ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

4ον ΥΠΕΡΒΟΛΗ

1) Να ορίσετε για καθεμιά από τις παρακάτω υπερβολές, τις συν/νες των κορυφών τους, τις συν/νες των εστιών τους, την εκκεντρότητά τους και τις εξισώσεις των ασύμπτωτών τους:

i) $4x^2-45y^2=180$,
ii) $49y^2-16x^2=784$,
iii) $x^2-y^2=25$,
iv) $9x^2-64y^2=1$.

Λύση:

i) $4x^2-45y^2=180 \Leftrightarrow \frac{x^2}{45}-\frac{y^2}{4}=1.$

α= $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

β= $\sqrt{4}$ =2.

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=45+4=49 \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{49}$.

Κορυφές: $(\pm 3\sqrt{5},0)$

Εστίες: $(\pm\sqrt{49},0)$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{49}}{3\sqrt{5}}$.

Ασύμπτωτες: $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=\pm\frac{2}{3\sqrt{5}}x$.

ii) $49y^2-16x^2=784 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{49}=1.$

α= $\sqrt{16}$ =4.

β= $\sqrt{49}$ =7.

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=16+49=65 \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{65}$.

Κορυφές: $(0,\pm 4)$

Εστίες: $(0,\pm\sqrt{65})$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{65}}{4}$.

Ασύμπτωτες: $y=\pm\frac{a}{\beta}x \Leftrightarrow y=\pm\frac{4}{7}x$.

iii) $x^2-y^2=25 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1.$

α=β= $\sqrt{25}$ =5.

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25+25=50 \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Κορυφές: $(\pm 5,0)$

Εστίες: $(\pm 5\sqrt{2},0)$

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\sqrt{2}$,γιατί είναι ισοσκελής υπερβολή.

Ασύμπτωτες: $y=\pm x$ για τον ίδιο λόγο.

iv) $9x^2-64y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{64}}=1.$

$\alpha=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$.

$\beta=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$.

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{64}=\frac{73}{576} \Leftrightarrow \gamma=\frac{\sqrt{73}}{24}$.

Κορυφές: $\left(\pm\frac{1}{3},0\right)$.

Εστίες: $\left(\pm\frac{\sqrt{73}}{24},0\right)$.

Εκκεντρότητα: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{73}}{8}$.

Ασύμπτωτες: $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{8}x$.

2) Να βρεθεί η εξίσωση καθεμιάς από τις παρακάτω υπερβολές:

i) Άξονας (ΑΑ΄)=8, εστίες $(\pm 5,0)$,
ii) Εστία (8,0) κορυφή (6,0),
iii) διέρχεται από τα σημεία (3,1), (9,5),
iv) διέρχεται από το σημείο (3,-5) και έχει ασύμπτωτες $2x\pm y=0$,
v) κορυφή (6,0) και μια ασύμπτωτη $4x-3y=0$,
vi) έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και εφάπτεται της ευθείας (ε): $x-y+1=0$,
vii) έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και είναι ισοσκελής,
viii) Έχει εστίες $(\pm 3,0)$ και εφάπτεται της ευθείας (ε): $2x-y-4=0$.

Λύση:

i) α=4, γ=5.
$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=25-16=9$.

Άρα $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

ii) α=6, γ=8.
$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=64-36=28$.

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1.$$

iii) *1η περίπτωση*:

Έστω (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$……(1)

(3,1)∈(c) ⇔ $\frac{9}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}=1$……..(2)

(9,5)∈(c) ⇔ $\frac{81}{\alpha^2}-\frac{25}{\beta^2}=1$……..(3)

Θέτω $\frac{1}{\alpha^2}$ =ω (4) και $\frac{1}{\beta^2}$ =φ (5).

οπότε οι σχέσεις (2) & (3) γίνονται:

$$\begin{cases}9\omega-\phi=1\\81\omega-25\phi=1\end{cases}\cdot(-9)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-81\omega+9\phi=-9\\81\omega-25\phi=1\end{cases}(+)$$

16φ=8 ⇔ φ=$\frac{1}{2}$ $\overset{(5)}{\Leftrightarrow}$ $\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{2}$ ⇔ $\beta^2=2$.

ω=$\frac{1+\phi}{9}$=…=$\frac{1}{6}$ ⇔ $\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{6}$ ⇔ $\alpha^2=6$.

Άρα (1) ⇔ $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$.

2η περίπτωση:

Έστω (c): $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$……(6)

(3,1)∈(c) ⇔ $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{9}{\beta^2}=1$……..(7)

(9,5)∈(c) ⇔ $\frac{25}{\alpha^2}-\frac{81}{\beta^2}=1$……..(8)

Θέτω $\frac{1}{\alpha^2}$ =ω (9) και $\frac{1}{\beta^2}$ =φ (10).

οπότε οι σχέσεις (7) & (8) γίνονται:

$$\begin{cases}\omega-9\phi=1\\25\omega-81\phi=1\end{cases}\cdot(-9)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-9\omega+81\phi=-9\\25\omega-81\phi=1\end{cases}(+)$$

16ω=-8 ⇔ ω=$-\frac{1}{2}$ $\overset{(9)}{\Leftrightarrow}$ $\frac{1}{\alpha^2}=-\frac{1}{2}$ αδύνατη.

iv) *1η περίπτωση*:

Έστω (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$……..(1)

$$\left.\begin{array}{l}y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x\\y=\pm2x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\beta=2\alpha\text{……..(2)}$$

(3,-5)∈(c) ⇔ $\frac{9}{\alpha^2}-\frac{25}{4\alpha^2}=1$

⇔ $\frac{11}{4\alpha^2}=1$

⇔ $\alpha^2=\frac{11}{4}$ ……..(3)

Η (2) λόγω της (3) ⇔ $\beta^2=4\alpha^2=11$.

Άρα (1) ⇔ $\frac{4x^2}{11}-\frac{y^2}{11}=1$ ⇔ $4x^2-y^2=11$.

2η περίπτωση:

Έστω (c): $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$……..(4)

$$\left.\begin{array}{l}y=\pm\frac{\alpha}{\beta}x\\y=\pm2x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\alpha=2\beta\text{……..…(5)}$$

(3,-5)∈(c) ⇔ $\frac{25}{4\beta^2}-\frac{9}{\beta^2}=1$

⇔ $-\frac{11}{4\beta^2}=1$

που είναι αδύνατη.

v) Αφού η κορυφή (6,0) είναι στον άξονα xx΄, η έλλειψη έχει εξίσωση:

(c): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$……..(1)

α=6.

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{\beta}{\alpha}x\\y=\frac{4}{3}x\end{array}\right\}\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}=\frac{4}{3}$$

⇔ $\frac{\beta}{6}=\frac{4}{3}$ ⇔ β=8 …….(2)

Άρα $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

vi) Για την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ έχουμε:

α=5, β=4 και $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=25-16=9$.

Άρα γ=3 και εστίες (±3,0) στον άξονα xx΄.

Αφού οι εστίες είναι στον άξονα xx΄, η υπερβολή θα έχει εξίσωση:

(c): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$……...(1)

$\alpha^2=\gamma^2-\beta^2=9-\beta^2$, οπότε η (1) γίνεται:

$\frac{x^2}{9-\beta^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$……..…(2)

Αφού η ευθεία (ε): x-y+1=0

$\Leftrightarrow$ y=x+1……..…(3)

εφάπτεται της έλλειψης, θα πρέπει το σύστημα των (2) και (3) να έχει μοναδική λύση.

$(2)\overset{(3)}{\Rightarrow} \dfrac{x^2}{9-\beta^2}-\dfrac{(x+1)^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow$ **…**

$\Leftrightarrow$ **$(2\beta^2-9)x^2+2(\beta^2-9)x+(\beta^4-8\beta^2-9)=0$**….(4)

Η εξίσωση (4) είναι 2ου βαθμού ως προς x και για να έχει μοναδική λύση πρέπει Δ=0

$\Leftrightarrow 4(\beta^2-9)^2-4(2\beta^2-9)(\beta^4-8\beta^2-9)=0$

$\Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow \beta^6-13\beta^4+36\beta^2=0$

$\Leftrightarrow \beta^2(\beta^4-13\beta^2+36)=0$…. και επειδή $\beta\neq 0$

$\Leftrightarrow \beta^4-13\beta^2+36=0$……(5)

Η εξίσωση (5) είναι διτετράγωνη ως προς β και έχει λύσεις $\beta^2=9$ (απορρ. γιατί β<γ=3) και $\beta^2=4 \Leftrightarrow \alpha^2=\gamma^2-\beta^2=9-4=5$.

Άρα η ζητούμενη έλλειψη έχει εξίσωση $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Θα πρέπει όμως να δείξουμε ότι πράγματι η ευθεία (ε) εφάπτεται της υπερβολής.

Η εξίσωση (4) έχει διπλή ρίζα:

$x_1=-\dfrac{2(\beta^2-9)}{2(2\beta^2-9)}$=**…**=-5 και η (3) $\overset{x_1=-5}{\Leftrightarrow}$ y_1=-4.

Άρα το σημείο επαφής είναι M(-5,-4) και η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\dfrac{xx_1}{5}-\dfrac{yy_1}{4}=1$

$\Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow$ x-y+1=0.

vii) Για την έλλειψη $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ έχουμε:

α=5, β=4 και $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=25-16=9$.

Άρα γ=3 και εστίες (±3,0) στον άξονα xx΄.

Επειδή είναι ισοσκελής υπερβολή, έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{2}$ και από την σχέση $\varepsilon={}^{\gamma}/_{\alpha}$ βρίσκουμε $\alpha=\beta=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως η έλλειψη έχει εξίσωση $x^2-y^2={}^{9}/_{2}$.

viii) γ=3 και εστίες στον άξονα xx΄.

$\alpha^2=\gamma^2-\beta^2=9-\beta^2$……(1)

Έστω (c): $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$……..(2)

η εξίσωση της έλλειψης.

Εάν $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι:

$\dfrac{xx_1}{\alpha^2}-\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **$\beta^2x_1x-\alpha^2y_1y-\alpha^2\beta^2=0$**……(3)

Για να ταυτίζεται με την:

2x-1y-4=0,

πρέπει:

$$\frac{\beta^2x_1}{2}=\frac{a^2y_1}{1}=\frac{a^2\beta^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{a^2}{2} \text{.....(4)} \\ y_1=\dfrac{\beta^2}{4} \text{.....(5)} \end{cases}$$

Επίσης $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2}-\dfrac{y_1^2}{\beta^2}=1$ η οποία λόγω των (4) και (5) δίνει $4\alpha^2-\beta^2=16$ η οποία λόγω της (1) δίνει β=2.

Η (1) για β=2 δίνει $\alpha^2=5$ και η (2) γίνεται:

$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

<u>Γενική παρατήρηση</u>: Κάποια ερωτήματα της άσκησης επιλύθηκαν – αν και ήσαν παρόμοια – με διαφορετική μέθοδο, για να διδαχθούν όλοι οι δυνατοί τρόποι επίλυσης.

---

3) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ και την ευθεία (ε): 9x+2y-24=0.

<u>Λύση</u>: α=2 και β=3.

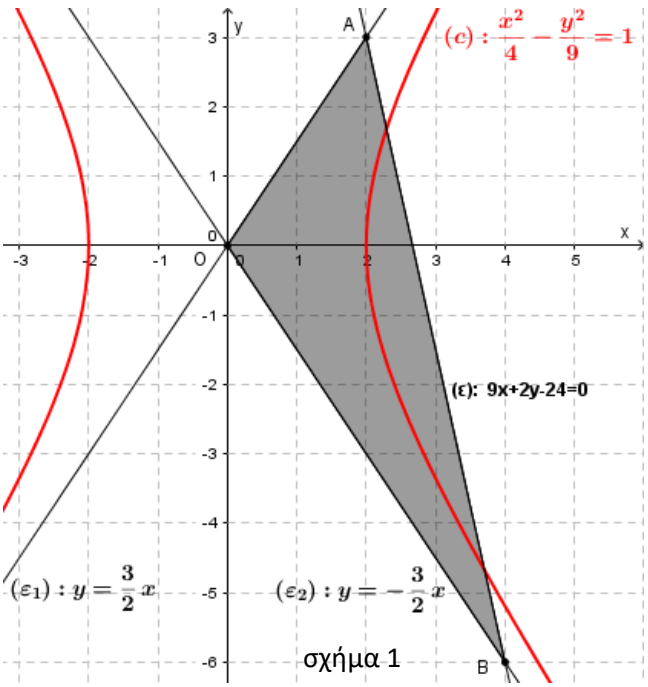
(ε_1): $y=\dfrac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow 2y=3x$.

(ε_2): $y=-\dfrac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow 2y=-3x$.

Από την λύση του συστήματος των (ε) και (ε_1) βρίσκουμε A(2,3) και από την λύση του συστήματος των (ε) και (ε_2) βρίσκουμε B(4,-6) (σχήμα 1).

$\overrightarrow{OA}$=(2,3) και $\overrightarrow{OB}$=(4,-6).

$(OAB)=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|-24|=12$.



σχήμα 1

4) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων (ε) της υπερβολής $25x^2-4y^2=100$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $3x-y=0$.

Λύση: Έστω (ε): $25xx_1-4yy_1=100$ όπου $P(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής (σχήμα 2).

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\alpha}=(4y_1,25x_1)$.

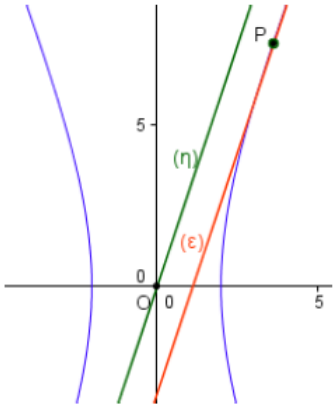
Ένα διάνυσμα παράλληλο στην (η) είναι το $\vec{\beta}=(1,3)$.

ε//η $\Leftrightarrow \vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4y_1 & 25x_1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 12y_1-25x_1=0$……(1)

Επίσης $25x_1^2-4y_1^2=100$……(2)

Από την λύση των (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{12y_1}{25} \\ 25\left(\dfrac{12y_1}{25}\right)^2-4y_1^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{12y_1}{25} \\ y_1=\pm\dfrac{25}{\sqrt{11}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{12}{\sqrt{11}} \\ y_1=\dfrac{25}{\sqrt{11}} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_1=-\dfrac{12}{\sqrt{11}} \\ y_1=-\dfrac{25}{\sqrt{11}} \end{cases}.$$



σχήμα 2

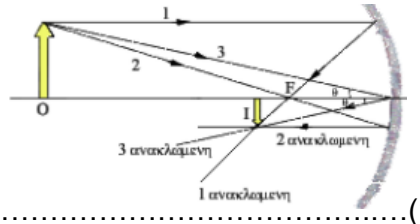
Οπότε προκύπτουν εφαπτόμενες $3x-y\pm\sqrt{11}=0$.

5) Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής $x^2-2y^2=8$ στα οποία η εφαπτόμενή της (ε) να είναι κάθετη στην ευθεία (η): $4x+5y=2$.

Λύση: Έστω (ε): $xx_1-2yy_1=8$ όπου $P(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής.

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\alpha}=(2y_1,x_1)$.

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην (η) είναι το $\vec{\beta}=(5,-4)$.



ε⊥η $\Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow 10y_1-4x_1=0$……(1)

Επίσης $x_1^2-2y_1^2=8$……(2)

Από την λύση των (1) και (2) βρίσκουμε $\begin{cases} x_1=\dfrac{5\sqrt{34}}{16} \\ y_1=\dfrac{\sqrt{34}}{8} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_1=-\dfrac{5\sqrt{34}}{16} \\ y_1=-\dfrac{\sqrt{34}}{8} \end{cases}$.

σχήμα 3

Οπότε προκύπτουν δυο σημεία επαφής (άρα δυο εφαπτόμενες), τα $\left(\dfrac{5\sqrt{34}}{16},\dfrac{\sqrt{34}}{8}\right)$ και $\left(-\dfrac{5\sqrt{34}}{16},-\dfrac{\sqrt{34}}{8}\right)$.

6) Φωτεινή ακτίνα ξεκινάει από την εστία Ε υπερβολικού κατόπτρου $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ που βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Ox , σχηματίζει γωνία α με τον Ox, τέτοια ώστε $\pi<\alpha<3\pi/2$ και εφα=2 και ανακλάται επί του κατόπτρου. Να κατασκευάσετε το κάτοπτρο, την προσπίπτουσα ακτίνα, την ανακλώμενη ακτίνα και να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς της ανακλώμενης ακτίνας.

Λύση: $\alpha^2=5$, $\beta^2=4$.

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=5+4=9 \Leftrightarrow \gamma=3$. Άρα η υπερβολή έχει εστίες Ε(3,0) και Ε΄(-3,0) (σχήμα 3).

Η ευθεία ΕΑ (προσπίπτουσα ακτίνα) διέρχεται από το σημείο Ε(3,0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=εφα=2.

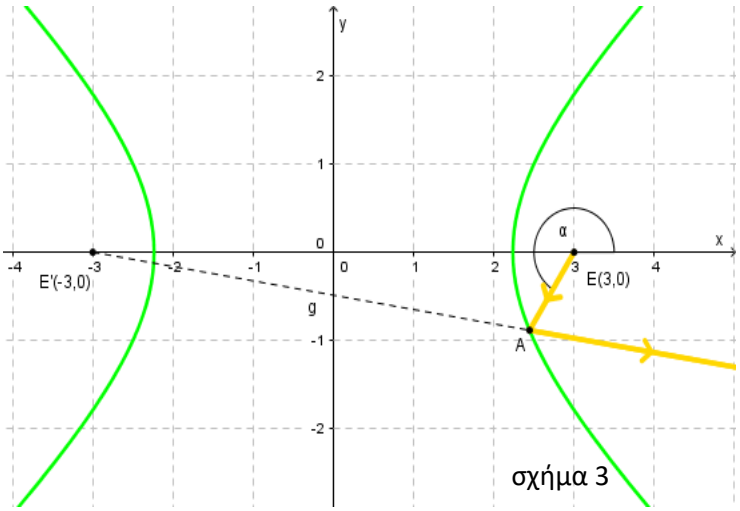
Άρα έχει εξίσωση $y-y_E=\lambda(x-x_E)$

$\Leftrightarrow y=2(x-3)$……(1)

Οι συν/νες του σημείου Α θα βρεθούν λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x^2-5y^2=20 \\ y=2(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}.$$

Επειδή $x_A<3$ (βλέπε σχήμα 3), το σημείο Α έχει συν/νες $A(^5/_2,-1)$.



σχήμα 3

Η ανακλώμενη ακτίνα έχει την διεύθυνση της ΑΕ΄ και έχει εξίσωση $2x+11y+6=0$ (?).

7) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ που έχει συντελεστή δ/νσης m, έχει εξίσωση $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-\beta^2}$.

Λύση: Έστω (ε): y=mx+κ η ζητούμενη ευθεία. Αφού η (ε) εφάπτεται της υπερβολής, το σύστημα $\begin{cases}\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2\\ y=mx+\kappa\end{cases}$ θα έχει μοναδική λύση.

$\Leftrightarrow \beta^2x^2-\alpha^2(mx+\kappa)^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\beta^2-\alpha^2m^2)x^2-2\alpha^2m\kappa x-\alpha^2(k^2+\beta^2)=0$……..(1)

Η εξίσωση (2) είναι 2ου βαθμού ως προς x και για να έχει μοναδική λύση πρέπει Δ=0

$\Leftrightarrow 4\alpha^4m^2\kappa^2-4\alpha^2(\beta^2-\alpha^2m^2)(k^2+\beta^2)=0$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \kappa=\pm\sqrt{a^2m^2-\beta^2}$.

Άρα (ε): $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-\beta^2}$.

Η μοναδικότητα της τομής όμως, δεν είναι ικανή σχέση ώστε η (ε) να εφάπτεται της υπερβολής. Αποδεικνύουμε ότι πράγματι η (ε) εφάπτεται της υπερβολής.

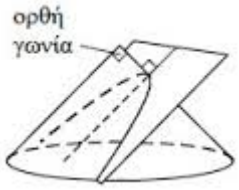
Εάν $M(x_1,y_1)$ το σημείο τομής, τότε η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $\beta^2xx_1-\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$……(2)

και έχει συντελεστή διεύθυνσης $m=\dfrac{\beta^2x_1}{a^2y_1} \Leftrightarrow x_1=\dfrac{ma^2y_1}{\beta^2}$ ……..(3)

$\beta^2x_1^2-\alpha^2y_1^2=\alpha^2\beta^2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow y_1=\pm\dfrac{\beta^2}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}$ ……(4)

$(3)\overset{(4)}{\Leftrightarrow} x_1=\pm\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}$ ……(5)

Η (2) λόγω των (4) και (5) γίνεται $\pm\beta^2x\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}\mp a^2y\dfrac{\beta^2}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}=\alpha^2\beta^2$



$$\Leftrightarrow \cancel{\alpha^2\beta^2}\left(x\frac{m}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}-y\frac{1}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}\right)=\pm\cancel{\alpha^2\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow x\frac{m}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}-y\frac{1}{\sqrt{a^2m^2-\beta^2}}=\pm1$$

$$\Leftrightarrow mx-y=\pm\sqrt{a^2m^2-\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-\beta^2}\ .$$

8) Να δείξετε ότι το μεταξύ των ασύμπτωτων τμήμα της εφαπτομένης μιας υπερβολής διχοτομείται από το σημείο επαφής.

Λύση: Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $\beta^2xx_1-\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$ (σχήμα 4).

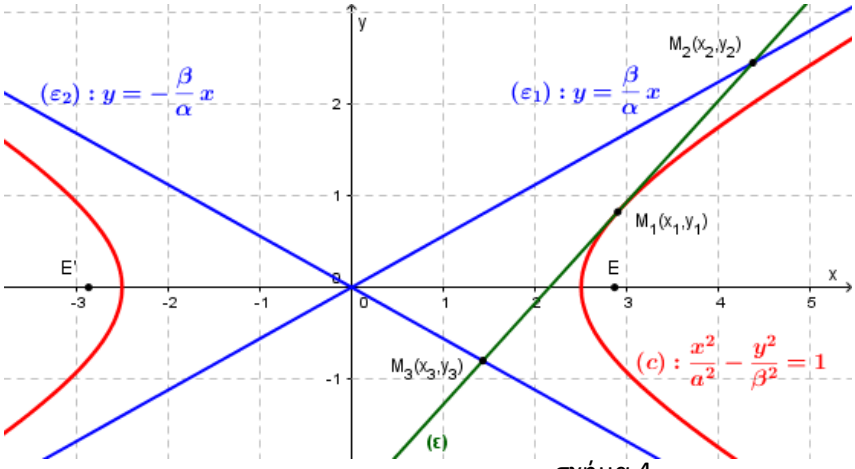
Λύνουμε τα συστήματα των (ε), (ε_1) και (ε), (ε_2) για να βρούμε τις συν/νες των M_2 και M_3 αντίστοιχα.

$\begin{cases}\beta^2xx_1-\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2\\ y=\dfrac{\beta}{\alpha}x\end{cases}$ …….(1)

$\Leftrightarrow \beta^2xx_1-\alpha\beta xy_1=\alpha^2\beta^2$

$\Leftrightarrow \beta xx_1-\alpha xy_1=\alpha^2\beta$

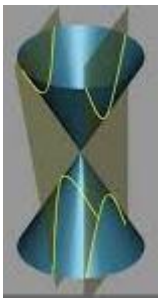
$\Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-\alpha y_1}$ ……..(2)



σχήμα 4

$(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow} y=\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1-\alpha y_1}$. Άρα $M_2\left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-\alpha y_1},\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1-\alpha y_1}\right)$, με $x_2=\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-\alpha y_1}$ και $y_2=\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1-\alpha y_1}$.

Ομοίως $M_3\left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1+\alpha y_1},\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1+\alpha y_1}\right)$, με $x_3=\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1+\alpha y_1}$ και $y_3=\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1+\alpha y_1}$.



☛ $x_2+x_3=\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-\alpha y_1}+\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1+\alpha y_1}=\alpha^2\beta\dfrac{\beta x_1+\cancel{\alpha y_1}+\beta x_1-\cancel{\alpha y_1}}{(\beta x_1-\alpha y_1)(\beta x_1+\alpha y_1)}$

$=\alpha^2\beta\dfrac{2\beta x_1}{\beta^2 x_1^2-\alpha^2 y_1^2}$

$=\dfrac{2\cancel{\alpha^2\beta^2}x_1}{\cancel{\alpha^2\beta^2}}$

$=2x_1$……(3)

☛ Ομοίως $y_2+y_3=\ldots=2\dfrac{\beta}{\alpha}x_1\overset{(1)}{=}2y_1$ ……(4)

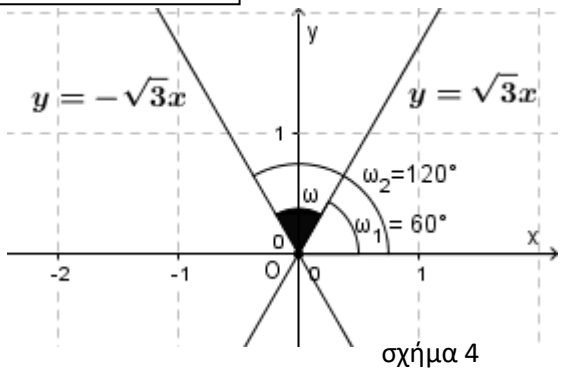
Από τις (3) και (4) έπεται το ζητούμενο.

9) Να βρεθεί η γωνία των ασύμπτωτων μιας υπερβολής με εκκεντρότητα ε=2.

Λύση: $\dfrac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}=\ldots=\sqrt{3}$.

Άρα οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y=\pm\sqrt{3}x$.

Εάν ω_1 και ω_2 οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές με τον ημιάξονα Ox, τότε (σχήμα 5), $\omega_1=60^0$ και $\omega_2=120^0$, οπότε $\omega=\omega_2-\omega_1=120^0-60^0=60^0$.



σχήμα 4

10) Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2+16y^2=144$ και της υπερβολής $x^2-64y^2=64$.

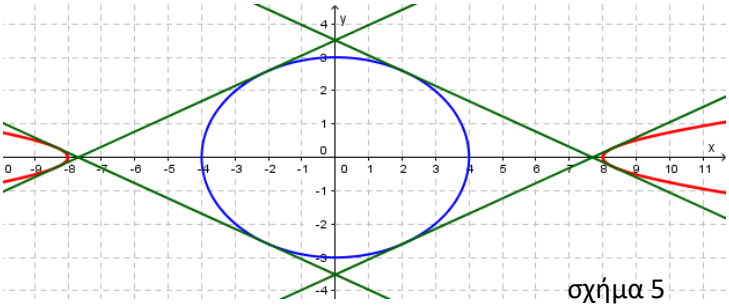
Λύση: Εάν $y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη, τότε οι εξισώσεις 2ου βαθμού:

$9x^2+16(\alpha x+\beta)^2=144$ και $x^2-64(\alpha x+\beta)^2=64$

πρέπει να έχουν διακρίνουσες ίσες με 0.

$$\begin{Bmatrix}\Delta_1=0\\ \Delta_2=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\beta^2-16\alpha^2=9\\ 64\alpha^2-\beta^2=1\end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\beta=\pm\dfrac{\sqrt{111}}{3}\\ \alpha=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{12}\end{Bmatrix}.$$


σχήμα 5

Τέσσερις εφαπτόμενες $y=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{12}x\pm\dfrac{\sqrt{111}}{3}$ (σχήμα 5).

11) Να δείξετε ότι κάθε εστία της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ απέχει από τις ασύμπτωτους απόσταση ίση με β.

Λύση: Έστω (ε): $y=\dfrac{\beta}{\alpha}x\Leftrightarrow\beta x-\alpha y=0$ η μια από τις δυο ασύμπτωτες και Ε(γ,0) η μια εστία.

$d(E,\varepsilon)=\dfrac{|\beta\gamma-\alpha\cdot 0+0|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\dfrac{\beta\gamma}{\gamma}=\beta$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τους άξονες, τόση θα είναι και η απόσταση της εστίας Ε από την άλλη ασύμπτωτη, και η απόσταση της εστίας Ε΄(-γ,0) από τις ασύμπτωτες.

12) Δίνεται η υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ και οι ευθείες $\delta: x=\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$, $\delta': x=-\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$. Έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο της έλλειψης.

a) Να δείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων του σημείου Μ από την ευθεία δ και από την εστία Ε(γ,0) είναι ίσος με την εκκεντρότητα ε.

b) Να δείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων του σημείου Μ από την ευθεία δ΄ και από την εστία Ε΄(-γ,0) είναι ίσος με την εκκεντρότητα ε.

c) $|\vec{EM}|=\dfrac{\rho}{1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\varphi}$ και $|\vec{E'M}|=\dfrac{\rho}{1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\theta}$ όπου ρ=β²/α και φ,θ οι γωνίες που σχηματίζουν οι ΕΜ και Ε΄Μ αντίστοιχα με τον ημιάξονα Ox.

Λύση: Έστω x>0.

d=x-$\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ και d΄=x+$\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ (σχήμα 6).....(1)

$\left.\begin{array}{l}(EM)^2=(x-\gamma)^2+y^2\\(E'M)^2=(x+\gamma)^2+y^2\end{array}\right\}\Rightarrow (E'M)^2-(EM)^2=\ldots=4x\gamma$

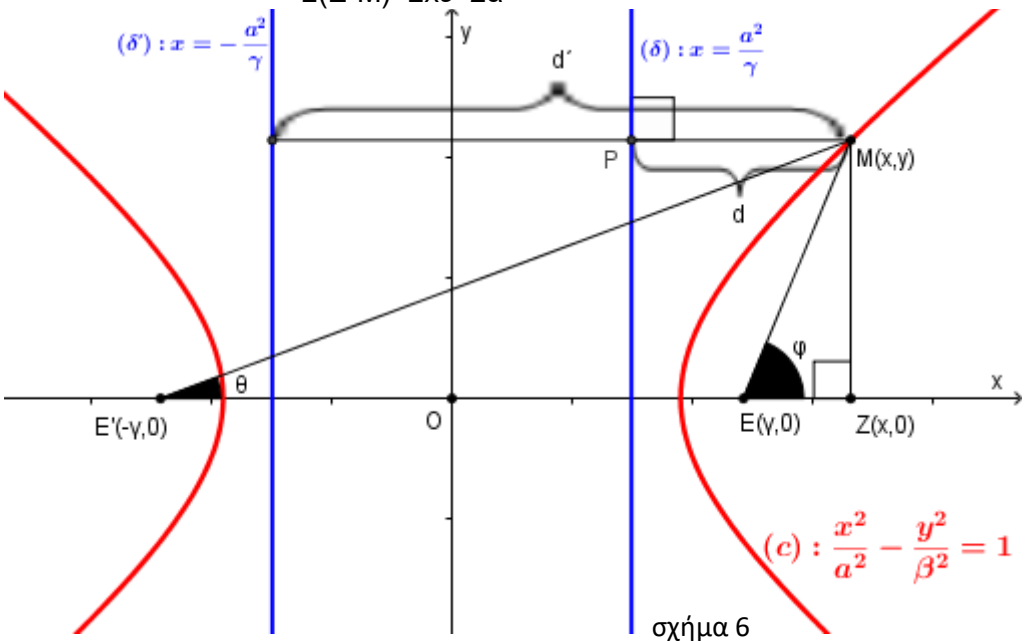
$\Rightarrow ((E'M)+(EM))\underbrace{((E'M)-(EM))}_{2\alpha}=4x\gamma$

$\Rightarrow ((E'M)+(EM))2\alpha=4x\gamma$

$\Rightarrow (E'M)+(EM)=2x\dfrac{\gamma}{\alpha}$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (E'M)+(EM)=2x\varepsilon.\\ \text{Επίσης } (E'M)-(EM)=2\alpha.\end{array}\right\}(+)$ .....(2) .....(3)

2(Ε΄Μ)=2xε+2α



σχήμα 6

$\Rightarrow (E'M)=x\varepsilon+\alpha$

$\Rightarrow (E'M)=\varepsilon\left(x+\dfrac{a}{\varepsilon}\right)$

$\Rightarrow (E'M)=\varepsilon\left(x+\dfrac{a^2}{\gamma}\right)$..... γιατί ε=$\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

$\Rightarrow (E'M)=\varepsilon d'$ ..... λόγω της (1).....(4)

Ομοίως (2)-(3) ⇒ ... ⇒ (ΕΜ)=εd.....(5)

a) Από την σχέση (5) ⇒ $\dfrac{(EM)}{d}=\varepsilon$.

b) Από την σχέση (4) ⇒ $\dfrac{(E'M)}{d'}=\varepsilon$.

c) ☛ $0^0<\varphi<90^0$.

Τότε (σχήμα 6) συνφ=$\dfrac{(EZ)}{(EM)}\overset{(5)}{=}\dfrac{x-\gamma}{\varepsilon d}$.....(6)

$$\frac{\rho}{1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\varphi}\overset{(6)}{=}\frac{\frac{\beta^2}{\alpha}}{1-\frac{x-\gamma}{d}}=\frac{d\beta^2}{\alpha(d-x+\gamma)}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{d\beta^2}{\alpha\left(\gamma-\frac{\alpha^2}{\gamma}\right)}$$

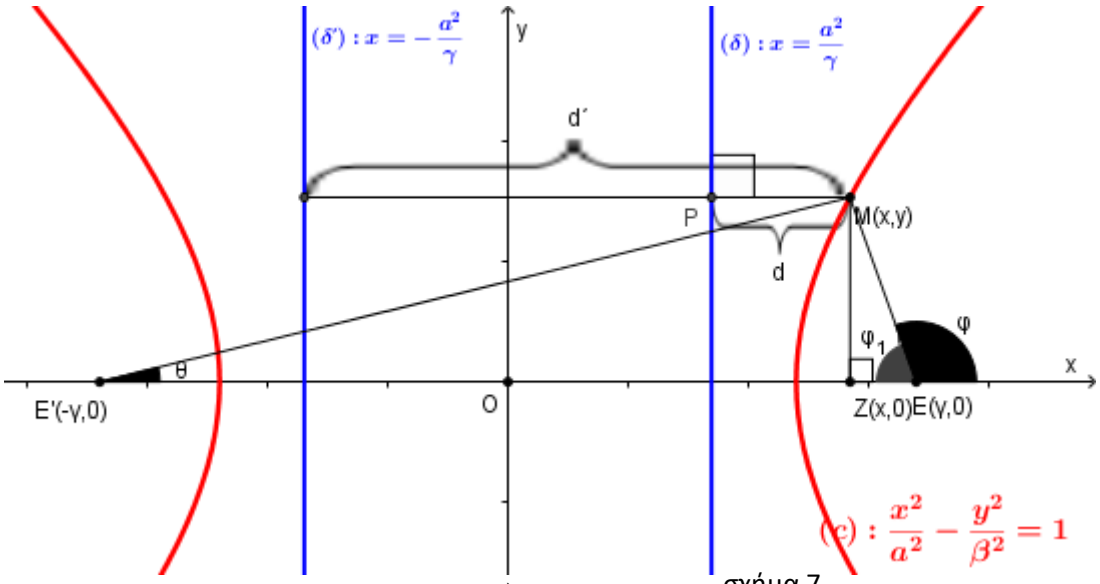
$$=\frac{\gamma d\beta^2}{\alpha\left(\gamma^2-\alpha^2\right)}$$

$$=\frac{\gamma d\beta^2}{\alpha\beta^2}$$

$=\frac{\gamma d}{\alpha}$=εd=(ΕΜ) ……λόγω της (5).

☛ $90^0<\varphi<180^0$.

Τότε (σχήμα 7) συνφ=-συνφ$_1$=$-\frac{(EZ)}{(EM)}\overset{(5)}{=}-\frac{\gamma-x}{\varepsilon d}=\frac{x-\gamma}{\varepsilon d}$ και καταλήγουμε πάλι στην σχέση (6).



σχήμα 7

Ομοίως αποδεικνύεται και η σχέση $|\overrightarrow{E'M}|=\frac{\rho}{1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\theta}$.

13) Δίνεται η υπερβολή $9x^2-16y^2=144$. Να βρείτε τα σημεία Α της υπερβολής για τα οποία ΑΕ⊥ΑΕ΄, όπου Ε, Ε΄ οι εστίες της.

Λύση: $9x^2-16y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

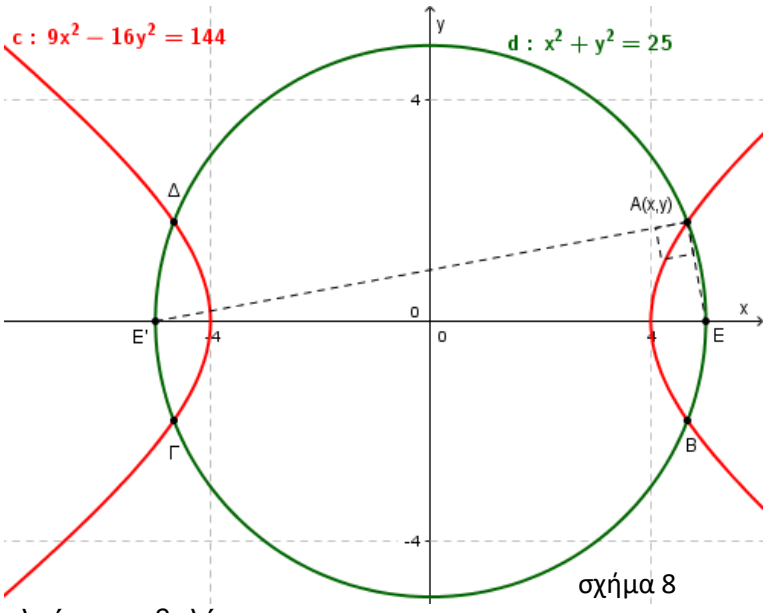
α=4, β=3 οπότε γ=$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ =5.

Άρα Ε(5,0) και Ε΄(-5,0).

Επειδή ΑΕ⊥ΑΕ΄, το Α είναι σημείο κύκλου διαμέτρου ΕΕ΄ που έχει εξίσωση $x^2+y^2=25$ (σχήμα 8).

Λύνουμε το σύστημα της παραβολής $9x^2-16y^2=144$ και του κύκλου $x^2+y^2=25$ και βρίσκουμε x=$\pm\frac{\sqrt{544}}{5}$ και y=$\pm\frac{9}{5}$.

(τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ που φαίνονται στο σχήμα 8).



σχήμα 8

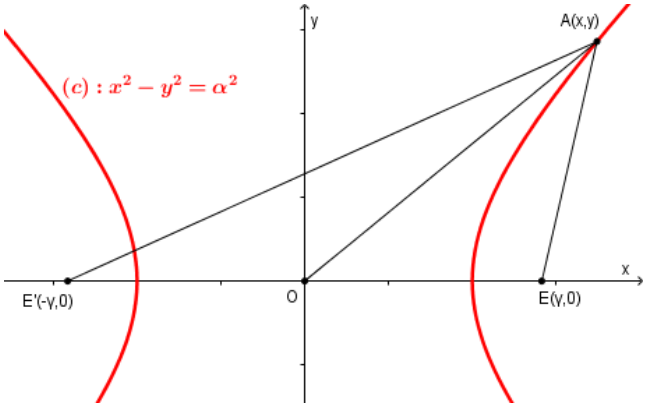
14) Αν Α(x,y) τυχαίο σημείο ισοσκελούς υπερβολής με εστίες Ε και Ε΄, να δείξετε ότι $(OA)^2=(AE)\cdot(AE')$.

Λύση: Έστω $x^2-y^2=\alpha^2$ η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής.

Τότε α=β και $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=2\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma=\alpha\sqrt{2}$ ……(1)

$(OA)^2=x^2+y^2$……(2)

(ΑΕ)=$\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$ και (ΑΕ΄)=$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}$ (σχήμα 9).



σχήμα 9

(ΑΕ)·(ΑΕ΄)=$\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}$

$=\sqrt{\left((x-\gamma)^2+y^2\right)\left((x+\gamma)^2+y^2\right)}$

$=\sqrt{\left(x^2-2x\gamma+\gamma^2+y^2\right)\left(x^2+2x\gamma+\gamma^2+y^2\right)}$

$=\sqrt{\left(x^2+\gamma^2+y^2\right)^2-(2x\gamma)^2}$ ….(διαφορά τετραγώνων)

$=\sqrt{\left(x^2+\gamma^2+y^2\right)^2-4x^2\gamma^2}$ ….. και λόγω της (1)

$=\sqrt{\left(x^2+2\alpha^2+y^2\right)^2-8\alpha^2x^2}$

$=\sqrt{\left(x^2+2(x^2-y^2)+y^2\right)^2-8(x^2-y^2)x^2}$ …..γιατί $x^2-y^2=\alpha^2$

=…=$\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2}$ = x^2+y^2 = $(OA)^2$…….. λόγω της (2).

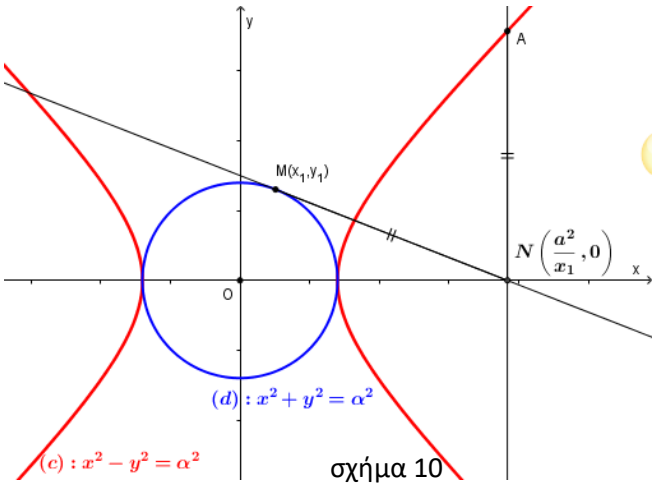
15) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ και η ισοσκελής υπερβολή $x^2-y^2=\alpha^2$. Από τυχαίο σημείο Μ του κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη του που τέμνει τον άξονα x΄Ox στο Ν. Να δείξετε ότι το μήκος του ευθ. τμήματος ΜΝ είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της τεταγμένης ενός από τα σημεία της υπερβολής που έχει τετμημένη ίση με (ΟΝ).

Λύση: Έστω $M(x_1,y_1)$.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\alpha^2$ η οποία για y=0, δίνει $x=\frac{a^2}{x_1}$.

Άρα $N\left(\frac{a^2}{x_1},0\right)$.

Η εξίσωση $x^2-y^2=\alpha^2$ για $x=\frac{a^2}{x_1}$ δίνει $|y|=\sqrt{\frac{a^4}{x_1^2}-a^2}$ που είναι η τεταγμένη του Α (σχήμα 10).



σχήμα 10

(ΜΝ)= $\sqrt{\left(x_1-\frac{a^2}{x_1}\right)^2+y_1^2}$

$=\sqrt{x_1^2-2a^2+\frac{a^4}{x_1^2}+y_1^2}$ …… και επειδή $x_1^2+y_1^2=\alpha^2$

$=\sqrt{\alpha^2-2a^2+\frac{a^4}{x_1^2}}$

$=\sqrt{\frac{a^4}{x_1^2}-a^2}$ =|y|=(ΝΑ).

16) Έστω $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ είναι συζυγείς υπερβολές με εκκεντρότητες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2$.

Λύση: $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$.

$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2=\frac{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\gamma^2\cdot\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}=\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2$.

17) Έστω φ η θετική ρίζα της εξίσωσης t^2-t-1=0 και η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\frac{a}{\beta}=\sqrt{\phi}$. Να δείξετε ότι $\varepsilon=\sqrt{\phi}$.

Λύση: $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}=\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{\phi}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{\phi}}=\sqrt{\frac{\phi+1}{\phi}}=\sqrt{\frac{\phi^2}{\phi}}=\sqrt{\phi}$.

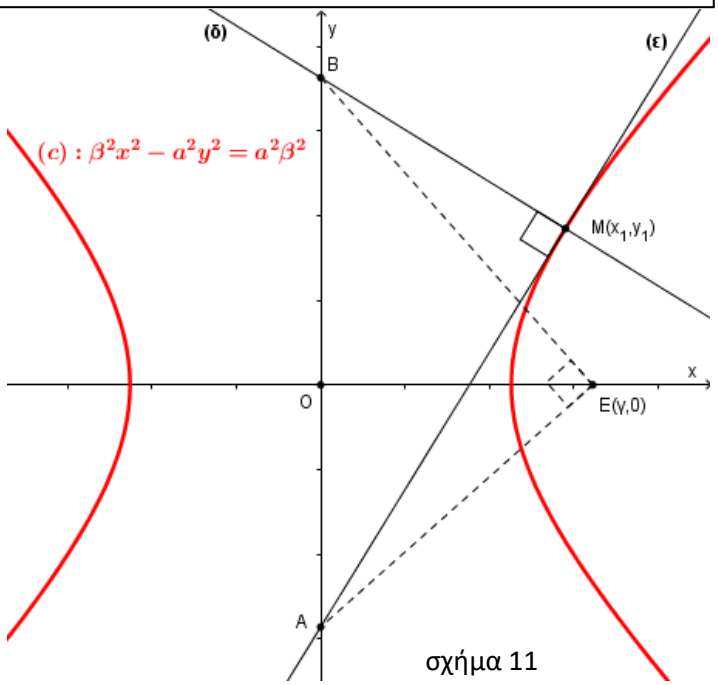
18) Αν η εφαπτομένη (ε) υπερβολής σε τυχαίο της σημείο M∉xx΄ και η κάθετη στην (ε) στο σημείο M τέμνουν τον άξονα y΄Oy στα A και B, να δείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου AB διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.

Λύση: Έστω E(γ,0).

Αρκεί να δείξουμε ότι AE ⊥ BE (σχήμα 11).

Η εφαπτομένη (ε) στο σημείο $M(x_1,y_1)$, $y_1\neq0$ έχει εξίσωση $\beta^2xx_1-\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\frac{\beta^2x_1}{a^2y_1}$ και για x=0 $\Rightarrow$ $y=-\frac{\beta^2}{y_1}$ τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο $A\left(0,-\frac{\beta^2}{y_1}\right)$.

Η κάθετη ευθεία (δ) στην ευθεία (ε) στο σημείο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-\frac{a^2y_1}{\beta^2x_1}$ και εξίσωση $y-y_1=-\frac{a^2y_1}{\beta^2x_1}(x-x_1)$ η οποία για x=0 δίνει $y=y_1+\frac{a^2y_1}{\beta^2}=\frac{(a^2+\beta^2)y_1}{\beta^2}=\frac{\gamma^2y_1}{\beta^2}$ και επομένως $B\left(0,\frac{\gamma^2y_1}{\beta^2}\right)$.



σχήμα 11

☛ $\vec{AE}=\left(\gamma,\frac{\beta^2}{y_1}\right)$

☛ $\vec{BE}=\left(\gamma,-\frac{y_1\gamma^2}{\beta^2}\right)$

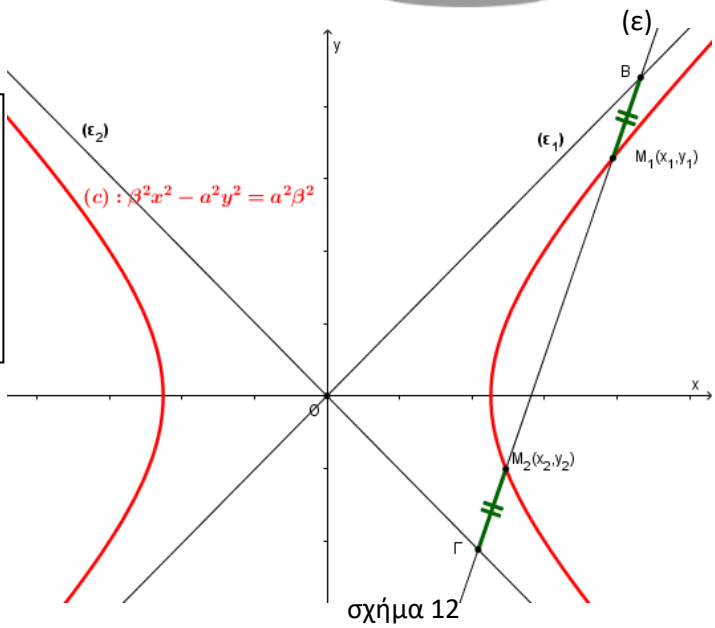
$\Rightarrow \vec{AE}\cdot\vec{BE}=\gamma^2-\gamma^2=0\Rightarrow \vec{AE}\perp\vec{BE}$.

19) **Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Τυχαία ευθεία (ε) τέμνει την υπερβολή στα σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ και τις ασύμπτωτές της στα σημεία B και Γ. Να δείξετε ότι τα τμήματα της (ε) που είναι μεταξύ των ασύμπτωτων και της υπερβολής είναι ίσα.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα BΓ και M_1M_2 έχουν κοινό μέσο (σχήμα 12).

☛ Εάν η ευθεία (ε) έχει εξίσωση x=κ, τότε λόγω συμμετρίας είναι $(M_1B)=(M_2Γ)$ (σχήμα 13).

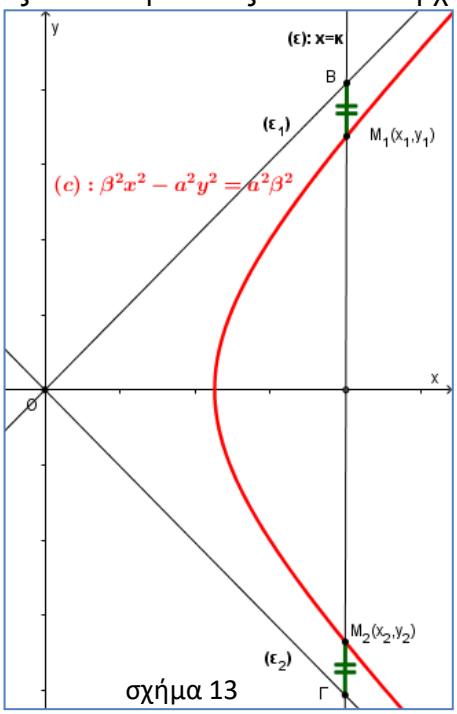
☛ Εάν η ευθεία (ε) έχει εξίσωση y=κ, τότε λόγω συμμετρίας είναι $(M_1B)=(M_2Γ)$ (σχήμα 14).



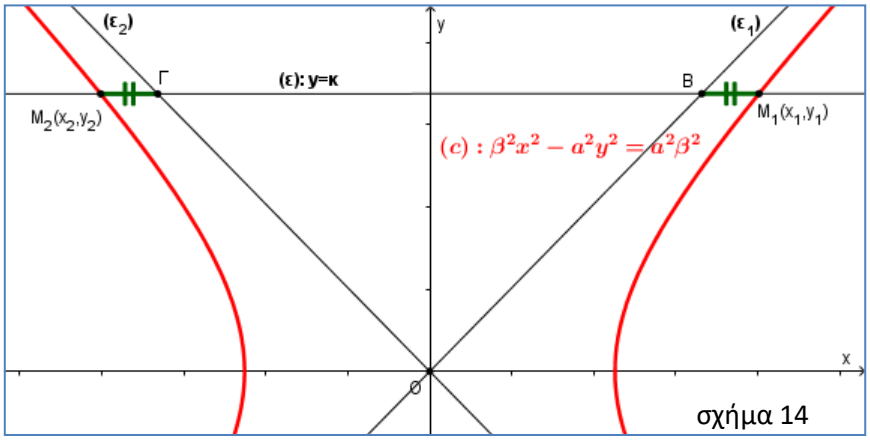
σχήμα 12

☛ Έστω (ε): y=κx+λ (σχήμα 12) με $\kappa\neq\pm\frac{\beta}{\alpha}$, γιατί αν $\kappa=\pm\frac{\beta}{\alpha}$ η ευθεία (ε) είναι παράλληλη σε μια από

τις δυο ασύμπτωτες και δεν υπάρχει ή το σημείο Β ή το σημείο Γ.



σχήμα 13



σχήμα 14

Οι συντεταγμένες των M_1 και M_2 είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} \beta^2x^2-a^2y^2=a^2\beta^2 \\ y=\kappa x+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2x^2-\alpha^2(\kappa x+\lambda)^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ **$(\beta^2-\alpha^2\kappa^2)x^2-2\alpha^2\kappa\lambda x-\alpha^2(\beta^2-\lambda^2)=0$**……(1)

Επειδή $\kappa\neq\pm\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta^2-\alpha^2\kappa^2\neq 0$ και η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x.

Εάν M το μέσο του τμήματος M_1M_2, τότε $x_M=\frac{x_1+x_2}{2} \overset{Vieta}{=} \frac{2a^2\kappa\lambda}{2(\beta^2-\alpha^2\kappa^2)}=\frac{a^2\kappa\lambda}{\beta^2-\alpha^2\kappa^2}$ ……..(2)

και $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\kappa x_1+\lambda+\kappa x_2+\lambda}{2}$

$=\frac{\kappa(x_1+x_2)+2\lambda}{2}$

$=\frac{2\kappa x_M+2\lambda}{2}=\kappa x_M+\lambda$……..(3)

Οι συντεταγμένες των Β και Γ είναι οι λύσεις των συστημάτων:

$\begin{cases} y=\frac{\beta}{\alpha}x \\ y=\kappa x+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_B=\frac{\alpha\lambda}{\beta-\kappa\alpha}$.

$\begin{cases} y=-\frac{\beta}{\alpha}x \\ y=\kappa x+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_\Gamma=-\frac{\alpha\lambda}{\beta+\kappa\alpha}$.

Το μέσο N του τμήματος ΒΓ έχει συντεταγμένες:

$x_N=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=\frac{\frac{\alpha\lambda}{\beta-\kappa\alpha}-\frac{\alpha\lambda}{\beta+\kappa\alpha}}{2}=\ldots=\frac{a^2\kappa\lambda}{\beta^2-\alpha^2\kappa^2}=x_M$…… λόγω της (2).

και $y_N=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=\frac{\kappa x_B+\lambda+\kappa x_\Gamma+\lambda}{2}=\frac{\kappa(x_B+x_\Gamma)+2\lambda}{2}=\frac{2\kappa x_N+2\lambda}{2}=\kappa x_N+\lambda=\kappa x_M+\lambda=y_M$…λόγω των (2) και (3).

20) Δίνεται η υπερβολή $x^2-2y^2=4$ και η ευθεία (ε): 3x+4y-1=0. Αφού διαπιστώσετε ότι δεν τέμνονται, να βρείτε το σημείο της υπερβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την (ε).

Λύση: Το ότι δεν τέμνονται αποδεικνύεται εύκολα (?).

Έστω $M(x_1,y_1)$ το ζητούμενο σημείο. Τότε $x_1^2=2y_1^2+4$……(1)

Έστω d=d(M,ε). Τότε d=$\frac{|3x_1+4y_1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow \frac{|3x_1+4y_1-1|}{5}$=d ⇔ $|3x_1+4y_1-1|=5d$.

☛ $3x_1+4y_1-1=5d$.

$\left.\begin{cases}3x_1+4y_1-1=5d\\ x_1^2=2y_1^2+4\end{cases}\right\} \Leftrightarrow$ **… ⇔ $2y_1^2+8(1+5d)y_1+36-(5d+1)^2=0$**……(2)

Η εξίσωση (2) είναι 2ου βαθμού ως προς y_1 και επειδή $y_1 \in R$, πρέπει Δ≥0 ⇔ **…**

⇔ $(5d+1)^2-4\geq 0$
⇔ $(5d+1)^2\geq 4$
⇔ $5d+1\geq 2$
⇔ $d\geq {}^1/_5$
⇔ $d_{min}={}^1/_5$……(3)

☛ $3x_1+4y_1-1=-5d$.

$\left.\begin{cases}3x_1+4y_1-1=-5d\\ x_1^2=2y_1^2+4\end{cases}\right\} \Leftrightarrow$ **… ⇔ $2y_1^2+8(1-5d)y_1+36-(1-5d)^2=0$**……(4)

Η εξίσωση (4) είναι 2ου βαθμού ως προς y_1 και επειδή $y_1 \in R$, πρέπει Δ≥0 ⇔ **…**
⇔ $(5d-1)^2-4\geq 0$
⇔ $(5d-1)^2\geq 4$
⇔ $5d-1\geq 2$
⇔ $d\geq {}^3/_5$
⇔ $d_{min}={}^3/_5$……(5)

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $d_{min}={}^1/_5$.
Η εξίσωση (2) για $d={}^1/_5$ γίνεται $2y_1^2+16y_1+32=0 \Leftrightarrow y_1^2+8y_1+16=0 \Leftrightarrow (y_1+4)^2=0 \Leftrightarrow y_1=-4$ και από την σχέση $3x_1+4y_1-1=5d$ για $y_1=-4$ και $d={}^1/_5$ δίνει x=6. Άρα M(6,-4).

21) **Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία μιας έλλειψης και μιας υπερβολής που έχουν κοινές εστίες, είναι κάθετες.

Λύση: Έστω (c_1): $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{\beta_1^2}=1$ (1) η εξίσωση της υπερβολής και (c_2): $\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{\beta_2^2}=1$ (2) η εξίσωση της έλλειψης. Εάν $2\gamma_1$ και $2\gamma_2$ αντίστοιχα οι εστιακές τους αποστάσεις, επειδή έχουν τις ίδιες εστίες έχουμε:
$\gamma_1=\gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1^2=\gamma_2^2 \Leftrightarrow \alpha_1^2+\beta_1^2=\alpha_2^2-\beta_2^2 \Leftrightarrow \alpha_2^2-\alpha_1^2=\beta_1^2+\beta_2^2$……(3)
Έστω $M(x_1,y_1)$ ένα από τα σημεία τομής τους.
Τότε οι εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) των εφαπτόμενων της υπερβολής και της έλλειψης αντίστοιχα στο σημείο M έχουν εξισώσεις (ε_1): $\beta_1^2xx_1-\alpha_1^2yy_1=\alpha_1^2\beta_1^2$.
και (ε_2): $\beta_2^2xx_1+\alpha_2^2yy_1=\beta_2^2\alpha_2^2$.

$$\left.\begin{cases}\beta_1^2x_1^2-a_1^2y_1^2=a_1^2\beta_1^2\\ \beta_2^2x_1^2+a_2^2y_1^2=a_2^2\beta_2^2\end{cases}\right\}\begin{matrix}\cdot a_2^2\\ \cdot a_1^2\end{matrix} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}a_2^2\beta_1^2x_1^2-\cancel{a_2^2a_1^2y_1^2}=a_2^2a_1^2\beta_1^2\\ a_1^2\beta_2^2x_1^2+\cancel{a_1^2a_2^2y_1^2}=a_1^2a_2^2\beta_2^2\end{cases}\right\}(4)\ (+)$$

$$x_1^2=\frac{a_2^2a_1^2(\beta_1^2+\beta_2^2)}{a_2^2\beta_1^2+a_1^2\beta_2^2} \Leftrightarrow x_1^2=\frac{a_2^2a_1^2(\beta_1^2+\beta_2^2)}{D}\ \text{……(5)}$$

όπου D=$a_2^2\beta_1^2+a_1^2\beta_2^2$.

Από την (4) παίρνουμε $y_1^2=\frac{\beta_2^2\beta_1^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{D}\overset{(3)}{=}\frac{\beta_2^2\beta_1^2(\beta_2^2+\beta_1^2)}{D}$ ……(6)

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1) είναι το $\vec{u}=(a_1^2y_1,\beta_1^2x_1)$.

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_2) είναι το $\vec{v}=(-a_2^2y_1,\beta_2^2x_1)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-a_1^2a_2^2y_1^2+\beta_1^2\beta_2^2x_1^2$=…… λόγω των (5) & (6)

$$=-\cancel{a_1^2a_2^2\frac{\beta_2^2\beta_1^2(\beta_2^2+\beta_1^2)}{D}}+\cancel{\beta_1^2\beta_2^2\frac{a_2^2a_1^2(\beta_1^2+\beta_2^2)}{D}}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow (\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2).$$

22) **i)** Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων $M\left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta},4\varepsilon\phi\theta\right)$, αν θ∈(-π, π) με θ≠π/2,

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω γ.τ. που διέρχονται από το σημείο P(1,4),

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω γ.τ. που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): 5x-3y+3=0.

Λύση:

i) Θέτω $\begin{cases}\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta}=x\\ 4\varepsilon\phi\theta=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\\ \varepsilon\phi\theta=\frac{y}{4}\end{cases}$ (1).

$1+\varepsilon\varphi^2\theta=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}1+\frac{y^2}{16}=\frac{x^2}{9}\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ υπερβολή με α=3, β=4.

ii) Το P(1,4) δεν είναι σημείο της υπερβολής.

Εάν $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $16xx_1-9yy_1=144$……(2)

$P\in(\varepsilon)\Leftrightarrow 16x_1-36y_1=144\Leftrightarrow 4x_1-9y_1=36$.

$\begin{cases}4x_1-9y_1=36\\ 16x_1^2-9y_1^2=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x_1=9(y_1+4)\\ (4x_1)^2-9y_1^2=144\end{cases}$ (3) $\Leftrightarrow 81(y_1+4)^2-9y_1^2=144$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y_1^2+9y_1+16=0$.

$\Delta=17$ και $y_1=\frac{-9\pm\sqrt{17}}{2}$.

Η σχέση (3) $\Leftrightarrow x_1=\frac{9(-1\pm\sqrt{17})}{8}$.

(2) ⇔ (ε): $4(-1+\sqrt{17})x-(-9+\sqrt{17})y-32=0$ ή $4(-1-\sqrt{17})x+(9+\sqrt{17})y-32=0$ (δυο εφαπτόμενες).

iii) Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση 5x-3y+κ=0……(4)

Για να ταυτίζεται με την ευθεία $16xx_1-9yy_1-144=0$ πρέπει $\frac{5}{16x_1}=\frac{-3}{-9y_1}=\frac{\kappa}{-144}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{45}{\kappa} & (5)\\ y_1=-\frac{48}{\kappa} & (6)\end{cases}$.

Η σχέση $16x_1^2-9y_1^2=144$ με την βοήθεια των (5) και (6) δίνει κ=±9.

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση 5x-3y±9=0.

23) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$, όταν το λ μεταβάλλεται στο R*.

Λύση: Θέτω $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=x\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{2x}{\sqrt{3}}\\ \left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{2y}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{4x^2}{3}\\ \left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)^2=2y^2\end{cases}$ (-)

$4=\frac{4x^2}{3}-2y^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

που είναι υπερβολή.

24) Δίνεται η ευθεία (ε): 4y-9=0 και το σημείο E(0,4). Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M(x,y) του επιπέδου για τα οποία η απόστασή τους από το E είναι ίση με τα $^4/_3$ της απόστασής τους από την (ε).

Λύση: $(EM)=\frac{4}{3}d(M,\varepsilon)\Leftrightarrow 3(EM)=4d(M,\varepsilon)\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+(y-4)^2}=4\frac{|4y-9|}{4}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+(y-4)^2}=|4y-9|$

$\Leftrightarrow 9\left(x^2+(y-4)^2\right)=(4y-9)^2$

$\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 7y^2-9x^2=63$, που παριστάνει υπερβολή.

25) Δίνεται η ευθεία (ε): 3y-8=0 και το σημείο Ε(0,6). Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου για τα οποία η απόστασή τους από το Ε είναι ίση με τα $^3/_2$ της απόστασής τους από την (ε).

Λύση: (ΕΜ)=$^3/_2$d(M,ε) ⇔ 2(ΕΜ)=3d(M,ε) ⇔ $2\sqrt{x^2+(y-6)^2}=3\dfrac{|3y-8|}{3}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-6)^2}=|3y-8|$$
$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+(y-6)^2\right)=(3y-8)^2$$

⇔ … ⇔ $5y^2-4x^2=80$, που παριστάνει υπερβολή.

26) **i)** Να δείξετε ότι τα σημεία Μ(x,y) με $x=a\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ και $y=\beta\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$ όπου α, β, σταθεροί θετικοί πραγματικοί, όταν το θ μεταβάλλεται, ανήκει στην υπερβολή $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$,

ii) αν Μ(x,y), x>0 ,y>0 τυχαίο σημείο της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, να δείξετε ότι υπάρχει θ∈R, τέτοιο ώστε $x=a\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ και $y=\beta\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$.

Δίνεται ο Νεπέρειος αριθμός e≈2,71.

Λύση:

i) $$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\\[2mm] \dfrac{y}{\beta}=\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)^2}{4}\\[2mm] \dfrac{y^2}{\beta^2}=\dfrac{\left(e^{\theta}-e^{-\theta}\right)^2}{4}\end{cases}\overset{(-)}{\Rightarrow}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1.$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\\[2mm] \dfrac{y}{\beta}=\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\beta}=e^{\theta}\Leftrightarrow\theta=\ln\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\beta}\right).$$

27) Στο ίδιο σύστημα αξόνων θεωρούμε τις γραφικές παραστάσεις της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\phi^2}+y^2=1$ και της υπερβολής $\dfrac{x^2}{\phi}-y^2=1$, όπου φ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2=x+1$. Να δείξετε ότι:

a) Η υπερβολή έχει ασύμπτωτες $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\phi}}x$,

b) οι ασύμπτωτες τέμνουν την έλλειψη στα σημεία Γ΄(1,1/$\sqrt{\phi}$), Γ΄΄(1,-1/$\sqrt{\phi}$), Θ΄(-1,1/$\sqrt{\phi}$), Θ΄΄(-1,-1/$\sqrt{\phi}$) και οι ευθείες Γ΄Γ΄΄, Θ΄Θ΄΄ τον άξονα x΄Ox στα σημεία Γ(1,0) και Θ(-1,0) αντίστοιχα,

c) οι ΓΓ΄, ΘΘ΄ είναι οι διευθετούσες της υπερβολής,

d) οι κορυφές Δ και Ι της υπερβολής είναι οι εστίες της έλλειψης,

e) οι κορυφές Α και Κ της έλλειψης είναι οι εστίες της υπερβολής,

f) από το Δ φέρνουμε κάθετη στον άξονα x΄Ox που τέμνει την έλλειψη στα Δ΄, Λ΄ και τις ασύμπτωτες της υπερβολής στα Δ΄΄ και Λ΄΄. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης από το Δ΄ τέμνει τον άξονα x΄Ox στο Ε και τον άξονα y΄Oy στο Ζ, να δείξετε ότι η διευθετούσα της έλλειψης διέρχεται από το Ε,

g) να δείξετε ότι οι τετμημένες των Γ, Δ, Α και Ε σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ=$\sqrt{\phi}$,

h) το ΟΑ διαιρείται από το Γ σε χρυσό λόγο,

i) το ΟΕ διαιρείται από το Δ σε χρυσό λόγο,

j) $|\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}|=\sqrt{-\phi'}$, $|\overrightarrow{\Delta\Delta'}|=-\phi'$ και $|\overrightarrow{\Delta\Delta''}|=1$, όπου φ΄ η άλλη ρίζα της εξίσωσης $x^2=x+1$,

k) αν οι κάθετες από τα Α και Ε στον άξονα x΄Ox τέμνουν τα τμήματα της υπερβολής και της ασύμπτωτής της που είναι πάνω από τον άξονα x΄Ox στα Α΄, Α΄΄ και Ε΄, Ε΄΄ αντίστοιχα, τότε (ΑΑ΄)=(ΓΓ΄) και (ΑΑ΄΄)=(ΕΕ΄΄),

l) το Γ΄ είναι κοινό σημείο της έλλειψης, της διευθετούσας και της ασύμπτωτου της υπερβολής,

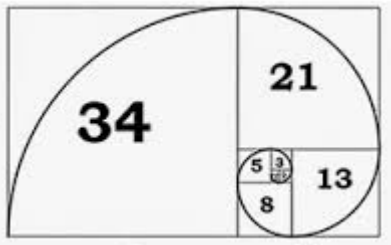
m) τα τμήματα ΔΔ΄΄, ΑΑ΄΄ διαιρούνται από τα Δ΄ και Α΄ αντίστοιχα σε χρυσό λόγο,

n) κάθε ευθεία που διέρχεται από το Ο και τέμνει την ΕΕ΄, διαιρείται από την ΔΔ΄ σε χρυσό λόγο,
o) το Δ΄ διαιρεί το ΕΖ σε χρυσό λόγο,
p) η εφαπτομένη της υπερβολής στο Α΄ διέρχεται από το Γ και
q) τα σημεία Ο, Δ΄, Α΄ είναι συνευθειακά.

Λύση:

a) Για την υπερβολή $\alpha_1=\sqrt{\phi}$, $\beta_1=1$ και $\gamma_1=\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}=\sqrt{\phi+1}=\sqrt{\phi^2}=\varphi$…… γιατί $\varphi^2=\varphi+1$

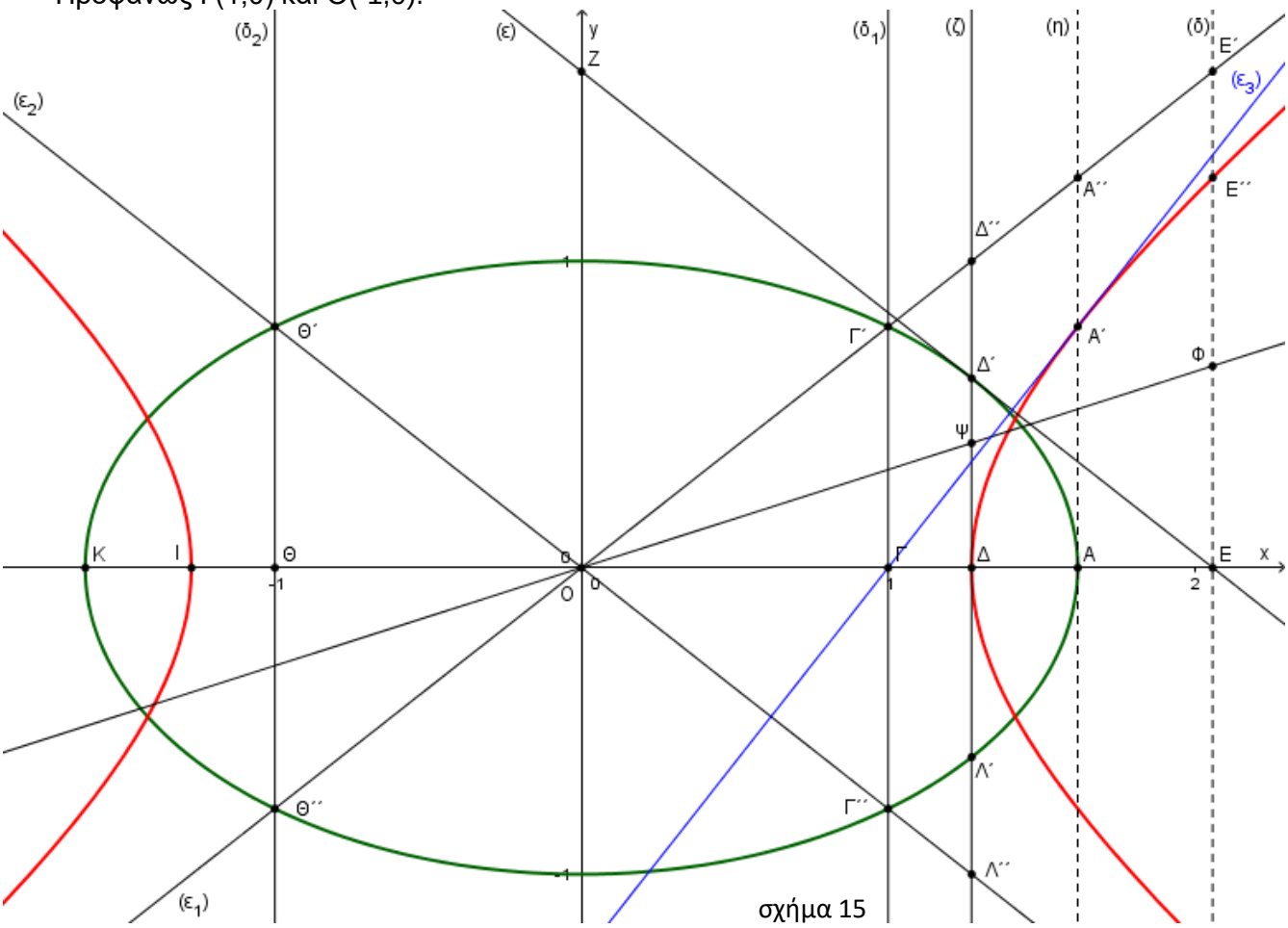
Οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y=\pm\frac{\beta_1}{\alpha_1}x \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}}x$.



b)
$$\begin{cases} x^2+\phi^2y^2=\phi^2 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\phi x^2=\phi^2 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(\phi+1)=\phi^2 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}}x \end{cases}$$

$$\overset{\phi+1=\phi^2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2\phi^2=\phi^2 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{\phi}} \end{cases}.$$

Τέσσερα σημεία Γ΄(1,1/$\sqrt{\phi}$), Γ΄΄(1,-1/$\sqrt{\phi}$), Θ΄(-1,1/$\sqrt{\phi}$) και Θ΄΄(-1,-1/$\sqrt{\phi}$) (σχήμα 15).
Προφανώς Γ(1,0) και Θ(-1,0).



σχήμα 15

c) Οι διευθετούσες της υπερβολής έχουν εξισώσεις $x=\pm\frac{a_1^2}{\gamma_1} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\phi}{\phi}$

$\Leftrightarrow x=\pm1$, δηλαδή οι ευθείες ΓΓ΄ και ΘΘ΄.

d) Για την έλλειψη $\alpha_2=\varphi$, $\beta_2=1$ και $\gamma_2=\sqrt{\alpha_2^2-\beta_2^2}=\sqrt{\phi^2-1}=\sqrt{\phi}$.

Η υπερβολή έχει κορυφές Δ(α_1,0) και Ι(-α_1,0) ή Δ($\sqrt{\phi}$,0) και Ι(-$\sqrt{\phi}$,0).

Η έλλειψη έχει εστίες ($\pm\gamma_2$,0) ή ($\pm\sqrt{\phi}$,0), δηλαδή τα σημεία Δ και Ι.

e) Η υπερβολή έχει εστίες ($\pm\gamma_1$,0) ή ($\pm\varphi$,0).
Η έλλειψη έχει κορυφές Α(α_2,0) και Κ(-α_2,0) ή Α(φ,0) και Κ(-φ,0) δηλαδή τις εστίες της υπερβολής.

f) $\frac{x^2}{\phi^2}+y^2=1 \overset{x=\sqrt{\phi}}{\Rightarrow} \frac{\phi}{\phi^2}+y^2=1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\phi}+y^2=1$

$\Leftrightarrow y^2=\frac{\phi-1}{\phi}=\frac{\phi-1}{\phi^2-1}=\frac{\phi-1}{(\phi-1)(\phi+1)}=\frac{1}{\phi+1}=\frac{1}{\phi^2}$.

Άρα y=$\frac{1}{\phi}$ και Δ΄$\left(\sqrt{\phi},\frac{1}{\phi}\right)$.

Η εφαπτόμενη της έλλειψης στο σημείο της Δ΄ έχει εξίσωση (ε): $xx_{\Delta'}+\varphi^2yy_{\Delta'}=\varphi^2$

$\Leftrightarrow$ (ε): $x\sqrt{\phi}+\varphi y=\varphi^2$

η οποία για y=0 δίνει x=φ$\sqrt{\phi}$. Άρα Ε(φ$\sqrt{\phi}$,0).

Οι διευθετούσες της έλλειψης έχουν εξισώσεις x=$\pm\frac{a_2{}^2}{\gamma_2}\Leftrightarrow$ x=$\pm\frac{\phi^2}{\sqrt{\phi}}$

$\Leftrightarrow$ x=±φ$\sqrt{\phi}$, δηλαδή η μια από αυτές διέρχεται από το σημείο Ε.

g) Οι τετμημένες $x_\Gamma=1$, $x_\Delta=\sqrt{\phi}$, $x_A=\varphi$ και $x_E=\varphi\sqrt{\phi}$ προφανώς αποτελούν γ.π. με λόγο λ=$\sqrt{\phi}$.

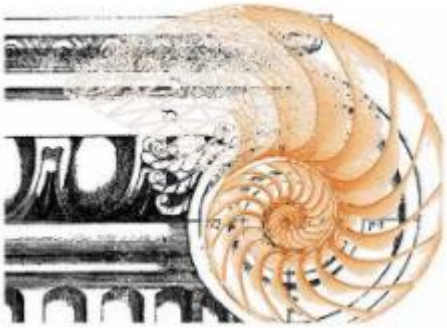
h) (ΟΓ)=1, (ΟΑ)=φ και (ΑΓ)=φ-1.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(OA)}{(O\Gamma)}=\frac{\phi}{1}=\phi\\ \frac{(O\Gamma)}{(A\Gamma)}=\frac{1}{\phi-1}=\frac{\phi^2-\phi}{\phi-1}=\frac{\phi(\phi-1)}{\phi-1}=\phi\end{array}\right\}\Leftrightarrow \frac{(OA)}{(O\Gamma)}=\frac{(O\Gamma)}{(A\Gamma)}=\phi.$$

i) (ΟΔ)=$\sqrt{\phi}$, (ΟΕ)=φ$\sqrt{\phi}$ και (ΔΕ)=(φ-1)$\sqrt{\phi}$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(OE)}{(O\Delta)}=\frac{\phi\sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi}}=\phi\\ \frac{(O\Delta)}{(\Delta E)}=\frac{\sqrt{\phi}}{(\phi-1)\sqrt{\phi}}=\frac{1}{\phi-1}=\frac{\phi^2-\phi}{\phi-1}=\frac{\phi(\phi-1)}{\phi-1}=\phi\end{array}\right\}\Leftrightarrow \frac{(OE)}{(O\Delta)}=\frac{(O\Delta)}{(\Delta E)}=\phi.$$

j) Η εξίσωση x^2=x+1 $\Leftrightarrow$ x^2-x-1=0 έχει ρίζες φ και φ΄.



P$\overset{Vieta}{=\!=\!=\!=}\frac{\gamma}{\alpha}$=-1 $\Leftrightarrow$ φφ΄=-1 $\Leftrightarrow \frac{1}{\phi}=-\phi'$.

(ΓΓ΄)=$\frac{1}{\sqrt{\phi}}=\sqrt{-\phi'}$.

(ΔΔ΄)=$\frac{1}{\phi}=-\phi'$.

(ε_1): y=$\frac{1}{\sqrt{\phi}}$x $\overset{x=\sqrt{\phi}}{\Rightarrow}$ y=1. Άρα Δ΄΄($\sqrt{\phi}$,1) και (ΔΔ΄΄)=1

k) $\frac{x^2}{\phi}-y^2=1 \overset{x=\phi}{\Rightarrow}$ φ-y^2=1

$\Leftrightarrow y^2=\varphi-1=-\frac{1}{\phi'}-1=-\frac{\phi'+1}{\phi'}=-\frac{\phi'^2}{\phi'}=-\varphi'=\frac{1}{\phi}$.

Άρα y=$\frac{1}{\sqrt{\phi}}$, Α΄$\left(\phi,\frac{1}{\sqrt{\phi}}\right)$ και (ΑΑ΄)=(ΓΓ΄)=$\frac{1}{\sqrt{\phi}}=\sqrt{-\phi'}$.

(ε_1): $y=\frac{1}{\sqrt{\phi}}x \overset{x=\phi}{\Rightarrow} y=\sqrt{\phi}$. Άρα $A''(\varphi, \sqrt{\phi})$ και $(AA'')=\sqrt{\phi}$.

$\frac{x^2}{\phi}-y^2=1 \overset{x=\phi\sqrt{\phi}}{\Rightarrow} \varphi^2-y^2=1$

$\Leftrightarrow y^2=\varphi^2-1=\varphi$.

Άρα $y=\sqrt{\phi}$, $E''\left(\phi\sqrt{\phi}, \sqrt{\phi}\right)$ και $(EE'')=\sqrt{\phi}=(AA'')$.

l) Προφανές.

m) ☛ $(\Delta\Delta')=\frac{1}{\phi}$, $(\Delta\Delta'')=1$ και $(\Delta'\Delta'')=1-\frac{1}{\phi}$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(\Delta\Delta'')}{(\Delta\Delta')}=\frac{1}{\frac{1}{\phi}}=\phi \\ \frac{(\Delta\Delta')}{(\Delta'\Delta'')}=\frac{\frac{1}{\phi}}{1-\frac{1}{\phi}}=\frac{1}{\phi-1}=\frac{\phi^2-\phi}{\phi-1}=\frac{\phi(\phi-1)}{\phi-1}=\phi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{(\Delta\Delta'')}{(\Delta\Delta')}=\frac{(\Delta\Delta')}{(\Delta'\Delta'')}=\phi.$$

☛ $(AA')=\frac{1}{\sqrt{\phi}}$, $(AA'')=\sqrt{\phi}$ και $(A'A'')=\frac{\phi-1}{\sqrt{\phi}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(AA'')}{(AA')}=\frac{\sqrt{\phi}}{\frac{1}{\sqrt{\phi}}}=\phi \\ \frac{(AA')}{(A'A'')}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\phi}}}{\frac{\phi-1}{\sqrt{\phi}}}=\frac{1}{\phi-1}=\frac{\phi^2-\phi}{\phi-1}=\frac{\phi(\phi-1)}{\phi-1}=\phi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{(AA'')}{(AA')}=\frac{(AA')}{(A'A'')}=\phi.$$

n) Τα τμήματα (ΟΨ) και (ΨΦ) είναι (θ. Θαλή) ανάλογα των (ΟΔ) και (ΔΕ) αντίστοιχα. Από το (i) ερώτημα το Δ διαιρεί το (ΟΕ) σε χρυσό λόγο. Λόγω της παραπάνω αναλογίας, και το Ψ θα διαιρεί το (ΟΦ) σε χρυσό λόγο.

o) Τα τμήματα (ΖΔ΄) και (Δ΄Ε) είναι (θ. Θαλή) ανάλογα των (ΟΔ) και (ΔΕ) αντίστοιχα. Από το (i) ερώτημα το Δ διαιρεί το (ΟΕ) σε χρυσό λόγο. Λόγω της παραπάνω αναλογίας, και το Δ΄ θα διαιρεί το (ΖΕ) σε χρυσό λόγο.

p) Η εφαπτόμενη της υπερβολής στο σημείο της Α΄ έχει εξίσωση (ε_3): $xx_{A'}-\varphi yy_{A'}=\varphi$

$\Leftrightarrow$ (ε_3): $\varphi x-y=\varphi$

η οποία για y=0 δίνει x=1. Άρα η (ε_3) τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο Γ.

q) $\lambda_{O\Delta'}=\frac{y_{\Delta'}}{x_{\Delta'}}=\frac{\frac{1}{\phi}}{\sqrt{\phi}}=\frac{1}{\phi\sqrt{\phi}}$ και $\lambda_{OA'}=\frac{y_{A'}}{x_{A'}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\phi}}}{\phi}=\frac{1}{\phi\sqrt{\phi}}$. Άρα $\lambda_{O\Delta'}=\lambda_{OA'}$ $\Leftrightarrow$ ΟΔ΄// ΟΑ΄ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Ο ταυτίζονται. Άρα τα σημεία Ο, Δ΄, Α΄ είναι συνευθειακά.

28) Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων τυχαίου σημείου της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ από τις ασύμπτωτές της είναι σταθερό και ίσο με $(\alpha\beta/\gamma)^2$.

Λύση: Έστω (ε_1): $y=\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow \alpha x-\beta y=0$ και (ε_2): $y=-\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow \alpha x+\beta y=0$ οι ασύμπτωτες και $M(x_1,y_1)$ τυχαίο σημείο της.

$$d(M,\varepsilon_1)\cdot d(M,\varepsilon_2)=\frac{|\alpha x_1-\beta y_1|}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\cdot\frac{|\alpha x_1+\beta y_1|}{\sqrt{a^2+\beta^2}}=\frac{|\alpha^2x_1^2-\beta^2y_1^2|}{\gamma^2}=\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2}=\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2.$$

29) Η εφαπτομένη σε τυχόν σημείο Σ της υπερβολής $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ τέμνει την μια από τις ασύμπτωτές της στο Α. Αν Μ και Ν είναι οι προβολές του Α στους άξονες, να δείξετε ότι η ευθεία ΜΝ διέρχεται από το Σ.

Λύση: Έστω (ε): $\beta^2xx_1-\alpha^2yy_1=\alpha^2\beta^2$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο της $\Sigma(x_1,y_1)$ (σχήμα 16).

$$\left\{\begin{array}{l}\beta^2xx_1-a^2yy_1=\alpha^2\beta^2\\ y=\dfrac{\beta}{\alpha}x\end{array}\right\}(1)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \beta^2xx_1-\alpha\beta xy_1=\alpha^2\beta^2$

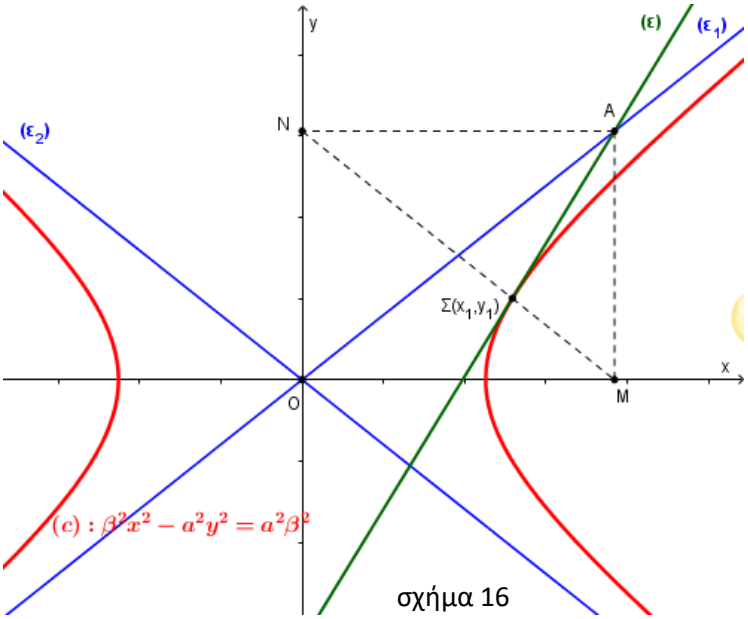
$\Leftrightarrow \beta xx_1-\alpha xy_1=\alpha^2\beta$

$\Leftrightarrow (\beta x_1-\alpha y_1)x=\alpha^2\beta$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-ay_1}$ .....(2)

γιατί αν $\beta x_1-\alpha y_1=0$ τότε το Σ θα ήταν σημείο της (ε_1), άτοπο.

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} y=\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1-ay_1}$ .....(3)



σχήμα 16

Άρα $M\left(\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-ay_1},0\right)$ και $N\left(0,\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1-ay_1}\right)$.

$\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-ay_1},\dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1-ay_1}\right)$ και $\overrightarrow{M\Sigma}=\left(x_1-\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-ay_1},y_1\right)==\left(\dfrac{\beta x_1^2-\alpha x_1y_1-\alpha^2\beta}{\beta x_1-ay_1},y_1\right)$.

$$\begin{vmatrix}-\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta x_1-ay_1} & \dfrac{\alpha\beta^2}{\beta x_1-ay_1}\\ \dfrac{\beta x_1^2-\alpha x_1y_1-\alpha^2\beta}{\beta x_1-ay_1} & y_1\end{vmatrix}=-\frac{\alpha^2\beta y_1}{\beta x_1-ay_1}-\frac{\alpha\beta^2(\beta x_1^2-\alpha x_1y_1-\alpha^2\beta)}{(\beta x_1-ay_1)^2}$$

$$=-\frac{\alpha^2\beta y_1(\beta x_1-ay_1)+\alpha\beta^2(\beta x_1^2-\alpha x_1y_1-\alpha^2\beta)}{(\beta x_1-ay_1)^2}$$

$$=-\frac{\alpha\beta\left(ay_1(\beta x_1-ay_1)+\beta(\beta x_1^2-\alpha x_1y_1-\alpha^2\beta)\right)}{(\beta x_1-ay_1)^2}$$

$$=-\frac{\alpha\beta\left(\cancel{a\beta y_1x_1}-a^2y_1^2+\beta^2x_1^2-\cancel{\alpha\beta x_1y_1}-\alpha^2\beta^2)\right)}{(\beta x_1-ay_1)^2}$$

$$=-\frac{\alpha\beta\left(-a^2y_1^2+\beta^2x_1^2-\alpha^2\beta^2)\right)}{(\beta x_1-ay_1)^2}=0,$$ γιατί $\beta^2x_1^2-\alpha^2y_1^2-\alpha^2\beta^2=0$.

Άρα ΜΝ // ΜΣ και επειδή έχουν το σημείο Μ κοινό, ταυτίζονται. Άρα η ευθεία ΜΝ διέρχεται από το Σ.

30) Έστω Μ(x,y) τυχαίο σημείο. Ορίζουμε ρ=(ΟΜ) και θ τη γωνία που σχηματίζει η ΟΜ με τον ημιάξονα Ox. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\rho^2\sigma\upsilon\nu2\theta=\alpha^2$ με α>0 παριστάνει ισοσκελή υπερβολή.

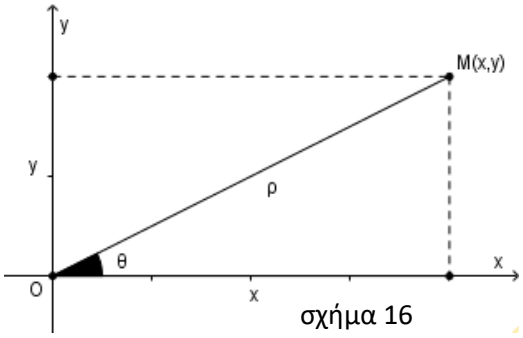
Λύση: Ως γνωστό x=ρσυνθ και y=ρημθ (σχήμα 16).

$\rho^2\sigma\upsilon\nu2\theta=\alpha^2 \Leftrightarrow \rho^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta)=\alpha^2$

$\Leftrightarrow \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\rho^2\eta\mu^2\theta=\alpha^2$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=\alpha^2$

που παριστάνει ισοσκελή υπερβολή.



σχήμα 16

31) Δίνονται οι ευθείες (ε_1): y=κx και (ε_2): y=-κx. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου για τα οποία το γινόμενο των αποστάσεών τους από τις (ε_1) και (ε_2) να ισούται με $\dfrac{\kappa^2\lambda^2}{1+\kappa^2}$, όπου κ, λ σταθεροί θετικοί πραγματικοί διάφοροι του μηδενός.

Λύση: (ε_1): κx-y=0 και (ε_2): κx+y=0.

$d(M,\varepsilon_1)\cdot d(M,\varepsilon_2)=\dfrac{\kappa^2\lambda^2}{1+\kappa^2} \Leftrightarrow \dfrac{|\kappa x-y|}{\sqrt{\kappa^2+1}}\cdot\dfrac{|\kappa x+y|}{\sqrt{\kappa^2+1}}=\dfrac{\kappa^2\lambda^2}{1+\kappa^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|\kappa^2x^2-y^2|}{\kappa^2+1}=\dfrac{\kappa^2\lambda^2}{1+\kappa^2}$

$\Leftrightarrow |\kappa^2x^2-y^2|=\kappa^2\lambda^2$

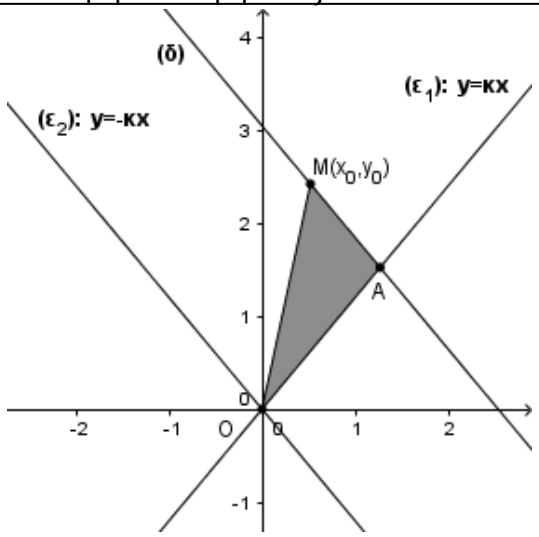
$\Leftrightarrow \kappa^2x^2-y^2=\kappa^2\lambda^2$ ή $y^2-\kappa^2x^2=\kappa^2\lambda^2$

που παριστάνουν ισοσκελείς υπερβολές.

32) Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $y=\kappa x$ και (ε_2): $y=-\kappa x$. Από τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην (ε_2) που τέμνει την (ε_1) στο Α. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $4(OAM)=\kappa c^2$, όπου κ, c σταθεροί θετικοί πραγματικοί διάφοροι του μηδενός.

Λύση: Έστω $M(x_0,y_0)$.

Η ευθεία (δ) έχει εξίσωση $y-y_0=-\kappa(x-x_0)$.



$\begin{cases} y-y_0=-\kappa(x-x_0) \\ y=\kappa x \end{cases} \Leftrightarrow \kappa x-y_0=-\kappa(x-x_0)$

$\Leftrightarrow \kappa x-y_0=-\kappa x+\kappa x_0$

$\Leftrightarrow 2\kappa x=y_0+\kappa x_0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{y_0+\kappa x_0}{2\kappa}$.

$y=\kappa x=\kappa\dfrac{y_0+\kappa x_0}{2\kappa}=\dfrac{y_0+\kappa x_0}{2}$.

Άρα $A\left(\dfrac{y_0+\kappa x_0}{2\kappa},\dfrac{y_0+\kappa x_0}{2}\right)$.

$\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{y_0+\kappa x_0}{2\kappa},\dfrac{y_0+\kappa x_0}{2}\right)$ και $\overrightarrow{OM}=(x_0,y_0)$.

$4(OAM)=\kappa c^2 \Leftrightarrow 4\cdot\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \dfrac{y_0+\kappa x_0}{2\kappa} & \dfrac{y_0+\kappa x_0}{2} \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}\right|=\kappa c^2$

$\Leftrightarrow |(y_0+\kappa x_0)y_0-\kappa(y_0+\kappa x_0)x_0|=\kappa^2c^2$

$\Leftrightarrow |y_0^2+\cancel{\kappa x_0y_0}-\cancel{\kappa x_0y_0}-\kappa^2x_0^2|=\kappa^2c^2$

$\Leftrightarrow |y_0^2-\kappa^2x_0^2|=\kappa^2c^2$

$\Leftrightarrow y_0^2-\kappa^2x_0^2=\kappa^2c^2$ ή $\kappa^2x_0^2-y_0^2=\kappa^2c^2$ που παριστάνουν ισοσκελείς υπερβολές.

33) ασφαδ