ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

1. Εάν $\vec{\alpha}$ =(4,-1) και $\vec{\beta}$ =(-5,2) βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων :

i) $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

ii) $\vec{\gamma}=-3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

iii) $\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

iv) $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

2. Εάν $\vec{\alpha}=(3,-2)$ και $\vec{\beta}=(-4,2)$, να βρείτε τις συν/νες και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$.

3. Υπολογίστε τα μέτρα των παρακάτω διανυσμάτων:

i) $\vec{\alpha}$ =(4,-3).

ii) $\vec{\beta}$ =(-5,12)

iii) $\vec{\gamma}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

iv) $\vec{\delta}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

v) $\vec{\varepsilon}=\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right)$

vi) $\vec{\eta}=\left(-1,4\sqrt{5}\right)$.

4. Υπολογίστε το λ∈R, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(2λ^2,-5λ-2) και $\vec{\beta}$=(5λ+3,2λ^2) να είναι ίσα.

5. Υπολογίστε τα κ, λ∈R, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(κ+2,3κ-5) και $\vec{\beta}$=(λ-1,λ+2) να είναι αντίθετα.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(λ-1,κ-1), $\vec{\beta}$ =(κ-2,2λ-5) και $\vec{\gamma}$ =(16,-9), με κ, λ∈R. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ, ώστε $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

7. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(-3κ-2,-λ) και $\vec{\beta}$ = =(3λ+1,2κ+3) να είναι ίσα.

8. Υπολογίστε τον πραγματικό αριθμό κ, έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ =(κ+2,-1) να έχει μέτρο $\sqrt{17}$.

9. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(κ^4,λ^2) και $\vec{\beta}$ = =(5κ^2-4,|λ|+2) να είναι ίσα.

10. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(κ-2λ,6κ-λ) και $\vec{\beta}$ = =(λ+7,3κ+5) να είναι ίσα.

11. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ και ν, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(μ^2,κ^2+λ^2+13) και $\vec{\beta}$ = =(ν^2,4κ-6λ) να είναι αντίθετα.

12. Υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς x και y, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(x^3+y^3,x+y) και $\vec{\beta}$ = =(-7,-1) να είναι αντίθετα.

13. Εάν $\overrightarrow{OA}$ =(3,-2) και $\overrightarrow{OB}$ =(-3,4) βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

14. Να βρεθεί για ποιες τιμές της παραμέτρου λ∈R, το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ =(|λ+1|-3,λ^2-4λ+4) είναι παράλληλο στον άξονα yy΄.

15. Υπολογίστε το λ∈Z, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(λ+2,2λ) και $\vec{\beta}$=(λ-2,2-4λ) να είναι αντίρροπα. (*Απ: λ=-1*)

16. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ =(7,16) ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ =(-1,2) και $\vec{\gamma}$ = =(3,4).

17. Έστω $\vec{a}=(3,-2)$ και $\vec{\beta}=(-4,3)$.

i) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$,

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=$ (18,-13) ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

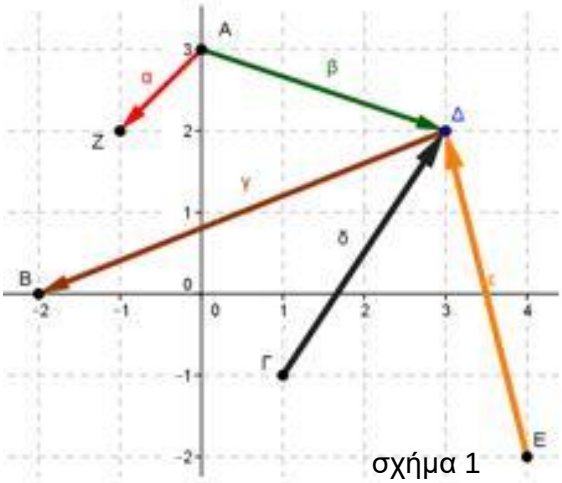
(*Απ:* $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$)

18. Υπολογίστε τις συν/νες του μοναδιαίου διανύσματος που είναι αντίρροπο στο διάνυσμα $(3,\sqrt{3})$.

19. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, εάν:

i) A(3,2) και B(4,3).
ii) A(4,-1) και B(-2,3).
iii) A(0,4) και B(4,0).
iv) A(2,2) και B(-2,-2).
v) A(1,1) και B(1,-1).
vi) A(4,-1) και B(-1,-5).
vii) A(3,-2) και B(0,8).
viii) A(0,-2) και B(-4,-3)
ix) A(5,5) και B(2,2)

Υπολογίστε τις συντεταγμένες (συν/νες) και τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}, \kappa\alpha\iota\ \vec{\varepsilon}$, στο σχήμα 1.



σχήμα 1

20. Σε σύστημα συν/νων Oxy σχεδιάστε τα διανύσματα:

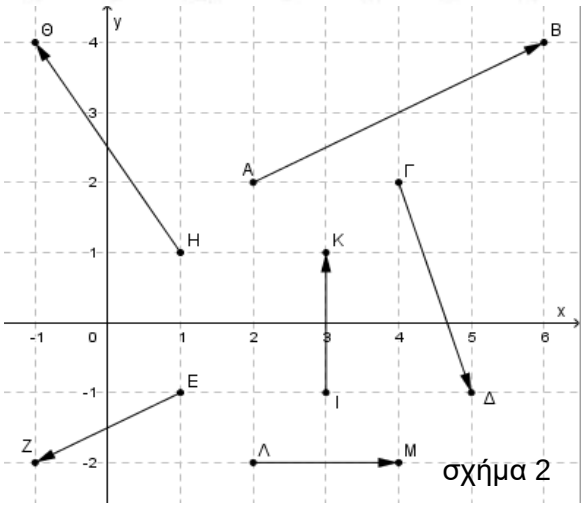
i) $\vec{\alpha}$=(-2,4) με αρχή το σημείο A(4,-1).
ii) $\vec{\beta}$=(3,-4) και τέλος το σημείο Δ(2,-5).
iii) $\vec{\gamma}$=(-2,-3) και σημείο εφαρμογής E(3,-1).
iv) $\vec{\delta}$=(5,3) και πέρας το σημείο H(-1,1).

Σε κάθε περίπτωση να βρείτε τις συν/νες του άκρου που λείπει.

21. Υπολογίστε το λ∈R, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$=(|λ|-2, λ^2-3λ+2) να είναι:

i) $\vec{\alpha} = \vec{0}$.
ii) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha}$//xx΄.
iii) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha}$//yy΄.

23. Υπολογίστε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που φαίνονται στο σχήμα 2.



σχήμα 2

24. Υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου A εάν $\overrightarrow{AB}$ =(5,-2) και B(4,1).

25. Υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου B εάν $\overrightarrow{AB}$= = (-4,-1) και A(3,-2).

26. Υπολογίστε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, εάν A(3,-2) και B(-1,1).

27. Δίνονται τα σημεία A(1,3) και B(4,-5)

i) Να βρείτε σημείο M τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.
ii) Να βρείτε σημείο N τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{NB}$.

28. Υπολογίστε την απόσταση των σημείων:

i) A(6,-4) και B(-2,11).
ii) A(-6,4) και B(6,-12).
iii) A(-10,5) και B(10,-16).
iv) A($3\sqrt{7}$,1) και B(-$\sqrt{7}$,-2).
v) A($\sqrt{5}$,2) και B(-$\sqrt{5}$,-2).

29. Έστω A(-2,-1) και B(7,2). Βρείτε σημείο M του επιπέδου, τέτοιο ώστε $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -\frac{1}{2}$. (*Απ:* (1,0))

30. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM τριγώνου ABΓ, με A(-3,-2), B(-2,6) και Γ(4,-4).

31. Εάν A(2,0), B(-1,2) και Γ(-3,-3), να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών και των διαμέσων του τριγώνου ABΓ.

32. Να υπολογίσετε τα κ, λ∈R, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB με A(3κ-1,2λ) και B(λ,2κ+2) να έχει μέσο το σημείο M(3,2). (*Απ: κ=3, λ=-2*)

33. Παραλληλογράμμου ABΓΔ με κέντρο K, είναι A(1,-2), B(-4,3) και K(3,1). Βρείτε τις συν/νες των άλλων κορυφών του. (*Απ:* (10,-1) και (5,4))

34. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με διάμεσο AΔ. Αν $\overrightarrow{AB} = (2,1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,4)$ και $\Delta\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$, να βρείτε τις συν/νες των κορυφών του. (*Απ:*(1,-2), (3,-1) και (4,2))

35. Τετραπλέυρου ABΓΔ είναι A(3,4), B(-5,2), Γ(2,-3) και Δ(-1,-2).

i) Υπολογίστε τις συν/νες των μέσων K, Λ, M, N των πλευρών του AB, BΓ, ΓΔ , ΔA αντίστοιχα.
ii) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

(*Απ*: (-1,3), (-$^3/_2$,-$^1/_2$), ($^1/_2$,-$^5/_2$), (1,1))

36. Τα μέσα των πλευρών τριγώνου είναι (-1,$^7/_2$), (0,$^1/_2$) και (2,-1). Να υπολογίσετε τις συν/νες των κορυφών του. (*Απ:* (1,2), (-3,5) και (3,-4))

37. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι Κ(-1,3), Λ($^5/_2$,$^7/_2$), Μ(1,$^1/_2$), Ν(-$^5/_2$,0). Υπολογίστε τις συν/νες των κορυφών του.

(*Απ:* Α(-3,1), Β(1,5), Γ(4,2) και Δ(-2,-1))

38. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(1,2), Β(4,6), Γ(10,14) και Δ(7,10) είναι παραλληλόγραμμο. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

39. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, εάν Α(1,3), Β(6,8) και Δ(-2,2).

40. **α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(3,2), Β(11,8), Γ(8,12) και Δ(0,6) είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(2α,2α), Β(2α+α$\sqrt{3}$,5α) και Γ(2α,6α) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

41. Να δείξετε ότι τα σημεία (-2,-2), (2,1) και (-1,5) είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

42. Δίνονται τα σημεία Α(4,1) και Γ(1,4). Να βρεθεί σημείο Β τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O\Gamma}$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΑΒΓ είναι ρόμβος. (*Απ: Β(5,5)*)

43. Υπολογίστε τα x και y∈R, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(x+y,y^2-y-x+1) και $\vec{\beta}$=(-2,x-y) να είναι συγγραμμικά.

44. Υπολογίστε το x∈R, ώστε (ΑΒ)=5, όπου Α(x+1,x-1) και Β(3-2x,2x).

45. Εάν Β(8,13), να βρείτε σημείο Α του άξονα y΄Oy, τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 17$. (*Απ:*Α(0,-2) ή Α(0,28))

46. Να βρεθεί σημείο Μ του άξονα xx΄ το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία Α(2,1) και Β(6,3).

47. Να βρεθεί σημείο Μ του άξονα yy΄ το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία Α(2,1) και Β(-3,-4).

48. Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει Α(-2,-1) και Β(4,1). Βρείτε τις συν/νες της κορυφής Γ.

(*Απ:* (1+$\sqrt{3}$,-3$\sqrt{3}$) ή (1-$\sqrt{3}$,3$\sqrt{3}$)

49. Εάν Α(-2,1) και Β(-4,0), να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου, τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισόπλευρο.

50. Υπολογίστε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(λ,-2), Β(2λ,λ), Γ(3λ,1) και Δ(3λ+1,λ+1) να είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΓΔ.

51. Δίνονται τα σημεία Α(-3,-2) και Β(9,1). Να βρείτε τις συν/νες του σημείου Γ για το οποίο είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$. (*Απ: Γ(1,-1)*)

52. Δίνονται τα σημεία Α(3,-1) και Β(9,5). Υπολογίστε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ με $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Delta B}$

53. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(2,4), Β(-6,-2), Γ(8,2) και Δ(6,-8).

i) Υπολογίστε τις συντεταγμένες των μέσων Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα.

ii) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

54. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του συμμετρικού Α΄ του σημείου Α(3,-1) ως προς το σημείο Κ(4,6).

55. Να δείξετε ότι τα σημεία Α(2,2), Β(5,4) και Γ(7,1) είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

56. Έστω $\overrightarrow{AB}$=(3,-4). Να προσδιορίσετε διάνυσμα $\overrightarrow{K\Lambda} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, με $|\overrightarrow{K\Lambda}|$=10. (*Απ:* $\overrightarrow{K\Lambda} = -2\overrightarrow{AB}$)

57. Να βρεθεί διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha} = (3, -4)$ που να έχει μέτρο 3.

58. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{\beta}$ που έχει μέτρο 2$\sqrt{17}$ και είναι αντίρροπο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$=(4,1).

59. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες διανύσματος $\vec{\beta}$ που έχει μέτρο διπλάσιο από το μέτρο του

διανύσματος $\vec{\alpha}$ =(-3,4) και είναι παράλληλο σε αυτό.

60. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(x+1,5) και $\vec{\beta}$ =(5,x+1) να είναι:

α) ομόρροπα. **β)** αντίρροπα.

61. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(-1,3), Β(2,0) και Γ(-3,5) είναι συνευθειακά.

62. **i)** Να δείξετε ότι τα σημεία Α(1, -1), Β(1+$\sqrt{2}$, 0), Γ(3+$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$) είναι συνευθειακά.

ii) Ομοίως για τα σημεία Δ(1,$\sqrt{2}-1$), Ε($\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$) και Ζ($\sqrt{2}$-1, -1).

63. Να υπολογίσετε το κ∈R, ώστε τα σημεία Α(3,-2), Β(2,-1) και Γ(κ+1,2κ) να είναι συνευθειακά.

64. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(7,6)$ κατά τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\chi}=(2,1)$ και $\vec{y}=(3,4)$.

(*Απ: (4,2) και (3,4)*)

65. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(-3,-1), Β(-5,-3), Γ(-4,7) και Δ(-2,3).

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται.

β) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Ε των ΑΒ και ΓΔ.

66. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) έχει Β(2,-2) και Γ(2,4). Βρείτε τις συν/νες της κορυφής Α, ώστε το τρίγωνο να έχει ύψος $υ_α$ μέτρου 3. (*Απ:* (-1,1) ή (5,1))

67. Δίνονται τα σημεία Β(2,1) και Γ(4,2).

i) Να προσδιορίσετε σημείο Α του άξονα yy΄ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.

ii) Να υπολογίσετε τις συν/νες του βαρύκεντρου Θ του τριγώνου ΑΒΓ.

iii) Να υπολογίσετε τις συν/νες του περίκεντρου Κ του τριγώνου ΑΒΓ.

iv) Να προσδιορίσετε τις συν/νες του συμμετρικού του Θ ως προς την ΒΓ.

(*Απ: Α(0,$\frac{15}{2}$), Θ(2,$\frac{7}{2}$),Κ($\left(\frac{37}{24},\frac{53}{12}\right)$, $Θ_1$(4,-$\frac{1}{2}$))*

68. Εάν Α(-2,1) και Β(-4,0), να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου, τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισόπλευρο.

69. **i)** Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες x_1, x_2 τις ρίζες της εξίσωσης x^2-8x+15=0. Να προσδιορίσετε τις συν/νες του μέσου Μ του ΑΒ αν αυτό έχει τεταγμένη $\frac{x_1x_2}{3}$.

ii) Αν Δ(-4,10), να βρεθούν οι συν/νες του συμμετρικού σημείου Ε του Δ ως προς το Μ.

(*Απ: Μ(4,5), Ε(12,0)*)

70. Να δείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

to be continued...