbrace{\frac{\eta\mu 2x}{2x}}_{1}\right)$$

$=\alpha-2\beta$……(3)

(1),(3) $\Rightarrow$ α-2β=α-1 $\Leftrightarrow$ β=½.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\beta x}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(2-\sqrt{4+x}\right)\left(2+\sqrt{4+x}\right)}{\beta x\left(2+\sqrt{4+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4-4-x}{\beta x\left(2+\sqrt{4+x}\right)}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\beta\cancel{x}\left(2+\sqrt{4+x}\right)}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\beta\left(2+\sqrt{4+x}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4\beta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(2),(4) $\Rightarrow \alpha-1=-\dfrac{1}{4\beta}\overset{\beta=1/2}{\Leftrightarrow}\alpha=\dfrac{1}{2}$.

6. Εάν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και ισχύει $|xf(x)-\eta\mu x|\le x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}$, για κάθε x∈R*, να υπολογίσετε το f(0).

Λύση: $|xf(x)-\eta\mu x|\le x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$$\frac{|xf(x)-\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{|x|}\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{xf(x)-\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{|x|^4\eta\mu\frac{1}{x}}{|x|}\Leftrightarrow$$

$$\left|f(x)-\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le|x|^3\eta\mu\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$-|x|^3\eta\mu\frac{1}{x}\le f(x)-\frac{\eta\mu x}{x}\le|x|^3\eta\mu\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu x}{x}-|x|^3\eta\mu\frac{1}{x}\le f(x)\le\frac{\eta\mu x}{x}+|x|^3\eta\mu\frac{1}{x}\ldots\ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{r}-1\le\eta\mu\frac{1}{x}\le 1\Leftrightarrow -|x|^3\le|x|^3\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|^3\\ \lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|^3\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|^3=0\end{array}\right\}\overset{\text{κρ.παρ.}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(|x|^3\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-|x|^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1-0=1$……(2)

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+|x|^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1+0=1$……(3)

Από (1),(2),(3) και το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ και επειδή είναι συνεχής στο $x_0=0$, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

7. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈ (0,2), τέτοιο ώστε $\xi^4=11-2\xi$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $f(x)=x^4+2x-11$ στο διάστημα [0,2].

- συνεχής στο [0,2] ως πολυωνυμική,
- $\left.\begin{array}{l}f(0)=-11\\ f(2)=9\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(2)<0.$

Άρα υπάρχει ξ∈ (0,2), τέτοιο ώστε f(ξ)=0 $\Leftrightarrow$ $\xi^4+2\xi-11=0\Leftrightarrow\xi^4=11-2\xi$.

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^{2\kappa}+1}{x-\alpha}+\dfrac{x^{2\lambda}+1}{x-\beta}=0$ με α,β∈R, α<β και κ, λ∈N* έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα (α,β).

Λύση: Επειδή τα α και β μηδενίζουν τους παρονομαστές, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $f(x)=(x^{2\kappa}+1)(x-\beta)+(x^{2\lambda}+1)(x-\alpha)$ στο διάστημα [0,2].

- συνεχής στο [0,2] ως πολυωνυμική,
- $\left.\begin{array}{l}f(\alpha)=\left(\alpha^{2\kappa}+1\right)(\alpha-\beta)<0\\ f(\beta)=\left(\alpha^{2\lambda}+1\right)(\beta-\alpha)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(2)<0.$

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα της εξίσωσης f(χ)=0 $\Leftrightarrow$

$(x^{2\kappa}+1)(x-\beta)+(x^{2\lambda}+1)(x-\alpha)=0\Leftrightarrow$….(διαιρούμε με (x-α)(x-β))

$$\frac{x^{2\kappa}+1}{x-\alpha}+\frac{x^{2\lambda}+1}{x-\beta}=0.$$

9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{4x-\pi}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3x-\pi}=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα ($^{\pi}/_{4}$,$^{\pi}/_{3}$).

Λύση: Επειδή τα $^{\pi}/_{4}$ και $^{\pi}/_{3}$ μηδενίζουν τους παρονομαστές, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f(x)=(4x-π)συνx+(3x-π)ημx στο διάστημα [$^{\pi}/_{4}$,$^{\pi}/_{3}$].

• συνεχής στο [$^{\pi}/_{4}$,$^{\pi}/_{3}$] ως άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,

• $\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{3}\right)=...=\frac{\pi}{6}>0 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=...=-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}<0 \end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0.$

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα ($^{\pi}/_{4}$,$^{\pi}/_{3}$) ⇔ (4x-π)συνx+(3x-π)ημx=0 ⇔…. (διαιρούμε με (4x-π)(3x-π)) $\frac{\eta\mu x}{4x-\pi}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3x-\pi}=0$.

10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}=0$ όπου α,β,γ > 0 και λ<μ<ν έχει δυο ακριβώς πραγματικές άνισες ρίζες στα διαστήματα (λ,μ) και (μ,ν).

Λύση: Επειδή τα λ, μ και ν μηδενίζουν τους παρονομαστές, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση:

f(x)=α(x-μ)(x-ν)+β(x-λ)(x-ν)+γ(x-μ)(x-λ)

στα διαστήματα [λ,μ] και [μ,ν].

• συνεχής στα διαστήματα [λ,μ] και [μ,ν] ως πολυωνυμική,

• $\left.\begin{array}{l} f(\lambda)=\alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) \\ f(\mu)=\beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\lambda)\cdot f(\mu)=-\alpha\beta(\lambda-\mu)^2(\lambda-\nu)(\mu-\nu)<0$

γιατί α>0, β>0, $(\lambda-\mu)^2>0$, λ-ν<0 και μ-ν<0.

• $\left.\begin{array}{l} f(\mu)=\beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) \\ f(\nu)=\gamma(\nu-\mu)(\nu-\lambda) \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\mu)\cdot f(\nu)=-\beta\gamma(\mu-\nu)^2(\nu-\lambda)(\mu-\lambda)<0$

γιατί β>0, γ>0, $(\mu-\nu)^2>0$, ν-λ>0 και μ-λ>0.

Άρα υπάρχουν **δυο τουλάχιστον** πραγματικές **ρίζες** ξ_1 και ξ_2 της εξίσωσης f(x)=0, η μια στο διάστημα (λ,μ) και μια στο διάστημα (μ,ν), διαφορετικές μεταξύ τους, γιατί $\lambda<\xi_1<\mu<\xi_2<\nu$ ⇔

α(x-μ)(x-ν)+β(x-λ)(x-ν)+γ(x-μ)(x-λ)=0 ⇔

$\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}=0$.

(διαιρούμε με (x-λ)(x-μ)(x-ν)).

Επειδή η εξίσωση f(x)=0 είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει το **πολύ δυο ρίζες**.

Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει **δυο ακριβώς** πραγματικές άνισες **ρίζες** στα διαστήματα (λ,μ) και (μ,ν).

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση x^4=11-2x έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-2,2).

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f(x)=x^4+2x-11 στα διαστήματα [-2,0] και [0,2].

• συνεχής στα [-2,0] και [0,2] ως πολυωνυμική,

• $\left.\begin{array}{l} f(0)=-11 \\ f(2)=9 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(2)<0.$

$\left.\begin{array}{l} f(0)=-11 \\ f(-2)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(-2)<0.$

Άρα η εξίσωση f(x)=0 ⇔ x^4+2x-11=0

⇔ x^4=11-2x

έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-2,2), μια στο διάστημα (-2,0) και μια στο (0,2).

12. Να δείξετε ότι η εξίσωση x^2+xημx=συνx έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-$^{\pi}/_{2}$,$^{\pi}/_{2}$).

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f(x)=x^2+xημx-συνx στα διαστήματα [-$^{\pi}/_{2}$,0] και [0,$^{\pi}/_{2}$].

• συνεχής στα διαστήματα [-$^{\pi}/_{2}$,0] και [0,$^{\pi}/_{2}$] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,

• $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\overset{1}{\cancel{\eta\mu\frac{\pi}{2}}}-\overset{0}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}}$

$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}>0$

$f(0)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\overset{1}{\cancel{\eta\mu\frac{\pi}{2}}}-\overset{0}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}}$

$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}>0$

Άρα $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)<0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)<0$.

Επομένως η εξίσωση f(x)=0 ⇔ x^2+xημx=συνx έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-$^{\pi}/_{2}$, $^{\pi}/_{2}$), μια στο διάστημα (-$^{\pi}/_{2}$,0) και μια στο (0,$^{\pi}/_{2}$).

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^{10}-3x^7+4x^5-7x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση: Με δοκιμές βρίσκουμε το διάστημα [0,1] στο οποίο εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f(x)=$2x^{10}-3x^7+4x^5-7x+1$.

• συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική,

• $\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(1)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0.$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^{10}-3x^7+4x^5-7x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

14. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x(1-4\sigma\upsilon\nu x)=4\eta\mu^2 x-x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(\pi,2\pi)$.

Λύση: $\sigma\upsilon\nu x(1-4\sigma\upsilon\nu x)=4\eta\mu^2 x-x \Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu x-4\sigma\upsilon\nu^2 x=4\eta\mu^2 x-x \Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu x-4(\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x)+x=0 \Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu x-4+x=0$.

Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x-4$ στο διάστημα $[\pi,2\pi]$..

• συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων,

• $\left.\begin{array}{l} f(\pi)=\pi+\sigma\upsilon\nu\pi-4=\pi-5<0 \\ f(2\pi)=2\pi+\sigma\upsilon\nu 2\pi-4=2\pi-3>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\Rightarrow f(\pi)f(2\pi)<0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-4+x=0$
$\Leftrightarrow$ .....
$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(1-4\sigma\upsilon\nu x)=4\eta\mu^2 x-x$

έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(\pi,2\pi)$.

15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+xe^{\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi/2,0)$ και $(0,\pi/2)$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $f(x)=x^2+xe^{\eta\mu x}-\sigma\upsilon\nu x$ στα διαστήματα $[-\pi/2,0]$ και $[0,\pi/2]$.

• συνεχής στα διαστήματα $[-\pi/2,0]$ και $[0,\pi/2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,

• $$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}e^{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)}-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\cancelto{1}{e^{-\eta\mu\frac{\pi}{2}}}-\cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}e^{-1}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2e}$$
$$=\frac{\pi(\pi e-2)}{4e}>0$$

$f(0)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$

• $$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\cancelto{1}{e^{\eta\mu\frac{\pi}{2}}}-\cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi e}{2}>0$$

Άρα $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)<0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)<0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+xe^{\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\pi/2,\pi/2)$, μια στο διάστημα $(-\pi/2,0)$ και μια στο $(0,\pi/2)$.

16. Εάν $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

• συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

• $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha\geq 0$ γιατί $\alpha\leq f(\alpha)\leq\beta$
$g(\beta)=f(\beta)-\beta\leq 0$ γιατί $\alpha\leq f(\beta)\leq\beta$
Άρα $g(\alpha)\cdot g(\beta)\leq 0$

1η περίπτωση: $g(\alpha)\cdot g(\beta)=0$. Τότε $g(\alpha)=0$ ή $g(\beta)=0$.....(1)

2η περίπτωση: $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$. Τότε εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** για την g στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.....(2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

17. Έστω f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και τιμές στο $[\alpha,\beta]$, τέτοιες ώστε $g(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

• συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

• $h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha\geq 0$ γιατί $\alpha\leq f(\alpha)\leq\beta$
$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-\beta\leq 0$ γιατί $\alpha\leq f(\beta)\leq\beta$
Άρα $h(\alpha)\cdot h(\beta)\leq 0$

1η περίπτωση: $h(\alpha)\cdot h(\beta)=0$. Τότε $h(\alpha)=0$ ή $h(\beta)=0$.....(1)

2η περίπτωση: $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$. Τότε εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** για την h στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.....(2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

18. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)+f(\beta)=g(\alpha)+g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in[\alpha,\beta]$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

$f(\alpha)+f(\beta)=g(\alpha)+g(\beta) \Leftrightarrow$
$f(\beta)-g(\beta)=-(f(\alpha)-g(\alpha))$.....(1)

Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

• συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

• $h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)$

$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)\overset{(1)}{=}-\left(f(\alpha)-g(\alpha)\right)$

Άρα $h(\alpha)\cdot h(\beta)=-\left(f(\alpha)-g(\alpha)\right)^2\leq 0$.

1η περίπτωση: $h(\alpha)\cdot h(\beta)=0$. Τότε $h(\alpha)=0$ ή $h(\beta)=0$.....(2)

2η περίπτωση: $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$. Τότε εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** για την h στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.....(3)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

19. Εάν f είναι συνεχής στο [α,β], $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και κ, λ θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)=(\kappa+\lambda)f(\xi)$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $h(x)=(\kappa+\lambda)f(x)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)$.

- συνεχής στο [α,β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- $h(\alpha)=(\kappa+\lambda)f(\alpha)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)$
  $=\lambda(f(\alpha)-f(\beta))$.
  $h(\beta)=(\kappa+\lambda)f(\beta)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)$
  $= -\kappa(f(\alpha)-f(\beta))$.

Άρα $h(\alpha)\cdot h(\beta)=-\kappa\lambda(f(\alpha)-f(\beta))^2<0$…….γιατί $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και κ, λ θετικοί πραγματικοί.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow (\kappa+\lambda)f(\xi)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)=$
$\Leftrightarrow (\kappa+\lambda)f(\xi)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)$.

20. Έστω $f:R\to R$ με $f(x)=x^2+3x-7$ και $g:R\to R$ με $g(x)=f(x)-\lambda x$ όπου $\lambda\in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$ όπου ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της $f(x)=0$, με $\rho_1<\rho_2$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση g στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

- συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,
- $g(\rho_1)=f(\rho_1)-\lambda\rho_1=-\lambda\rho_1$
  $g(\rho_2)=f(\rho_2)-\lambda\rho_2=-\lambda\rho_2$

γιατί ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της $f(x)=0$.

Άρα $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=\lambda^2\rho_1\rho_2$

$$\overset{Vieta}{=} \lambda^2\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda^2\frac{-7}{1}=-7\lambda^2\le 0.$$

1η περίπτωση: $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=0$. Τότε $g(\rho_1)=0$ ή $g(\rho_2)=0$……(1)

2η περίπτωση: $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)<0$. Τότε εφαρμόζεται το Θ. **Bolzano** για την g στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα (ρ_1,ρ_2)……(2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ υπάρχει **μια τουλάχιστον ρίζα** της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

21. Έστω $f:A\to R$ με $f(x)=x^3-7x+5$ και $A=[-3,-2]$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο A,

ii) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (-3,-2).

Λύση:

i) $f'(x)=3x^2-7$.

Ο πίνακας μεταβολών είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		$-\sqrt{7/3}$		$\sqrt{7/3}$		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Άρα στο διάστημα $[-3,-2]\subseteq\left(-\infty,-\sqrt{7/3}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την f στο διάστημα [-3,-2].

- Συνεχής στο [-3,-2] ως πολυωνυμική,
- $\left.\begin{array}{l} f(-3)=-1 \\ f(-2)=11 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-3)\cdot f(-2)=-11<0.$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-3,-2), και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο (-3,-2) η **ρίζα** είναι **μοναδική**.

22. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{5}{x}+7=3\sqrt{x}$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα.

Λύση: Έστω $f(x)=\frac{5}{x}+7-3\sqrt{x}$, x>0

Τότε $f'(x)=-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{2\sqrt{x}}<0 \Rightarrow$ f ↘ στο $(0,+\infty)$.

Επειδή είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)$……..(1)

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{5}{x}+7-3\sqrt{x}\right)=+\infty \text{ ……..(2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}+7-3\sqrt{x}\right)=-\infty \text{ ……..(3)}$$

$(1)\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$ και επειδή $0\in f((0,+\infty))$ η f μηδενίζεται μια τουλάχιστον φορά στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι ↘ η ρίζα είναι μοναδική.

23. **i)** Να αποδείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:A\to R$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα στο A, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα x΄Ox σε ένα το πολύ σημείο,

ii) να δείξετε ότι η εξίσωση $3^x+5^x=7^x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

iii) ομοίως η εξίσωση $x^2+xe^x+\ln x=4$.

Λύση:

i) Εάν υποθέσουμε ότι έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, τότε επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι $f(\rho_1)<f(\rho_2)$ αν είναι γνησίως αύξουσα, ή $f(\rho_1)>f(\rho_2)$ αν είναι γνησίως φθίνουσα.

Άτοπο γιατί $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$.

Άρα έχει **το πολύ μια πραγματική ρίζα** στο A.

ii) $3^x+5^x=7^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{7^x}+\frac{5^x}{7^x}=\frac{7^x}{7^x}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x-1=0.$$

Η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x-1$, x∈R, είναι γνησίως φθίνουσα ως άθροισμα των φθινουσών συναρτήσεων $\left(\frac{3}{7}\right)^x$ και $\left(\frac{5}{7}\right)^x$ γιατί $^3/_7<1$ και $^5/_7<1$.

Επειδή είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών εκθετικών συναρτήσεων, το σύνολο τιμών της είναι $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.....(1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x-1\right]=-\infty$...(2)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x-1\right]=+\infty$...(3)

$(1)\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} f(R)=(-\infty,+\infty)=R$ και επειδή $0\in f(R)$ η f **μηδενίζεται μια τουλάχιστον φορά** στο R και επειδή είναι ↘ η **ρίζα** είναι **μοναδική**.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=x^2+xe^x+\ln x-4$, x∈(0,+∞), έχει παράγωγο $f'(x)=2x+e^x+xe^x+{}^1/_x>0$ γιατί x>0.

Άρα f ↗ στο (0,+∞) και επειδή είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, έχει σύνολο τιμών

$f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.....(1)

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+xe^x+\ln x-4)=-\infty$.....(2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+xe^x+\ln x-4)=+\infty$ .....(3)

$(1)\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow}$ f((0,+∞))=(-∞,+∞)=R και επειδή 0∈R, η f μηδενίζεται μια τουλάχιστον φορά στο (0,+∞) και επειδή είναι ↗ η **ρίζα** είναι **μοναδική**.

24. Θεωρούμε τις γραμμές (c) και (ε) που ορίζουν οι εξισώσεις (c): $y=x^3+x^2$ και (ε): y=5x-3. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω γραμμές τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη μεταξύ - 4 και -2.

Λύση: Τα πιθανά σημεία τομής των καμπυλών, είναι λύσεις της εξίσωσης $x^3+x^2-5x+3=0$.
Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ είναι συνεχής στο [-4,-2] ως πολυωνυμική, f(-4)=-25, f(-2)=9 άρα f(-4)·f(-2)=-225<0.
Άρα (θ. **Bolzano**) η εξίσωση f(x)=0
$\Leftrightarrow x^3+x^2-5x+3=0$
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο {-4,-2).

25. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{2x^3+x-1}=\frac{2}{x}$ έχει ακριβώς μια πραγματική θετική ρίζα.

Λύση: Πεδίο ορισμού: x≠0.....(1)
$2x^3+x-1\geq0$.....(2)

Η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x-1$ είναι περιττού βαθμού και γνησίως αύξουσα γιατί $f'(x)=6x^2+1>0$. Άρα έχει σύνολο τιμών το R. Επομένως έχει μια τουλάχιστον ρίζα x=α στο R που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική.
Επειδή f(0)=-1<0, η ρίζα α είναι θετική.

- Για x<α $\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}$ g(x)<g(α) ⇔ g(x)<0
- Για x>α $\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}$ g(x)>g(α) ⇔ g(x)>0

x	-∞ α	+∞
g(x)	-	+

(2)⇔ x≥α.....(3)
Άρα από (1) και (3) βρίσκουμε $A_f=[\alpha,+\infty)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\sqrt{2x^3+x-1}-\frac{2}{x}$ με x∈[α,+∞).

$h'(x)=\frac{6x^2+1}{2\sqrt{2x^3+x-1}}+\frac{2}{x^2}>0$ άρα η h(x) ↗ στο [α,+∞).

Επειδή η h(x) είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι $h([a,+\infty))=\left[h(a), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right)$.....(4)

$h(\alpha)=-\frac{2}{\alpha}$ .....(5)

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^3+x-1}-\frac{2}{x}\right)=+\infty$.....(6)

$(4)\overset{(5),(6)}{\Longrightarrow} h([a,+\infty))=\left[-\frac{2}{\alpha},+\infty\right)$.

Επειδή $0\in\left[-\frac{2}{\alpha},+\infty\right)$ η εξίσωση h(x)=0 ⇔ $\sqrt{2x^3+x-1}=\frac{2}{x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο [α,+∞), θετική αφού α>0 και επειδή η h(x) είναι ↗ η **ρίζα** είναι **μοναδική**.

26. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^ve^x=1$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1).

Λύση: Έστω $f(x)=x^ve^x-1$, x∈(0,1).
$f'(x)=vx^{v-1}e^x+x^ve^x>0$ γιατί x∈(0,1).

Άρα η f είναι ↗ στο (0,1) και επειδή είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, θα έχει σύνολο τιμών f((0,1))=(f(0),f(1))
=(-1,e-1).

Επειδή 0∈(-1,e-1), η εξίσωση f(x)=0 ⇔ $x^ve^x=1$ έχει μια τουλάχιστον **ρίζα** στο (0,1) και επειδή είναι ↗ είναι **μοναδική**.

Παρατήρηση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με απευθείας **Bolzano** στο διάστημα [0,1].

27. Να βρείτε το **σύνολο τιμών** της f:[-1,2]→R, με $f(x)=x^2+3|x|$.

Λύση: $f(x)=\begin{cases} x^2+3x, & \text{αν } x\in[0,2] \\ x^2-3x, & \text{αν } x\in[-1,0) \end{cases}$.

• Στο διάστημα $A_1=[-1,0)$.
$f(x)=x^2-3x$.

$f'(x)=2x-3<0$ γιατί $x<0$. Άρα f ↘ στο $[-1,0)$ και επειδή είναι συνεχής $f(A_1)=(f(0),f(-1)]$
$=(0,4]$.

• Στο διάστημα $A_2=[0,2]$.
$f(x)=x^2+3x$.

$f'(x)=2x+3>0$ γιατί $x>0$. Άρα f ↗ στο $[0,2]$ και επειδή είναι συνεχής $f(A_2)=[f(0),f(2)]$
$=[0,10]$

$f(A_f)=f(A_1)\cup f(A_2)=(0,4]\cup[0,10]$
$=[0,10]$.

28. Εάν α,β>0, να δείξετε ότι η εξίσωση ασυνx+β=x έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα, που δεν υπερβαίνει το α+β.

Λύση: Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f(x)=ασυνx+β-x στο διάστημα [0,α+β].

• Συνεχής στο [0,α+β] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων,

• $\left.\begin{array}{l} f(0)=\alpha\sigma\upsilon\nu 0+\beta=\alpha+\beta>0 \\ f(\alpha+\beta)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\beta-\alpha-\beta= \\ \qquad =\boldsymbol{\alpha(\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)-1)}\le 0 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)\cdot f(a+\beta)\le 0.$

1η περίπτωση: f(0)·f(α+β)=0. Τότε f(0)=0 ή f(α+β)=0……(1)

2η περίπτωση: f(0)·f(α+β)<0. Τότε εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** για την f στο διάστημα [0,α+β].

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\alpha+\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$……(2)

Από (1) και (2) ⇒ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[0,\alpha+\beta]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

⇔ $\alpha\sigma\upsilon\nu x_0+\beta=x_0$.

Άρα η εξίσωση ασυνx+β=x έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα στο διάστημα [0,α+β], δηλαδή δεν υπερβαίνει το α+β.

29. Αν f συνεχής στο [0,1] και $0\le f(x)\le 1$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$, τέτοιο ώστε $f^2(x_0)+f(x_0)=\mathbf{x}_0^2+x_0$.

Λύση: $f^2(x_0)+f(x_0)=\mathbf{x}_0^2+x_0$ ⇔

$f^2(x_0)+f(x_0)-\mathbf{x}_0^2-x_0=0$ ⇔

$(f(x_0)+x_0)(f(x_0)-x_0)+f(x_0)-x_0=0$ ⇔

$(f(x_0)-x_0)(f(x_0)+x_0+1)=0$

και επειδή $f(x_0)+x_0+1\ne 0$ γιατί $x_0\in[0,1]$ και $0\le f(x_0)\le 1$ θα είναι $f(x_0)-x_0=0$

⇔ $f(x_0)=x_0$

που είναι η άσκηση 16 του παρόντος φυλλαδίου για α=0, β=1.

Παρατήρηση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με απευθείας **Bolzano** στο διάστημα [0,1] για την $g(x)=f^2(x)+f(x)-x^2-x$.

30. Έστω f:[π,2π]→R, με f(x)=x+συνx- 4.
i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [π,2π],
ii) να βρείτε το σύνολο τιμών της και
iii) να δείξετε ότι η εξίσωση συνx=4-x έχει ακριβώς μια ρίζα στο [π,2π].

Λύση: δφφ

i) $f'(x)=1-\eta\mu x\ge 0$ με $f'(x)=0$ μόνο για x=π και x=2π. Άρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [π,2π].

ii) Επειδή είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο [π,2π], το σύνολο τιμών της είναι f([π,2π])=[f(π),f(2π)]

=[π+$\overset{-1}{\text{συνπ}}$-4,2π+$\overset{1}{\text{συν2π}}$-4]
=[π-5,2π-3].

iii) Επειδή π-5<0 και 2π-3>0 ⇒ 0∈f([π,2π]) η εξίσωση f(x)=0
⇔ συνx=4-x
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (π,2π) και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [π,2π], η **ρίζα είναι μοναδική**.

31. Να βρείτε το πρόσημο της $f(x)=x^3-4x^2-5x$.

Λύση: f(x)=0
⇔ $x^3-4x^2-5x=0$
⇔ $x(x^2-4x-5)=0$
⇔ x=0 ή x=5 ή x=-1.

Επειδή η f συνεχής ως πολυωνυμική, **διατηρεί σταθερό πρόσημο** στα διαστήματα (-∞,-1), (-1,0), (0,5) και (5,+∞).

x	-∞	-1	0	5	+∞
επιλεγ. αριθ. x_0	-2	$^{-1}/_2$	1	6	
$f(x_0)$	-14	$^{11}/_8$	-8	42	
f(x)	-	+	-	+	

32. Έστω f συνεχής στο [-3,3], f(1)>0 και $4x^2+9f^2(x)=36$, για κάθε x∈(-3,3). Να δείξετε ότι f(x)>0 για κάθε x∈(-3,3).

Λύση: $9f^2(x)=36-4x^2$
$=4(9-x^2)>0$
στο (-3,3).

x	-∞	-3	3	+∞
$9-x^2$	-	+	-	

Άρα f(x)≠0 στο (-3,3).

Επειδή f συνεχής στο [-3,3] και δεν μηδενίζεται στο (-3,3), **διατηρεί σταθερό πρόσημο** και επειδή f(1)>0 θα είναι f(x)>0 στο (-3,3).

33. Έστω f: [α,β]→R, συνεχής στο [α,β], τέτοια ώστε $\alpha^2f(\beta)+\beta^2f(\alpha)=0$. Να αποδείξετε ότι αν

αβ≠0, τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

Λύση: $\alpha^2 f(\beta)+\beta^2 f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{\beta^2}f(\beta)$ …(1)

Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f στο διάστημα [α,β].

- Συνεχής στο [α,β] από υπόθεση,
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)\overset{(1)}{=}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}f^2(\beta)\le 0.$

1η περίπτωση: f(α)·f(β)=0. Τότε f(α)=0 ή f(β)=0……(2)

2η περίπτωση: f(α)·f(β)<0. Τότε εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** για την f στο διάστημα [α,β].

Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)……(3)

Από (2) και (3) ⇒ η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

34. Έστω f: [α,β]→R, συνεχής στο [α,β], τέτοια ώστε κf(α)+λf(β)=0, όπου κ,λ θετικοί πραγματικοί. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

Λύση: κf(α)+λf(β)=0 ⇔ $f(\alpha)=-\frac{\lambda}{\kappa}f(\beta)$ …(1)

Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f στο διάστημα [α,β].

- Συνεχής στο [α,β] από υπόθεση,
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)\overset{(1)}{=}-\frac{\lambda}{\kappa}f^2(\beta)\le 0,$ γιατί κ,λ>0.

1η περίπτωση: f(α)·f(β)=0. Τότε f(α)=0 ή f(β)=0……(2)

2η περίπτωση: f(α)·f(β)<0. Τότε εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** για την f στο διάστημα [α,β].

Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)……(3)

Από (2) και (3) ⇒ η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

35. Εάν f συνεχής στο διάστημα Δ και α,β,γ,δ∈Δ με α<γ<δ<β, να δείξετε ότι:

i) υπάρχει ξ∈[α,β] τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3}$,

ii) υπάρχει x_0∈(α,β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{f(\gamma)+f(\delta)}{2}$,

iii) υπάρχει t∈[α,β] τέτοιο ώστε $f(t)=\frac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\beta)}{6}$.

Λύση:

i) Αφού f συνεχής στο Δ, είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και επομένως εφαρμόζεται το **θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης τιμής**.

Άρα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε m≤f(x)≤M για κάθε x οπότε

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{x=\alpha}{\Rightarrow} m\le f(\alpha)\le M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \overset{x=\beta}{\Rightarrow} m\le f(\beta)\le M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(2) ⇒ 2m≤2f(β)≤2M……(3)

(1)+(3) ⇒ 3m≤f(α)+2f(β)≤3M

$$\Rightarrow m\le\frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3}\le M \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Επειδή f συνεχής στο [α,β], παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ m και M (θ. **ενδιαμέσων τιμών**), άρα και την τιμή $\frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3}$ λόγω της (4).

Άρα υπάρχει ξ∈[α,β] τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3}$.

Παρατήρηση: Το ερώτημα μπορεί να λυθεί και με απευθείας **Bolzano** στο διάστημα [α,β] για την g(x)=3f(x)-f(α)-2f(β).

ii) Αφού f συνεχής στο Δ, είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [γ,δ] και επομένως εφαρμόζεται το **θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης τιμής**.

Άρα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε m≤f(x)≤M για κάθε x οπότε

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{x=\gamma}{\Rightarrow} m\le f(\gamma)\le M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5) \\ \overset{x=\delta}{\Rightarrow} m\le f(\delta)\le M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6) \end{cases}$$

(5)+(6) ⇒ 2m≤f(γ)+f(δ)≤2M

$$\Rightarrow m\le\frac{f(\gamma)+f(\delta)}{2}\le M \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Επειδή f συνεχής στο [α,β], παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ m και M (θ. **ενδιαμέσων τιμών**), άρα και την τιμή $\frac{f(\gamma)+f(\delta)}{2}$ λόγω της (7).

Άρα υπάρχει x_0∈[γ,δ]⊆(α,β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{f(\gamma)+f(\delta)}{2}$.

iii) Αφού f συνεχής στο Δ, είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και επομένως εφαρμόζεται το **θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης τιμής**.

Άρα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε m≤f(x)≤M για κάθε x οπότε

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{x=\alpha}{\Rightarrow} m\le f(\alpha)\le M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8) \\ \overset{x=\gamma}{\Rightarrow} m\le f(\gamma)\le M \\ \Rightarrow 2m\le 2f(\gamma)\le 2M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9) \\ \overset{x=\beta}{\Rightarrow} m\le f(\beta)\le M \\ \Rightarrow 3m\le 3f(\beta)\le M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10) \end{cases}$$

(8)+(9)+(10) ⇒ 6m≤f(α)+2f(γ)+3f(β)≤6M

$$\Rightarrow m\le\frac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\beta)}{6}\le M \ldots(11)$$

Επειδή f συνεχής στο [α,β], παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ m και M (θ. **ενδιαμέσων τιμών**), άρα και την τιμή $\frac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\beta)}{6}$ λόγω της (11).

Άρα υπάρχει t∈[α,β] τέτοιο ώστε $f(t)=\frac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\beta)}{6}$.

36. Θεωρούμε μια μη σταθερή συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [α,β] και τις τιμές x_1, x_2, …, x_ν του [α,β].Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈[α,β], τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_\nu)}{\nu}$, ν∈N*.

Λύση: Αφού f συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] εφαρμόζεται το **θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης τιμής**.

Άρα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε m≤f(x)≤M για κάθε x οπότε

$$\left.\begin{array}{l} m\le f(x_1)\le M \\ m\le f(x_2)\le M \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ m\le f(x_\nu)\le M \end{array}\right\} \quad (+)$$

$$\nu m\le f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)\le \nu M$$

$$\Leftrightarrow m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}\le M \ldots\ldots\ldots(1)$$

Επειδή f συνεχής στο [α,β], παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ m και M (θ. **ενδιαμέσων τιμών**), άρα και την τιμή $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$ λόγω της (1).

Άρα υπάρχει ξ∈[α,β], τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_\nu)}{\nu}$.

37. **i)** Υπάρχει συνεχής συνάρτηση που να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές;
ii) εάν f συνεχής στο R, f(1)=2 και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, να δείξετε ότι f(x)=2 για κάθε x∈R.

Λύση:
i) Η μόνη συνάρτηση που παίρνει μόνο ακέραιες τιμές είναι η σταθερή συνάρτηση f(x)=c, c∈Z, γιατί αν υπήρχαν x_1,x_2∈R, με $f(x_1)=c_1$ και $f(x_2)=c_2$ με c_1, c_2∈Z και $c_1\neq c_2$, τότε επειδή η f είναι συνεχής θα έπαιρνε και όλες τις τιμές μεταξύ c_1 και c_2 (θ. **ενδιαμέσων τιμών**), άτοπο, γιατί η f παίρνει μόνο ακέραιες τιμές.
ii) Λόγω του προηγούμενου ερωτήματος, η συνάρτηση f είναι σταθερή και επειδή f(1)=2, θα είναι f(x)=2 για κάθε x∈R.

38. Αν f συνεχής στο [0,1] και f(0)=f(1), να δείξετε ότι:
i) υπάρχει x_0∈[0,1], τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{2})$,
ii) υπάρχει x_1∈[0,1], τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(x_1+\frac{1}{3})$.

Λύση: **i)** Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [0,1].
Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την συνάρτηση g στο διάστημα [0,$^1/_2$].

• g συνεχής στο [0,$^1/_2$] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\bullet\left\{\begin{array}{l} g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right) \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$g(0)\cdot g\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\le 0.$$

1η περίπτωση: $g(0)\cdot g\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$ g(0)=0 ή

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

2η περίπτωση: $g(0)\cdot g\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Τότε εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** για την f στο διάστημα [0,$^1/_2$].

Άρα υπάρχει x_0∈[0,$^1/_2$]⊆[0,1], τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{2})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Από (1) και (2) ⇒ υπάρχει x_0∈[0,1], τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{2})$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{3})$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,1].

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=f(0)-\cancel{f\left(\frac{1}{3}\right)} \\ h\left(\frac{1}{3}\right)=\cancel{f\left(\frac{1}{3}\right)}-\cancel{f\left(\frac{2}{3}\right)} \\ h\left(\frac{2}{3}\right)=\cancel{f\left(\frac{2}{3}\right)}-f(1) \end{array}\right\} +$$

$$h(0)+h\left(\frac{1}{3}\right)+h\left(\frac{2}{3}\right)=\cancel{f(0)}-\cancel{f(1)}\overset{f(0)=f(1)}{=\!=\!=\!=}0.$$

Άρα δυο από τα $h(0)$, $h\left(\frac{1}{3}\right)$, $h\left(\frac{2}{3}\right)$ είναι ετερόσημα και επομένως στο αντίστοιχο διάστημα εφαρμόζεται το θ. **Bolzano** και άρα υπάρχει x_1∈[0,1] τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$

$$\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_1+\frac{1}{3})=0$$

$$\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_1+\frac{1}{3}).$$

39. Εάν $\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0$, να δείξετε ότι $\beta^2\ge 4\alpha\gamma$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στο διάστημα [0,1].

• Συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική,

• $\left.\begin{cases} f(0)=\gamma \\ f(1)=a+\beta+\gamma \end{cases}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)=\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0$

Άρα η εξίσωση f(x)=0

$\Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Άρα $\Delta\geq 0$

$\Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$

$\Leftrightarrow \beta^2\geq 4\alpha\gamma$.

40. Εάν f:[0,2]→R, συνεχής με f(0)=f(2), να δείξετε ότι υπάρχουν $x_0,y_0\in[0,2]$, με $|x_0-y_0|=1$ τέτοια ώστε $f(x_0)=f(y_0)$.

Λύση: $|x_0-y_0|=1 \Leftrightarrow y_0-x_0=1$ ή $y_0-x_0=-1$

$\Leftrightarrow y_0=x_0+1$ ή $y_0=x_0-1$

1η περίπτωση: $y_0=x_0+1$.

Τότε η προς απόδειξη σχέση γίνεται

$f(x_0)=f(y_0) \Leftrightarrow f(x_0)=f(x_0+1)$

$\Leftrightarrow f(x_0)-f(x_0+1)=0$.

Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την συνάρτηση g(x)=f(x)-f(x+1) στο διάστημα [0,1].

• Συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

• $\left.\begin{cases} g(0)=f(0)-f(1) \\ g(1)=f(1)-f(2)\overset{f(0)=f(2)}{=\!=\!=\!=}f(1)-f(0) \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$g(0)\cdot g(1)=\left(f(0)-f(1)\right)^2\geq 0.$

Άρα ή g(0)=0 ή g(1)=0 ή g(0)g(1)<0 οπότε από θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $g(x_0)=0$.

Επομένως υπάρχει $x_0\in[0,1]$ με $g(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f(x_0)-f(x_0+1)=0$

$\Leftrightarrow f(x_0)=f(x_0+1)$

$\Leftrightarrow f(x_0)=f(y_0)$.

2η περίπτωση: $y_0=x_0-1$.

Τότε η προς απόδειξη σχέση γίνεται

$f(x_0)=f(y_0) \Leftrightarrow f(x_0)=f(x_0-1)$

$\Leftrightarrow f(x_0)-f(x_0-1)=0$.

Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την συνάρτηση g(x)=f(x)-f(x-1) στο διάστημα [1,2].

• Συνεχής στο [1,2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

• $\left.\begin{cases} g(1)=f(1)-f(0) \\ g(2)=f(2)-f(1)\overset{f(0)=f(2)}{=\!=\!=\!=}f(0)-f(1) \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$g(1)\cdot g(2)=\left(f(0)-f(1)\right)^2\geq 0.$

Άρα ή g(1)=0 ή g(2)=0 ή g(1)g(2)<0 οπότε από θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$ με $g(x_0)=0$.

Επομένως υπάρχει $x_0\in[1,2]$ με $g(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f(x_0)-f(x_0-1)=0$

$\Leftrightarrow f(x_0)=f(x_0-1)$

$\Leftrightarrow f(x_0)=f(y_0)$.

41. Έστω f συνεχής στο 0 και για κάθε x,y∈R ισχύει f(x+y)=f(x)συνy+f(y)συνx. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Λύση: f(x+y)=f(x)συνy+f(y)συνx

$\overset{x=y=0}{\Longleftrightarrow}$ f(0)=f(0)+f(0) ⇔ f(0)=0.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=$ **Θέτω $x=x_0+h$ Όταν $x\to x_0$ τότε $h\to 0$**

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)\text{συν}h+f(h)\text{συν}x_0\right)=$

$=f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\text{συν}h+\text{συν}x_0\lim\limits_{h\to 0}f(h)=$

$=f(x_0)\cancelto{1}{\text{συν}0}+\text{συν}x_0\cancelto{0}{f(0)}$ **Γιατί f συνεχής στο $x_0=0$**

$=f(x_0)$.

Άρα είναι συνεχής στο x_0 και επειδή x_0 τυχαίο, είναι συνεχής στο R.

42. Έστω f:R→R, και για κάθε x,y∈R ισχύει f(x+y)=f(x)+f(y). Να δείξετε ότι

i) αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο R.

ii) αν η f είναι συνεχής στο α∈R, τότε η f είναι συνεχής στο R.

Λύση:

i) f(x+y)=f(x)+f(y)

$\overset{x=y=0}{\Longleftrightarrow}$ f(0)=f(0)+f(0) ⇔ f(0)=0.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=$ **Θέτω $x=x_0+h$ Όταν $x\to x_0$ τότε $h\to 0$**

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)+f(h)\right)=$

$=f(x_0)+\lim\limits_{h\to 0}f(h)=$ **Γιατί f συνεχής στο 0**

$=f(x_0)+\cancelto{0}{f(0)}$

$=f(x_0)$.

Άρα είναι συνεχής στο x_0 και επειδή x_0 τυχαίο, είναι συνεχής στο R.

ii) Αφού f συνεχής στο α ⇔ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ **Θέτω $x=\alpha+h$ Όταν $x\to\alpha$ τότε $h\to 0$**

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\left(f(\alpha)+f(h)\right)=f(a)$

$\Leftrightarrow \cancel{f(a)}+\lim\limits_{h\to 0}f(h)=\cancel{f(a)}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}f(h)=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(0)$ ……γιατί f(0)=0

Άρα είναι συνεχής στο 0 και από το (i) ερώτημα θα είναι συνεχής στο R.

43. Έστω f:R*→R, και για κάθε x,y∈R* ισχύει f(xy)=f(x)+f(y). Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο R*.

Λύση: f(xy)=f(x)+f(y) $\overset{x=1}{\Longleftrightarrow}$ $\cancel{f(y)}$=f(1)+$\cancel{f(y)}$

⇔ f(1)=0.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 1} f(x_0h)=$ **Θέτω $x=x_0h$ Όταν $x\to x_0$ τότε $h\to 1$**

$=\lim\limits_{h\to 1}\left(f(x_0)+f(h)\right)=$

$=f(x_0)+\lim\limits_{h\to 1}f(h)=$ **Γιατί f συνεχής στο 1**

$= f(x_0) + \cancel{f(1)}^{\,0}$

$= f(x_0)$.

Άρα είναι συνεχής στο x_0 και επειδή x_0 τυχαίο στο R*, είναι συνεχής στο R*.

44. χψωχω