ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{1}{x}$, με x≠0.

- **i.** Να βρείτε την παράγωγό της και να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- **ii.** Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο και να μελετήσετε την κυρτότητα της συνάρτησης και εάν έχει σημείο καμπής.
- **iii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.
- **iv.** Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε την γραφική παράστασή της.

Λύση:

i. $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$.

Επειδή f΄(x)>0 για κάθε x≠0, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (-∞,ο) και (0,+∞).

Ακρότατα δεν έχει.

ii. $f''(x)=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$.

f΄΄(x)>0 ⇔ $-\frac{2}{x^3}>0$ ⇔ $x^3<0$ ⇔ x<0 και

f΄΄(x)<0 ⇔ ... ⇔ x>0.

Άρα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα (-∞,0) και τα κοίλα κάτω στο διάστημα (0,+∞). Σημείο καμπής δεν έχει.

dgd

iii. ☛ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\frac{1}{x}\right)$=+∞ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\frac{1}{x}\right)$=-∞.

Επομένως η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

=0.

☛ Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)$=+∞-0=

=+∞ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)$=-∞-0=-∞,

δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

☛ λ= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$=1-0=1

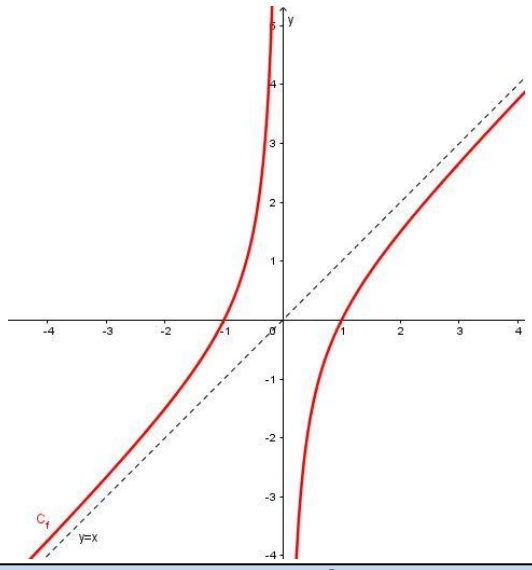
και β= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$=0, η ευθεία y=x (διχοτόμος 1ου - 3ου τεταρτημορίου) είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞ και στο -∞.

iv. Η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα y΄Oy καθότι 0∉A_f.

f(x)=0 ⇔ $x-\frac{1}{x}=0$ ⇔ x2-1=0 ⇔ x=±1. Άρα τέμνει τον άξονα x΄Ox στα σημεία (1,0) και (-1,0).

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	-∞	0	+∞
f΄(x)	+	‖	+
f΄΄(x)	+	‖	-
f(x)	↗	‖	↗



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$.

- **i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- **ii.** Να υπολογίσετε την παράγωγό της, να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- **iii.** Να δείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι $f''(x)=\frac{2\ln^2 x-3\ln x+2}{\ln^3 x}$ και να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- **iv.** Να εξετάσετε εάν έχει ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Λύση:

i. $\left\{\begin{matrix} x>0 \\ \ln x\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x>0 \\ x\neq 1\end{matrix}\right\}$ ⇔ A_f=(0,1)U(1,+∞).

ii. $f'(x)=\frac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}$.

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}=0$

⇔ 2xlnx-x=0

⇔ x(2lnx-1)=0

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$ 2lnx-1=0

$\Leftrightarrow$ lnx=1/2

$\Leftrightarrow$ x= $\sqrt{e}$.

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} > 0$

$\Leftrightarrow$ 2xlnx-x>0… **γιατί ln²x>0**

$\Leftrightarrow$ x(2lnx-1)>0

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$ 2lnx-1>0

$\Leftrightarrow$ lnx>1/2

$\Leftrightarrow$ x> $\sqrt{e}$.

- Ομοίως $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ x< $\sqrt{e}$.

x	0	1	$\sqrt{e}$	$+\infty$
f΄(x)	-	-	0	+
f(x)	↘	↘		↗

Μονοτονία: Στα διαστήματα (0,1) και (1, $\sqrt{e}$) η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα ($\sqrt{e}$,+∞) είναι γνησίως αύξουσα.

Ακρότατα: Στο x= $\sqrt{e}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f($\sqrt{e}$)=2e.

Σύνολο τιμών:

☛ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2)\cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

= 0·0 =0.

☛ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{\ln x}$

$\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \cancelto{1}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2)}\cdot \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

$\underset{\substack{x<1\\ \ln x<0}}{=\!=} -\infty$.

☛ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{\ln x}$

$\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \cancelto{1}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2)}\cdot \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

$\underset{\substack{x>1\\ \ln x>0}}{=\!=} +\infty$.

☛ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x}$

$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x^2)'}{(\ln x)'}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}(2x^2)$ =+∞.

- $f((0,1)) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$

=(-∞,0) ……(1)

- $f((1,\sqrt{e}]) \overset{f\downarrow}{=} \left[f(\sqrt{e}), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)$

=[2e,+∞) ……(2)

- $f((\sqrt{e},+\infty)) \overset{f\uparrow}{=} \left[f(\sqrt{e}), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$

=[2e,+∞) ……(3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

f(A$_f$)=(-∞,0)U[2e,+∞)U[2e,+∞)

=(-∞,0)U[2e,+∞).

iii. $f''(x) = \left(\dfrac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}\right)'$

$= \dfrac{(2x\ln x - x)'\ln^2 x - (2x\ln x - x)(\ln^2 x)'}{\ln^4 x}$

$= \dfrac{(2\ln x + 2 - 1)\ln^2 x - (2x\ln x - x)2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4 x}$

$= \dfrac{(2\ln x + 1)\ln^2 x - (2\ln x - 1)2\ln x}{\ln^4 x}$

$= \dfrac{(2\ln x + 1)\ln x - (2\ln x - 1)2}{\ln^3 x}$

$= \dfrac{2\ln^2 x + \ln x - 4\ln x + 2}{\ln^3 x}$

$= \dfrac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}$.

Ο αριθμητής 2ln²x-3lnx+2 είναι τριώνυμο ως προς lnx και έχει διακρίνουσα Δ=-7<0.

Άρα 2ln²x-3lnx+2>0 για κάθε x∈(0,1)U(1,+∞).

Επομένως η f΄΄ δεν μηδενίζεται και

f΄΄(x)>0 $\Leftrightarrow$ ln³x>0

$\Leftrightarrow$ lnx>0

$\Leftrightarrow$ x>1 και

f΄΄(x)<0 $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ x<1.

x	0	1	$+\infty$
f΄΄(x)	-	+	
f(x)	∩	∪	

Στο διάστημα (0,1) στρέφει τα κοίλα κάτω και στο διάστημα (1,+∞) στρέφει τα κοίλα άνω.
Σημεία καμπής δεν έχει.

iv. Κατασκευάζουμε τον συνολικό πίνακα μεταβολών:

x	0	1	$\sqrt{e}$	+∞
f΄(x)	-	-	○ +	
f΄΄(x)	-	+	+	
f(x)	↘	↘	↗	

Από το (ii) ερώτημα προκύπτει ότι έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την ευθεία x=1, γιατί $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες και επειδή

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(\ln x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}$$

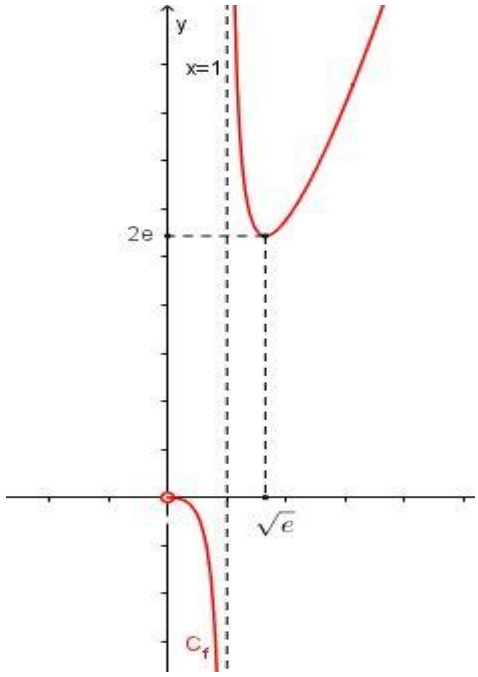
$$=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞.

Στην γειτονιά του -∞ δεν ορίζεται η συνάρτηση.

Η γραφική παράσταση δεν τέμνει τους άξονες καθότι $0\notin A_f$ και η εξίσωση f(x)=0 είναι αδύνατη.

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$, x≠1.

i. Να βρείτε την παράγωγό της και να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι $f''(x)=\dfrac{6x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}$ και να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες.

iv. Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα και ότι άλλο χρειάζεται, να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Λύση:

i. $f'(x)=-\dfrac{(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}=-\dfrac{3x^2}{(x^3-1)^2}<0$ για κάθε x≠1. Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (-∞,1) και (1,+∞).

ii. $f''(x)=\left(-\dfrac{3x^2}{(x^3-1)^2}\right)'$

$$=-\frac{6x(x^3-1)^2-3x^2\left((x^3-1)^2\right)'}{(x^3-1)^4}$$

$$=\frac{6x^2(x^3-1)(x^3-1)'-6x(x^3-1)^2}{(x^3-1)^4}$$

$$=\frac{18x^4(x^3-1)-6x(x^3-1)^2}{(x^3-1)^4}$$

$$=\frac{18x^4-6x(x^3-1)}{(x^3-1)^3}$$

$$=\frac{18x^4-6x^4+6x}{(x^3-1)^3}$$

$$=\frac{12x^4+6x}{(x^3-1)^3}=\frac{6x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}.$$

f΄΄(x)=0 ⇔ $\dfrac{6x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}=0$

⇔ $6x(2x^3+1)=0$

⇔ x=0 ή $x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου και η κυρτότητα της συνάρτησης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	0	1	$+\infty$
6x	-		-	+	+
$2x^3+1$	-	0	+	+	+
$(x^3-1)^3$	-		-	-	+
f´´(x)	-	0	+	0 -	+
f(x)	∩		∪	∩	∪
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Στα σημεία με τετμημένες ⇔ x=0 και $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ έχει σημεία καμπής με f(0)=-1 και $f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=-\frac{2}{3}$.

ukgkgs.

iii. ☛ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x^3-1}$ = -∞ και

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x^3-1}$ =+∞ γιατί x^3-1<0 εάν x<1 και x^3-1>0 εάν x>1.

Επομένως η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

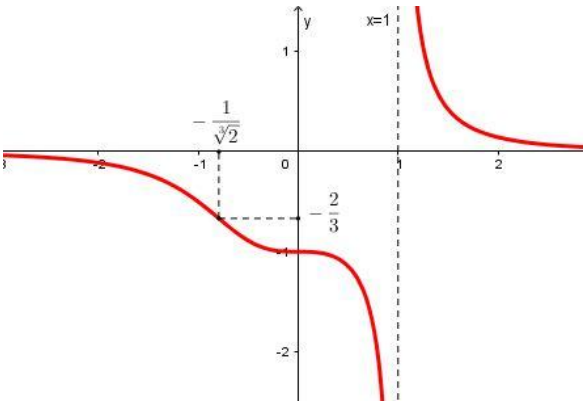
☛ Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3-1}$ =0, έχει οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία y=0 (άξονας y΄Oy).

Αφού έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο ±∞, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞ και στο -∞.

iv. f(0)=-1 άρα τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,-1) και επειδή η εξίσωση f(x)=0 είναι αδύνατη, δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	0	1	$+\infty$
f΄(x)	-	-	-	-	
f΄΄(x)	-	+	-	+	
f(x)	↘	↘	↘	↘	



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+\ln x-1$, x>0.

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\ln\left(\frac{e}{x}\right)^e$ έχει μοναδική ρίζα στο R_+.

ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες.

iv. Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα και ότι άλλο χρειάζεται, να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Λύση:

i. $f'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}$ >0 για κάθε x>0. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$e^x=\ln\left(\frac{e}{x}\right)^e \Leftrightarrow e^x=e\ln\frac{e}{x}$$
$$\Leftrightarrow e^x=e\ln\frac{e}{x}$$
$$\Leftrightarrow e^{x-1}=\ln\frac{e}{x}$$
$$\Leftrightarrow e^{x-1}=\ln e-\ln x$$
$$\Leftrightarrow e^{x-1}=1-\ln x$$
$$\Leftrightarrow e^{x-1}+\ln x-1=0$$
$$\Leftrightarrow f(x)=0.$$

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το 1 και επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

ii. $f''(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x^2}$.

$f^{(3)}(x)=e^{x-1}+\frac{2}{x^3}$ >0 επομένως η f΄΄(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

• x<1 $\overset{f''\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f΄΄(x)< f΄΄(1) ⇔ f΄΄(x)<0.

Επομένως η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα (0,1).

• x>1 $\overset{f''\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f΄΄(x)> f΄΄(1) ⇔ f΄΄(x)>0.

Επομένως η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα (1,+∞).

Στο x=1 παρουσιάζει σημείο καμπής με f(1)=0.

iii. ☛ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(e^{x-1}+\ln x-1)$ = -∞.

Επομένως η ευθεία x=0 (άξονας y΄Oy) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x-1}+\ln x-1)$ $=+\infty$, δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο.

☛ $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-1}+\ln x-1}{x}$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x-1}+\ln x-1\right)'}{(x)'}$$

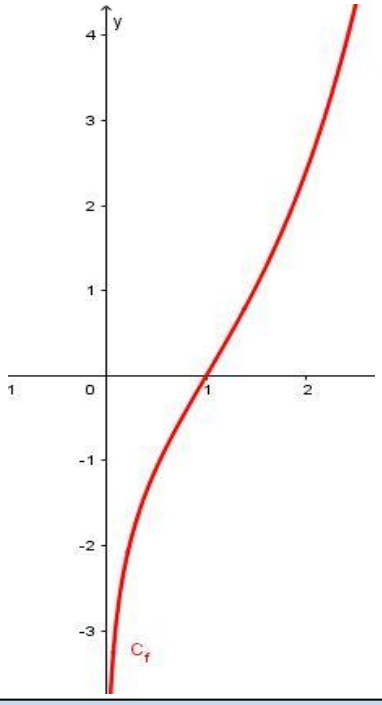
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}+\frac{1}{x}\right)$$

$=+\infty$.

Άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο $+\infty$.

iv. Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
f΄(x)	+		+
f΄΄(x)	-		+
f(x)	↗		↗



5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}$, x∈R.

i. Να υπολογίσετε την παράγωγό της και να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο και να εξετάσετε την συνάρτηση ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

iv. Με την βοήθεια των προηγούμενων ερωτημάτων να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση:

i. $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+1} + x\left(e^{-\frac{1}{2}x^2+1}\right)'$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2+1} + xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}\left(-\frac{1}{2}x^2+1\right)'$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2+1} - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2+1}(1-x^2)\ .$$

Επειδή $e^{-\frac{1}{2}x^2+1}>0$ για κάθε x∈R, το πρόσημο της παραγώγου ταυτίζεται με το πρόσημο του $1-x^2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		-	0	+	0	-	
f΄(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘		↗		↘	
			T.E.		T.M.		

Μονοτονία: Στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα $[-1,1]$ γνησίως αύξουσα.

Ακρότατα: Στο x=-1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=-\sqrt{e}$ και στο x=1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=\sqrt{e}$.

ii. $f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+1}\left(-\frac{1}{2}x^2+1\right)'(1-x^2) +$

$$+ e^{-\frac{1}{2}x^2+1}(1-x^2)'$$

$$= -xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}(1-x^2) - 2xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$= -xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}(3-x^2)\ .$$

Επειδή $e^{-\frac{1}{2}x^2+1}>0$ για κάθε x∈R, το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου ταυτίζεται με το πρόσημο του $-x(3-x^2)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
-x		+		+	0	-		-	
$3-x^2$		-	0	+		+	0	-	
$-x(3-x^2)$		-	0	+	0	-	0	+	
f΄΄(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)		∩		∪		∩		∪	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Στα διαστήματα $(-\infty,-\sqrt{3}]$ και $[0,\sqrt{3}]$ στρέφει τα κοίλα κάτω και στα διαστήματα $[-\sqrt{3},0]$ και $[\sqrt{3},+\infty)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Τα σημεία της γραφικής παράστασης με τετμημένες x=-$\sqrt{3}$, x=0 και x=$\sqrt{3}$ είναι σημεία καμπής με τεταγμένες $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{\frac{3}{e}}$, f(0)=0 και $f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{\frac{3}{e}}$.

iii. ☛ Κατακόρυφες δεν έχει γιατί A=R.

☛ Επειδή:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x^2-1}}$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{\frac{1}{2}x^2-1}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{xe^{\frac{1}{2}x^2-1}} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία y=0 (άξονας x΄Ox) στο +∞ και στο -∞. Επομένως δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

☛ A_f=R συμμετρικό ως προς το μηδέν.

$$f(-x) = -xe^{-\frac{1}{2}(-x)^2+1}$$

$$= -xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$= -f(x).$$

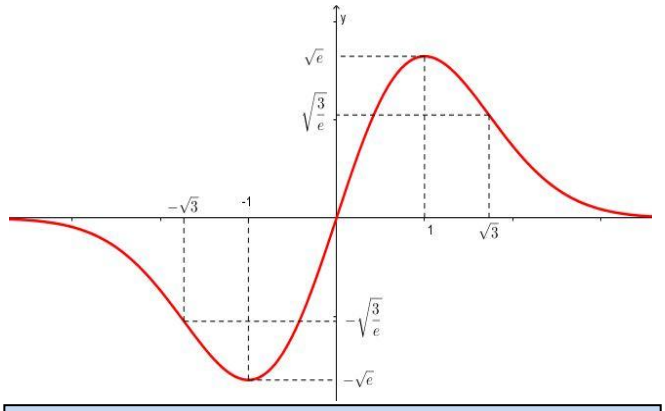
Επομένως η συνάρτηση είναι περιττή.

v. Αφού η συνάρτηση είναι περιττή, η γραφική παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

Διέρχεται από την αρχή των αξόνων αφού f(0)=0.

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	0	-$\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	+∞
f΄(x)	-	-	+	+	-	-	
f΄΄(x)	-	+	+	-	-	+	
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘	↘	



6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$, x≠1.

i. Να υπολογίσετε την παράγωγό της, να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να εξετάσετε εάν έχει ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Λύση:

i. $f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}$

$=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

☛ f΄(x)=0 ⇔ x^2-2x-1=0

⇔ x=1±$\sqrt{2}$.

Επειδή $(x-1)^2$>0 για κάθε x≠1, το πρόσημο της παραγώγου ταυτίζεται με το πρόσημο του x^2-2x-1.

x	-∞	1-$\sqrt{2}$	1	1+$\sqrt{2}$	+∞
f΄(x)	+	-	-	-	+
f(x)	↗	↘	↘	↗	
		T.M.		T.E.	

Μονοτονία: Στα διαστήματα (-∞,1-$\sqrt{2}$] και [1+$\sqrt{2}$,+∞) η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και στα διαστήματα [1-$\sqrt{2}$,1) και (1,1+$\sqrt{2}$] γνησίως φθίνουσα.

Ακρότατα: Στο x=1-$\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(1-$\sqrt{2}$)=2-2$\sqrt{2}$ και στο x=1+$\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο f(1+$\sqrt{2}$)=2+2$\sqrt{2}$.

ii. Ονομάζουμε A_1=(-∞,1-$\sqrt{2}$]

A_2=[1-$\sqrt{2}$,1)

A_3=(1,1+$\sqrt{2}$] και

A_4=[1+$\sqrt{2}$,+∞).

☛ $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}$ -∞ .....(1)

γιατί $\left.\begin{array}{l} x^2+1>0 \\ x<1 \Leftrightarrow x-1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x-1}<0$ και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} +\infty \text{.....(2)}$$

γιατί $\left.\begin{array}{l} x^2+1>0 \\ x>1 \Rightarrow x-1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x-1}>0$.

☛ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.....(3)

$$f(A_1) \overset{f\uparrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1-\sqrt{2})\right]$$

$$\overset{(3)}{=} \left(-\infty, 2-2\sqrt{2}\right].$$

$$f(A_2) \overset{f\downarrow}{=} \left[f(1-\sqrt{2}), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \left(-\infty, 2-2\sqrt{2}\right].$$

$$f(A_3) \overset{f\downarrow}{=} \left(f(1+\sqrt{2}), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right]$$

$$\overset{(2)}{=} \left[2+2\sqrt{2}, +\infty\right).$$

$$f(A_4) \overset{f\uparrow}{=} \left[f(1+\sqrt{2}), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)$$

$$\overset{(3)}{=} \left[2+2\sqrt{2}, +\infty\right).$$

$$f(A_f) = f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)\cup f(A_4)$$

$$= \left(-\infty, 2-2\sqrt{2}\right] \cup \left[2+2\sqrt{2}, +\infty\right).$$

iii. $f''(x) = \left(\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2-2x-1)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x-1)}{(x-1)^3}$$

$$= \ldots = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

x	-∞	1	+∞
f΄΄(x)	-		+
f(x)	**K.K.**		**K.A.**

Στο διάστημα (-∞,1) στρέφει τα κοίλα κάτω και στο διάστημα (1,+∞) στρέφει τα κοίλα άνω.
Σημεία καμπής δεν έχει.

iv. ☛ Από τις σχέσεις (1) και (2) του προηγούμενου ερωτήματος, η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

☛ $\lambda = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

Και $\beta = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1-x(x-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x-1}$

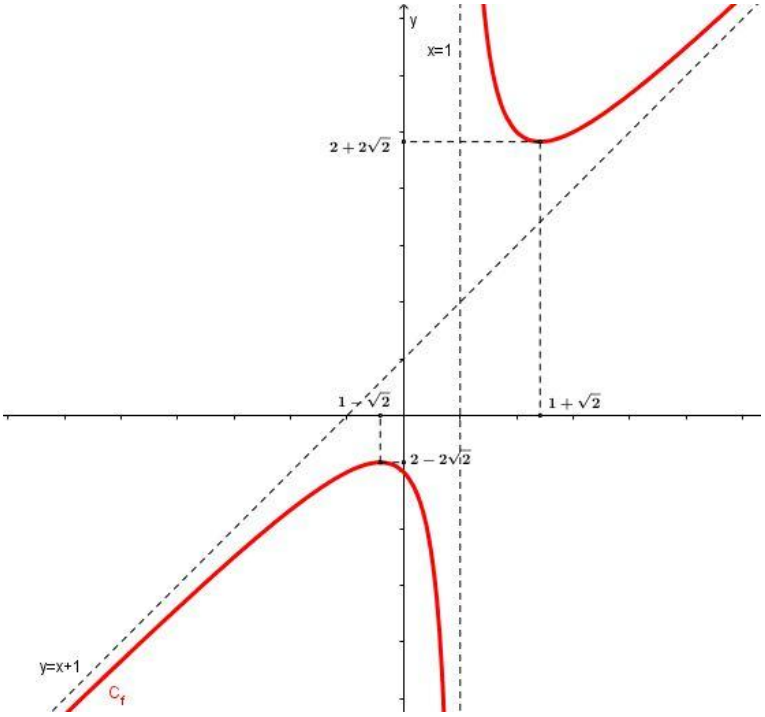
$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x} = 1.$

Άρα η ευθεία y=x+1 είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞ και στο -∞

- Επειδή f(0)=-1 άρα τέμνει τον άξονα y΄Oy στο σημείο (0,-1) και επειδή $0 \notin f(A_f)$ δεν τέμνει τον άξονα x΄Ox.

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	0	$1-\sqrt{2}$	0	1	$1+\sqrt{2}$	+∞
f΄(x)	+	○ -	-	-	- ○	+
f΄΄(x)	-	-	-	+	+	
f(x)	↗	↘	↘	↘	↗	



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)^2}$, x≠1.

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=α, για τις διάφορες τιμές του α∈R

Λύση:

i. $f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-1)^2-(x^2-5x+6)2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\dfrac{(2x-5)(x-1)-2(x^2-5x+6)}{(x-1)^3}$.

$=\ldots=\dfrac{3x-7}{(x-1)^3}$.

☛ f΄(x)=0 ⇔ x=$^7/_3$.

☛ Το πρόσημο της f΄ προκύπτει ως πηλίκο των προσήμων των 3x-7 και $(x-1)^3$.

x	-∞	1		$^7/_3$		+∞
3x-7	-		-	0	+	
$(x-1)^3$	-		+		+	
f΄(x)	+		-	0	+	
f(x)	↗		↘		↗	

Τ.Ε.

Μονοτονία: Στα διαστήματα (-∞,1) και ($^7/_3$,+∞) η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα (1,$^7/_3$) είναι γνησίως φθίνουσα.

Ακρότατα: Στο x=$^7/_3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f($^7/_3$)= -$^1/_8$.

ii. $f''(x)=\left(\dfrac{3x-7}{(x-1)^3}\right)'$

$=\dfrac{3(x-1)^3-(3x-7)3(x-1)^2}{(x-1)^6}$

$=\dfrac{3(x-1)-3(3x-7)}{(x-1)^4}$

$=\ldots=\dfrac{-6x+18}{(x-1)^4}$.

Επειδή $(x-1)^4$>0 για κάθε x≠1, το πρόσημο του f΄΄(x) ταυτίζεται με το πρόσημο του -6x+18.

• -6x+18=0 ⇔ x=3 και

• -6x+18>0 ⇔ x<3.

x	-∞	1		3		+∞
-6x+18	+		+	0	-	
f΄΄(x)	+		+	0	-	
f(x)	∪		∪		∩	

Σ.Κ.

Στα διαστήματα (-∞,1) και (1,3] στρέφει τα κοίλα άνω και στο διάστημα [3,+∞) στρέφει τα κοίλα κάτω.

Το σημείο της (3,f(3)) ή (3,0) είναι σημείο καμπής.

iii. ☛ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)^2}\right)\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+6)=2>0$ άρα θα είναι και x^2-5x+6>0 κοντά στο 1 και $(x-1)^2$>0.

Άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+6+1}{(x-1)^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+6+1}{x^2-2x+1}\right)$

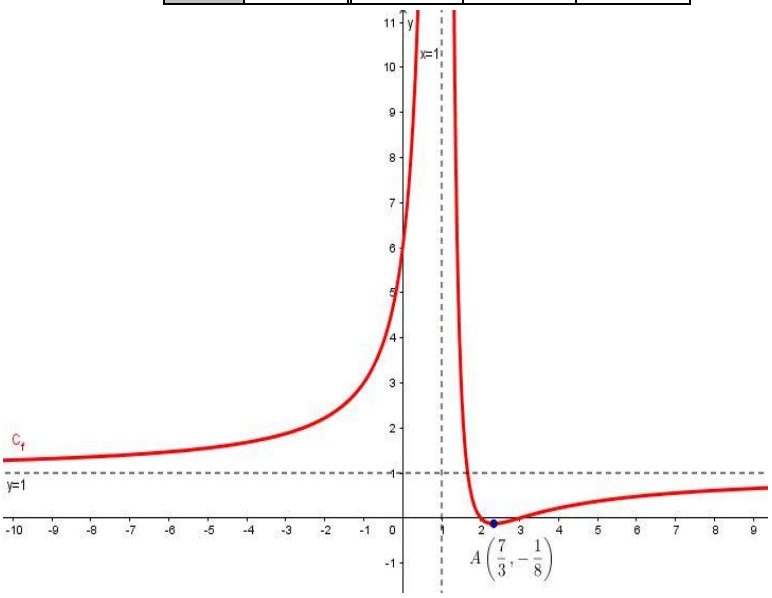
$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}$=1.

Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτος στο +∞ και στο -∞ και επομένως δεν έχει πλάγιες.

• Επειδή f(0)=6, τέμνει τον άξονα y΄Oy στο σημείο (0,6) και επειδή f(x)=0 ⇔ … ⇔ x=2 ή x=3, τέμνει τον άξονα x΄Ox στα σημεία (2,0) και (3,0).

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	-∞	1	$^7/_3$	3	+∞
f΄(x)	+	-	+	+	
f΄΄(x)	+	+	+	-	
f(x)	↗	↘	↗	↗	



iv. Από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-1/8,+\infty)$, (προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα y΄Oy).

Από την γραφική παράσταση και την ευθεία y=α (ευθεία που τέμνει τον άξονα y΄Oy στο α και είναι παράλληλη στον άξονα x΄Ox), προκύπτουν τα παρακάτω:

- Εάν $\alpha < -1/8$, η εξίσωση f(x)=α είναι αδύνατη, γιατί η ευθεία y=α δεν τέμνει την C_f.
- Εάν $\alpha= -1/8$, η εξίσωση f(x)=α έχει μοναδική ρίζα $x=7/3$.
- Εάν $-1/8<\alpha<1$, η εξίσωση f(x)=α έχει δυο ρίζες γιατί η ευθεία y=α τέμνει την γραφική παράσταση σε δυο σημεία.
- Εάν α=1, η εξίσωση f(x)=α έχει μοναδική ρίζα $x=5/3$.
- Εάν α >1, η εξίσωση f(x)=α έχει δυο ρίζες γιατί η ευθεία y=α τέμνει την γραφική παράσταση σε δυο σημεία.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$, x≠0.

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. Μονάδες 8

ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 4

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Μονάδες 6

iv. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μονάδες 7

Λύση:

i. $f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3+8}{x^3}$.

- f΄(x)=0 ⇔ $x^3+8=0$ ⇔ x=-2.
- f΄(x)>0 ⇔ $\dfrac{x^3+8}{x^3} > 0$

$$\Leftrightarrow x^3(x^3+8) > 0$$
$$\Leftrightarrow x^3(x^3+2^3) > 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+2)(x^2+2x+4) > 0$$

και επειδή $x^2+2x+4>0$ για κάθε x∈R (αφού Δ= =-12<0) ⇔ x(x+2)>0
⇔ x<-2 ή x>0.

- f΄(x)<0 ⇔ … ⇔ -2<x<0.

x	-∞	-2		0	+∞
f΄(x)	+	0	-		+
f(x)	↗		↘		↗

T.M.

Μονοτονία: Στα διαστήματα (-∞,-2] και (0,+∞) η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα [-2,0) είναι γνησίως φθίνουσα.

Ακρότατα: Στο x=-2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(-2)= -3.

ii. $f''(x) = \left(\dfrac{x^3+8}{x^3}\right)'$

$$= \frac{3x^2x^3 - 3x^2(x^3+8)}{x^6}$$
$$= \frac{3x^3 - 3(x^3+8)}{x^4}$$
$$= \frac{-24}{x^4} < 0.$$

Επομένως η συνάρτηση είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞).
Σημεία καμπής δεν έχει.

iii. ☛ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$.

Επομένως η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) =$

$=\pm\infty-0=\pm\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

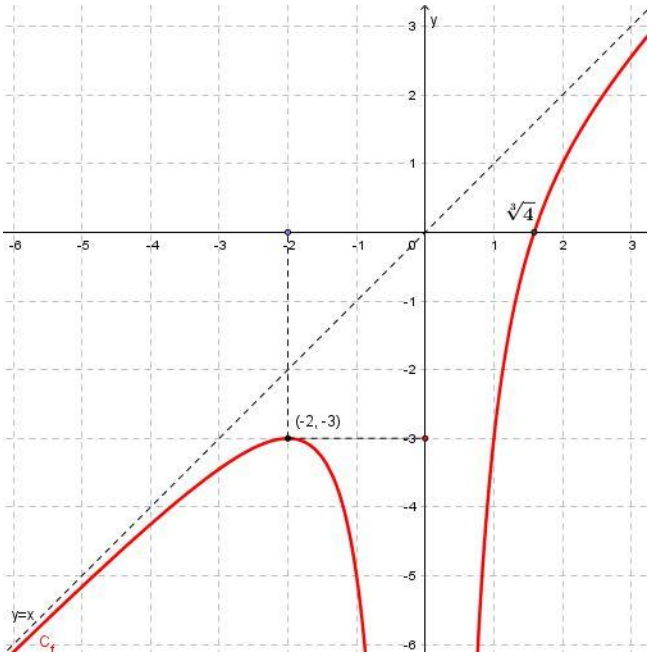
☛ $\lambda = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right) = 1-0=1$

και $\beta = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$, η ευθεία y=x (διχοτόμος 1ου - 3ου τεταρτημορίου) είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞ και στο -∞.

iv. Επειδή $0 \notin A_f$, δεν τέμνει τον άξονα y΄Oy και επειδή f(x)=0 ⇔ … ⇔ $x=\sqrt[3]{4}$, τέμνει τον άξονα x΄Ox στο σημείο ($\sqrt[3]{4}$,0).

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	-∞	-2		0	+∞
f΄(x)	+	0	-		+
f΄΄(x)	+		+		+
f(x)	⤴		⤵		⤴



9. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=lnx, x>0 και g(x)=$\dfrac{x}{1-x}$, x≠1.

i. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog. Μονάδες 5

ii. Αν h(x)=(fog)(x)=$\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, x∈(0,1), να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 6

iii. Αν φ(x)=h^{-1}(x)=$\dfrac{e^x}{1+e^x}$, x∈R, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 7

iv. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) Μονάδες 7

Λύση:

i. A_{fog} ={x∈A_g/g(x)∈A_f}

={x≠1∈A_g/ $\dfrac{x}{1-x}$>0}

={x≠1∈A_g/x(x-1)<0}

={x≠1∈A_g/0<x<1}

=(0,1)≠∅.

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση fog και είναι fog(x)=f(g(x))=$\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, x∈(0,1).

ii. $h'(x)=\left(\ln\dfrac{x}{1-x}\right)'$

$=\dfrac{1-x}{x}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'$

$=\dfrac{1-x}{x}\cdot\dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{1}{x(1-x)}$ >0 στο διάστημα (0,1).

Άρα h(x) ↗ στο διάστημα (0,1) επομένως «1-1»

Άρα η h(x) αντιστρέφεται.

$A_{h^{-1}}$ =h((0,1))

$\overset{h\to\text{συνεχής}}{\underset{h\uparrow}{=\!=\!=\!=}}\left(\lim\limits_{x\to0^+}h(x),\lim\limits_{x\to1^-}h(x)\right)$

=(-∞,+∞), γιατί

$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\dfrac{x}{1-x}$

$=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u$ =-∞

Θέτω $\dfrac{x}{1-x}$=u.
Όταν x→0^+
Τότε u→0^+

και

$\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln\dfrac{x}{1-x}$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u$ =+∞

Θέτω $\dfrac{x}{1-x}$=u.
Όταν x→1^-
Τότε u→+∞

Για να βρούμε την αντίστροφη Συνάρτηση, θέτω h(x)=y.

$y=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\Leftrightarrow e^y=\dfrac{x}{1-x}$

⇔ e^y-xe^y=x

⇔ e^y=x+xe^y

⇔ e^y=x(1+e^y)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{e^y}{1+e^y}$

$\Leftrightarrow h^{-1}(y)=\dfrac{e^y}{1+e^y}$

Ή τελικά $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, x∈R.

iii. ☛ $\phi'(x)=\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)'$

$=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$

$=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ >0 για κάθε x∈R, επομένως η συνάρτηση φ(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R. Ακρότατα δεν έχει.

☛ $\phi''(x)=\dfrac{e^x\left(1+e^x\right)^2-2e^x\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^4}$

$$= \frac{e^x\left(1+e^x\right)^2 - 2e^{2x}\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^4}$$

$$= \frac{e^x\left(1+e^x\right) - 2e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^3}$$

$$= \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}.$$

- $\phi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}=0$

  $\Leftrightarrow 1-e^x=0$

  $\Leftrightarrow 1=e^x$

  $\Leftrightarrow e^0=e^x$

  $\Leftrightarrow x=0.$

- $\phi''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}>0$

  $\Leftrightarrow 1-e^x>0$

  $\Leftrightarrow 1>e^x$

  $\Leftrightarrow e^0>e^x$

  $\Leftrightarrow x<0$

γιατί $e^x>0$ και $(1+e^x)^3>0$ για κάθε $x\in R$.

Επίσης $\phi''(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>0$.

x	-∞	0	+∞
φ΄΄(x)	+	○	-
φ(x)	**Κ.Α.**		**Κ.Κ.**

Σ.Κ.

Στο διάστημα (-∞,0) στρέφει τα κοίλα άνω και στο διάστημα (0,+∞) στρέφει τα κοίλα κάτω.

Στο x=0 έχει σημείο καμπής το σημείο Α(0,φ(0)) ή Α(0,$^1/_2$).

iv. ☛ $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1} = 0.$

Άρα η ευθεία y=0 (άξονας x΄Ox) είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο -∞.

☛ $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$

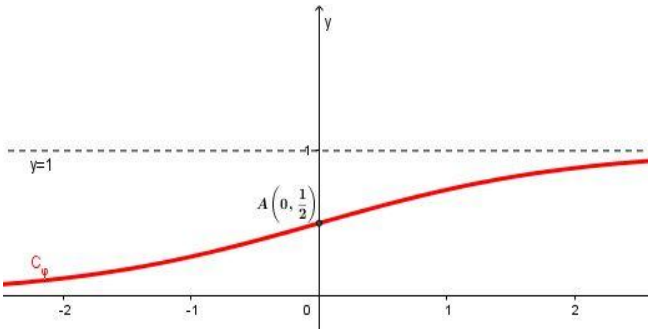
$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞.

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	-∞	0	+∞
φ΄(x)	+	○	+
φ΄΄(x)	+		-
φ(x)	↗		↗



10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$, με $x\neq(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in Z$.

i. Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο T=2π. Μονάδες 5

ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα σε διάστημα μιας περιόδου. Μονάδες 6

iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής σε διάστημα μιας περιόδου. Μονάδες 6

iv. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε διάστημα μιας περιόδου και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μονάδες 8

Λύση:

i. f(x+T)=f(x) $\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu(x+T)}{1+\sigma\upsilon\nu(x+T)} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

$\Leftrightarrow$ συν(x+T)+~~συνxσυν(x+T)~~=συνx+~~συνxσυν(x+T)~~

$\Leftrightarrow$ συν(x+T)=συνx

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+T = 2\kappa\pi + x \\ \acute{\eta} \\ x+T = 2\kappa\pi - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = 2\kappa\pi \\ \acute{\eta} \\ T = 2\kappa\pi - 2x \end{cases}.$$

Επειδή η περίοδος T είναι ανεξάρτητη του x, θα είναι T=2κπ.

Η μικρότερη θετική περίοδος προκύπτει για κ=1 και είναι T=2π.

ii. $f'(x) = \frac{-\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+\sigma\upsilon\nu x\right)^2}$

$$= \frac{-\eta\mu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$= \frac{-\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

Θα μελετήσουμε την συνάρτηση στο σύνολο [0,π)U(π,2π] μήκους T=2π.

• f ΄(x)=0 ⇔ ημx=0

⇔ x=0 ή x=2π.

• f ΄(x)>0 ⇔ ημx<0

⇔ x∈(π,2π).

και f ΄(x)<0 ⇔ … ⇔ x∈(0,π).

x	0		π		2π
f ΄(x)	○	-		+	○
f(x)		↘		↗	

T.M. T.M.

Μονοτονία: Στο διάστημα [0,π) η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα (π,2π] είναι γνησίως αύξουσα.

Ακρότατα: Στα x=0 και x=2π παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(0)=f(2π)=$^1/_2$.

iii. $$f''(x) = \left(\frac{-\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}\right)'$$

$$= \frac{-\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu x)^2 - 2\eta\mu^2 x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^4}$$

$$= \frac{-\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu x) - 2\eta\mu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^3}$$

$$= \frac{-\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x - 2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^3}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^3}.$$

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^3} = 0$

⇔ $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

θέτω συνx=u → ⇔ $u^2 - u - 2 = 0$

⇔ $u^2 - u - 2 = 0$

⇔ u=-1 ή u=2

που είναι αδύνατες.

• Επειδή $(1+\sigma\upsilon\nu x)^3 > 0$, γιατί συνx>-1 ⇔ 1+συνx>0 για κάθε x≠(2κ+1)π, κ∈Z, το πρόσημο του f ΄΄(x) ταυτίζεται με το πρόσημο του αριθμητή $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2$.

u	-∞	-1		2	+∞
u^2-u-2	+	○	-	○	+

Επειδή -1<συνx≤1 ⇔ -1<u≤1, από το παραπάνω πινακάκι προσήμου βλέπουμε ότι $u^2-u-2<0$ ⇔

⇔ $\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 2 < 0$

⇔ f ΄΄(x)<0 επομένως η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω στα διαστήματα (0,π) και (π,2π).

Σημεία καμπής δεν έχει.

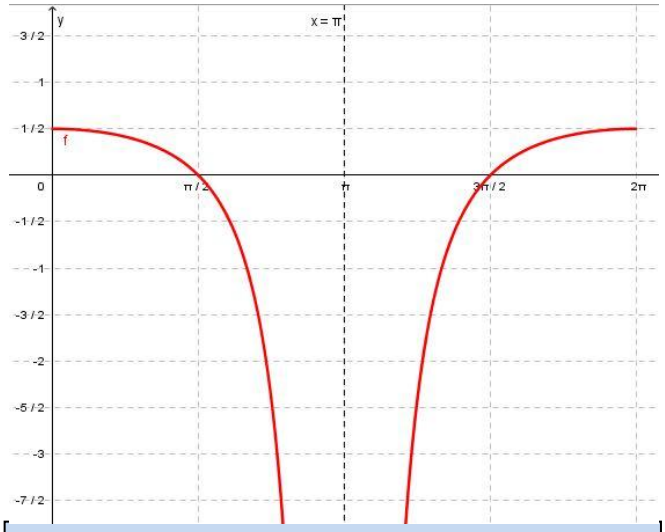
iv. ☛ $$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} \overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = -\infty$$

γιατί $\lim_{x\to\pi}\sigma\upsilon\nu x = -1 < 0 \Rightarrow$ συνx<0 κοντά στο π και 1+συνx>0.

Άρα η ευθεία x=π είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• Επειδή f(0)=$^1/_2$, τέμνει τον άξονα y΄Oy στο σημείο (0,$^1/_2$) και επειδή f(x)=0 ⇔ … ⇔ x=$^\pi/_2$ ή x=$^{3\pi}/_2$, τέμνει τον άξονα x΄Ox στα σημεία ($^\pi/_2$,0) και ($^{3\pi}/_2$,0). Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	0		π		2π
f ΄(x)	○	-		+	○
f ΄΄(x)		-		-	
f(x)		↘		↗	



11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, \alpha\nu\ \ x \in [-1,0) \\ e^x \eta\mu x, \alpha\nu\ \ x \in [0,\pi] \end{cases}.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της. Μονάδες 6

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής και να κατάσκευάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση. Μονάδες 6

iv. Να λύσετε την εξίσωση

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}\,.$$

Μονάδες 7

Λύση:

i. ☛ Στο διάστημα [-1,0) είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

☛ Στο διάστημα (0,π] είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

☛ Στο x=0:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x \eta\mu x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \\ f(0)=e^0\eta\mu 0=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)\,.$$

Άρα είναι συνεχής στο x=0.

Επομένως είναι συνεχής στο [-1,π].

Κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος [-1,π] στα οποία η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται ή ισχύει f ΄(x)=0.

☛ Στο διάστημα (-1,0) είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)'$$

$$= \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'$$

$$= \frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}\cdot(-x)'$$

$$= -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0 \text{ .....(1)}$$

☛ Στο διάστημα (0,π) είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(e^x \eta\mu x\right)'$$

$= e^x\eta\mu x + e^x\sigma\upsilon\nu x$

$= e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$.

☛ Στο x=0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{4}{3}-1}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-x} = 0$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\eta\mu x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(e^x\frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

$=1\cdot 1=1$.

Άρα δεν παραγωγίζεται στο x=0.

Από την σχέση (1) βλέπουμε ότι η παράγωγος δεν μηδενίζεται στο διάστημα (-1,0).

Στο διάστημα (0,π):

f ΄(x)=0 ⇔ e^x(ημx+συνx)=0

⇔ ημx+συνx=0 .....γιατί $e^x\neq 0$

⇔ ημx= -συνx

⇔ εφx= -1

⇔ x=$^{3\pi}/_4$.

Τελικά τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης είναι τα x=$^{3\pi}/_4$ και x=0.

ii. ☛ Στο διάστημα [-1,0) είναι $f'(x) = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0$.

☛ Στο διάστημα (0,π]:

• f ΄(x)=0 ⇔ … ⇔ x=$^{3\pi}/_4$ από το προηγούμενο ερώτημα.

• f ΄(x)>0 ⇔ e^x(ημx+συνx)=0

⇔ ημx+συνx>0 .....γιατί e^x>0

⇔ συνx> -ημx

⇔ σφx> -1

⇔ σφx> σφ($^{3\pi}/_4$)

⇔ x<$^{3\pi}/_4$, γιατί η σφx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,π).

• f ΄(x)<0 ⇔ … ⇔ x>$^{3\pi}/_4$.

x	-1	0		$^{3\pi}/_4$		π
f ΄(x)	-		+	0	-	
f(x)	↘		↗		↘	
	T.M.	T.E.		T.M.		T.E.

Μονοτονία: Στα διαστήματα [-1,0] και [$^{3\pi}/_4$,π] η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα [0,$^{3\pi}/_4$] είναι γνησίως αύξουσα.

Ακρότατα: Στο x=-1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(-1)=1.
Στο x=0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(0)=0.
Στο x=$^{3\pi}/_{4}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f($^{3\pi}/_{4}$)=
$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.
Στο x=π παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(π)=0.

Η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο M=$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ και ολικό ελάχιστο m=0.
Σύμφωνα με το θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης τιμής το σύνολο τιμών είναι [m,M]=$\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

iii. Για x∈[-1,0): $f''(x)=\left(-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}\right)'$

$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}(-x)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(-x)'$$

$$=\frac{4}{9}(-x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{4}{9\sqrt[3]{(-x)^2}}>0.$$

Για x∈(0,π]: f ΄΄(x) =(e^xημx+e^xσυνx)΄
=~~e^xημx~~+e^xσυνx+e^xσυνx-~~e^xημx~~
=2e^xσυνx.

f ΄΄(x) =0 $\overset{e^x>0}{\Rightarrow}$ συνx=0 $\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}$ x=$^{\pi}/_{2}$.

f ΄΄(x) >0 $\overset{e^x>0}{\Rightarrow}$ συνx>0 $\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}$ x∈(0,$^{\pi}/_{2}$).

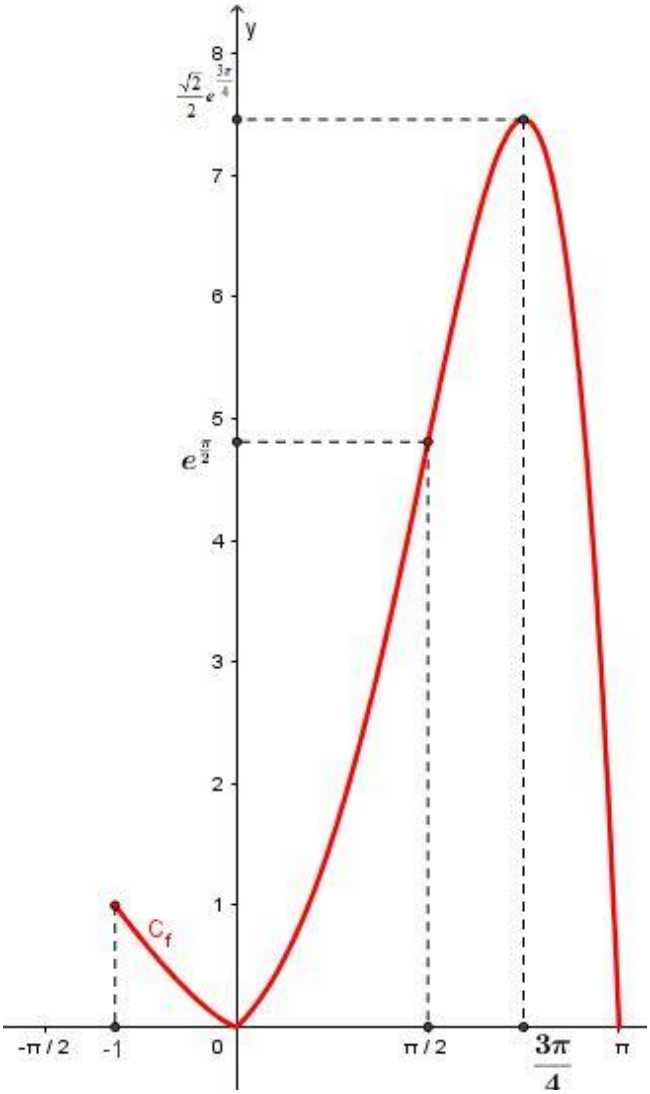
f ΄΄(x) <0 $\overset{e^x>0}{\Rightarrow}$ συνx<0 $\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}$ x∈($^{\pi}/_{2}$,π).

x	-1	0		$^{\pi}/_{2}$		π
f΄΄(x)	+	‖	+	○	-	
f(x)	↺		↺		∩	

Σ.Κ.

Στο διάστημα (-1,0) και στο διάστημα (0,$^{\pi}/_{2}$) η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω και στο διάστημα ($^{\pi}/_{2}$,π) η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω.
Στο x=$^{\pi}/_{2}$ έχει σημείο καμπής το f($^{\pi}/_{2}$)=$e^{\pi/2}$.
Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	-1	0		$^{\pi}/_{2}$		$^{3\pi}/_{4}$		π
f΄(x)	-	‖	+		+	○	-	
f΄΄(x)	+		+	○	-		-	
f(x)	↘		↗		↗		↘	



iv. $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{8\sqrt{2}}{16}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)-M=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad\text{.....(1)}$$

Επειδή η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο M=
$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ είναι f(x)≤M ⇔ f(x)-M≤0

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{3\pi}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}.$$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\sqrt{x}$, x>0 και $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$, x≠1.

i. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση (fog)(x) και να δείξετε ότι είναι περιττή. Μονάδες 5

ii. Εάν $h(x)=(fog)(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, x∈(-1,1), να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 6

iii. Αν $\phi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, x∈R, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ(x) ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 7

iv. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ(x) και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.) Μονάδες 7

Λύση:

i. $A_f=(0,+\infty)$ και $A_g=\{x\in R/x\neq 1\}$.

$A_{fog}=\{x\in A_g/g(x)\in A_f\}$

$=\{x\neq 1/\frac{1+x}{1-x}>0\}$

$=\{x\neq 1/(1+x)(1-x)>0\}$

$=\{x\neq 1/-1<x<1\}$

$=(-1,1)$.

$$h(x)=(fog)(x)$$
$$=f(g(x))$$
$$=\ln\sqrt{g(x)}$$
$$=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \text{ με } x\in(-1,1).$$

Το πεδίο ορισμού (-1,1) είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. Επίσης:

$$h(-x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
$$=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^{-1}$$
$$=-\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$=-h(x).$$

Επομένως η συνάρτηση h(x) είναι περιττή.

ii. $$h'(x)=\left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'$$
$$=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'$$
$$=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{1}{(1+x)(1-x)}>0 \text{ για κάθε } x\in(-1,1).$$

Άρα η συνάρτηση h(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,1) επομένως «1-1» άρα αντιστρέφεται.

$$A_{h^{-1}}=h((-1,1))\overset{h\uparrow}{=}\left(\lim_{x\to -1^+}h(x),\lim_{x\to 1^-}h(x)\right)$$
$$=(-\infty,+\infty)$$
$$=R, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to -1^+}h(x)=\lim_{x\to -1^+}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=-\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1+x}{1-x}=\frac{0}{2}=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=+\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x}{1-x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}+\infty, \text{ γιατί } \frac{1+x}{1-x}>0.$$

$$h(x)=y\Leftrightarrow y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$\Leftrightarrow e^y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}(1-x)=1+x$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}-xe^{2y}=1+x$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}-1=xe^{2y}+x$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}-1=x(1+e^{2y})$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},\ x\in R.$$

iii. $$\phi'(x)=\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)'$$

$$=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}>0$$ για κάθε $x\in R$.

Επομένως η φ(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R. Ακρότατα δεν έχει.

$$\varphi''(x)=\frac{8e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2-4e^{2x}2\left(e^{2x}+1\right)\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^4}$$

$$=\frac{8e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2-8e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^4}$$

$$=\frac{8e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-16e^{4x}}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$$

$$=\frac{8e^{4x}+8e^{2x}-16e^{4x}}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$$

$$=\frac{8e^{2x}-8e^{4x}}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$$

$$=\frac{8e^{2x}(1-e^{2x})}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$$

Επειδή $8e^{2x}>0$ και $(e^{2x}+1)^3>0$ για κάθε $x\in R$ το πρόσημο του φ΄΄(x) ταυτίζεται με το πρόσημο του $1-e^{2x}$.

$1-e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$1-e^{2x}>0 \Leftrightarrow e^{2x}<e^0 \Leftrightarrow x<0$

$1-e^{2x}<0 \Leftrightarrow e^{2x}>e^0 \Leftrightarrow x>0$

x	-∞	0	+∞
φ΄΄(x)	+	0	-
φ(x)	∪		∩

Σ.Κ.

Στο διάστημα (-∞,0) η συνάρτηση φ(x) στρέφει τα κοίλα άνω και στο διάστημα (0,+∞) στρέφει τα κοίλα κάτω.

Στο x=0 έχει σημείο καμπής το φ(0)=0.

iv. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$ και

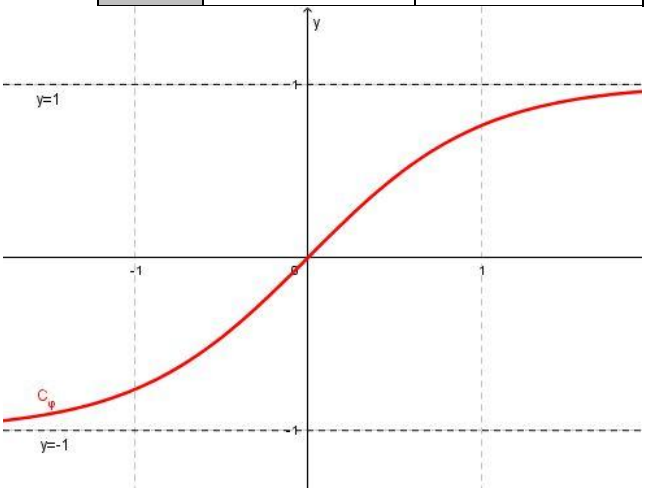
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}-1\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1.$$

Άρα η ευθεία y=-1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της φ(x) στο -∞ και η ευθεία y=1 στο +∞.

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	-∞	0	+∞
φ΄(x)	+		+
φ΄΄(x)	+	0	-
φ(x)	↗		↗



13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 7

ii. Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση f(x) αντιστρέφεται και αν ναι, να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 4

iii. Αν $\phi(x)=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}$, $x\in(0,2)$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ(x) ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 8

iv. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ(x) και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.) Μονάδες 6

Λύση:

i. $f'(x)=\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$=\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ >0 για κάθε x∈R.

Άρα η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R.

f(R) $\overset{f\uparrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

=(0,2), γιατί

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}}\left(1+\frac{x}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

=1-1=0 και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\left(1+\frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\right)$$

=1+1=2.

Ακρότατα δεν έχει.

ii. Αφού η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα είναι «1-1» άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι

$A_{f^{-1}}$ =f(R)=(0,2) από το προηγούμενο ερώτημα.

y=f(x) $\Leftrightarrow y=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Leftrightarrow y-1=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2+(y-1)^2x^2=x^2$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2=x^2-(y-1)^2x^2$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2=x^2\left(1-(y-1)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2=x^2\left(-y^2+2y\right)$$

και επειδή y∈(0,2) είναι $-y^2+2y\neq0$ οπότε

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{(y-1)^2}{-y^2+2y}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Από την σχέση $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow$

$y-1=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ και επειδή $\sqrt{1+x^2}>0$, το y-1 είναι ομόσημο του x, οπότε η σχέση (1) δίνει

$$x=\frac{y-1}{\sqrt{-y^2+2y}} \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(y)=\frac{y-1}{\sqrt{-y^2+2y}} \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}, \ x\in(0,2).$$

iii. $\phi'(x)=\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}\right)'$

$$=\frac{\sqrt{-x^2+2x}+\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{-x^2+2x}}}{-x^2+2x}$$

$$=\frac{-x^2+2x+(x-1)^2}{(-x^2+2x)\sqrt{-x^2+2x}}$$

$$=\frac{1}{(-x^2+2x)\sqrt{-x^2+2x}}$$ >0 για κάθε $x\in(0,2)$.

Επομένως η φ(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0.2). Ακρότατα δεν έχει γιατί το σύνολο τιμών της είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) που είναι το R.

$$\varphi''(x)=\left(\frac{1}{(-x^2+2x)\sqrt{-x^2+2x}}\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{(-x^2+2x)^{3/2}}\right)'$$

$$=-\frac{\left((-x^2+2x)^{3/2}\right)'}{\left((-x^2+2x)^{3/2}\right)^2}$$

$$=-\frac{\frac{3}{2}(-x^2+2x)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(-x^2+2x)'}{(-x^2+2x)^3}$$

$$=-\frac{\frac{3}{2}(-x^2+2x)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(-x^2+2x)'}{(-x^2+2x)^3}$$

$$=\frac{3\cdot(x-1)}{(-x^2+2x)^{3-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3\cdot(x-1)}{(-x^2+2x)^{\frac{5}{2}}}.$$

Επειδή $(-x^2+2x)^{\frac{5}{2}}>0$ στο διάστημα (0,2), το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου ταυτίζεται με το πρόσημο του x-1.

x	0	1	2
x-1	-		+
φ΄΄(x)	-	0	+
φ(x)	↷		↺

Σ.Κ.

Στο διάστημα (0,1) η συνάρτηση φ(x) στρέφει τα κοίλα κάτω και στο διάστημα (1,2) στρέφει τα κοίλα άνω.

Στο x=1 έχει σημείο καμπής το φ(1)=0.

iv. $$\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}(x-1)\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}(x-1)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}$$

$= -1\cdot(+\infty)$

$= -\infty$ και

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{x\to2^-}(x-1)\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}$$

$$=\lim_{x\to2^-}(x-1)\cdot\lim_{x\to2^-}\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}$$

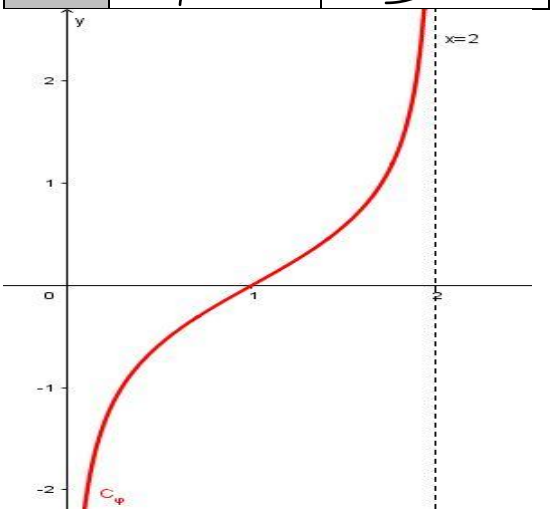
$= 1\cdot(+\infty)$

$= +\infty$.

Άρα οι ευθείες x=0 (άξονας y΄Oy) και x=2 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση φαίνονται παρακάτω:

x	-∞	0	+∞
φ΄(x)	+		+
φ΄΄(x)	-	0	+
φ(x)	↗		↗



14. Αφαφσα
15. ασφαφδ