ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. *Ορισμός*: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *A* και A_1 το σύνολο των σημείων του *A* στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της** f ή απλά **παράγωγος της** f.

2. *Παράγωγος σταθερής συνάρτησης f(x)=c με* $c\in\mathbb{R}$: $(c)'=0$.

Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$ οπότε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0.$$

Άρα $(c)'=0$.

3. *Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης f(x)=x*: $(x)'=1$.

Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\cancel{\frac{x-x_0}{x-x_0}}=1$ οπότε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1.$$

Άρα $(x)'=1$.

4. *Παράγωγος της συνάρτησης* $f(x)=x^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$:

$(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}$

$=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^\nu)}{x-x_0}$

$=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^\nu$ οπότε:

$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^\nu)\\&={x_0}^{\nu-1}+{x_0}^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}\\&=\nu\cdot {x_0}^{\nu-1}.\end{aligned}$$

Άρα $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

5. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$.

Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$

$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$

$=\cancel{\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}}$

$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$ οπότε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Άρα $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$, $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$, $(e^x)'=e^x$ και $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$.

7. *Παράγωγος αθροίσματος*: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Απόδειξη: Για $x\neq x_0$ έχουμε:

$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$

$=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$

$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ οπότε:

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Άρα $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

8. *Παράγωγος γινομένου*:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Παράγωγος γινομένου τριών συναρτήσεων :

$(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))'=$

$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$.

Απόδειξη: $(f(x)g(x)h(x))'=$

$=(f(x)g(x))'h(x)+f(x)g(x)h'(x)=$

$=(f'(x)g(x)+f(x)g'(x))h(x)+f(x)g(x)h'(x)=$

$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$.

$(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$, $c\in\mathbb{R}$.

9. *Παράγωγος πηλίκου*:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

10. $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

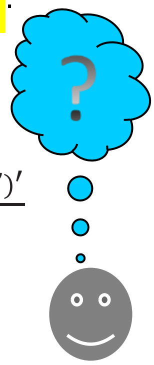
Απόδειξη: $(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'$

$=\frac{(1)'x^\nu-1\cdot(x^\nu)'}{x^{2\nu}}$

$=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}$

$=-\nu x^{\nu-1-2\nu}$

$=-\nu x^{-\nu-1}$.



11. $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη: $(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}\right)'$

$=\frac{(\eta\mu\, x)'\sigma\upsilon\nu\, x-\eta\mu\, x(\sigma\upsilon\nu\, x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

12. $(\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

13. *Παράγωγος σύνθεσης*:
$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

14. *Κανόνας της αλυσίδας*: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

15. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\in R$.

Απόδειξη: $(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'$
$=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'$
$=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}$
$=\alpha x^{\alpha-1}$.

16. $(\alpha^x)' = \alpha^x\ln\alpha$, $0<\alpha\neq1$.

Απόδειξη: $(\alpha^x)'=(e^{x\ln\alpha})'$
$=e^{x\ln\alpha}\cdot(x\ln\alpha)'$
$=\alpha^x\cdot\ln\alpha$.

17. $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, $x\in R^*$.

☛ $x>0$ τότε $|x|=x$ και
$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

☛ $x<0$ τότε $|x|= -x$ και
$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}$.

Άρα $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in R^*$.

18. ***Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων***:

f(x)	f΄(x)
$f(x)=c$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^{\nu}$	$f'(x)=\nu x^{\nu-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)= e^x$
$f(x)=\ln x$, $x>0$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x)= \sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x)=- \eta\mu x$
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	$f'(x)= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1+\varepsilon\varphi^2 x$
$f(x)=\sigma\varphi x$	$f'(x)= -\frac{1}{\eta\mu^2 x} = -1-\sigma\varphi^2 x$

$f(x)=\alpha^x$	$f'(x)= \alpha^x\ln\alpha$
$f(x)=\log_{\alpha}x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

19. ***Κανόνες παραγώγισης***:

a. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$. (*ισχύει και με περισσότερες συναρτήσεις*).
b. $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. $[f(x)g(x)h(x)]'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+$ $+f(x)g(x)h'(x)$. (*Ομοίως και με περισσότερες συναρτήσεις*).
c. $[cf(x)]'=cf'(x)$, όπου c=σταθερός.
d. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{x^2}$
e. $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

20. ***Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων***:

$(f^{\nu}(x))' = \nu f^{\nu-1}(x)\cdot f'(x)$
$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}f'(x)$
$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $f(x)>0$
$(\eta\mu f(x))' = f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)$
$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -f'(x)\cdot\eta\mu f(x)$
$(\varepsilon\varphi\, f(x))' = \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$
$(\sigma\varphi\, f(x))' = -\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$
$\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)$
$(\lambda o\gamma_{\alpha} f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$, $f(x)>0$
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

21. Υπάρχει περίπτωση να παραγωγίζεται το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο ή το πηλίκο δυο συναρτήσεων σε κάποιο σημείο, χωρίς να παραγωγίζονται ξεχωριστά οι συναρτήσεις. Πχ οι συναρτήσεις $f(x)=|x|$ και $g(x)=3-|x|$ δεν παραγωγίζονται στο $x=0$, το άθροισμά τους όμως παραγωγίζεται στο $x=0$.

22. Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, η παράγωγος στο σημείο αλλαγής του τύπου, βρίσκεται με τον ορισμό.

23. Συμβολισμοί Lagrange:

- Συνάρτηση πρώτης παραγώγου: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
- Τιμή της f' σε σημείο x_0: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$
- Συνάρτηση δεύτερης παραγώγου: $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$
- Συνάρτηση τρίτης παραγώγου: $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$
- Συνάρτηση ν-στής παραγώγου: $f^{(\nu)}(x) = \frac{d^{\nu}f(x)}{dx^{\nu}}$

24. Για την ν-στή παράγωγο μιας συνάρτησης, πάντα επαγωγή.

25. Η παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης ν-στού βαθμού είναι πολυώνυμο ν-1 βαθμού.

26. Όταν παραγωγίζουμε μια συναρτησιακή σχέση ως προς x, θεωρούμε το x μεταβλητή και το y σταθερό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

iii) $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{\ln x}$

iv) $f(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$

v) $f(x) = \frac{xe^x}{x^2+1}$

vi) $f(x) = \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}$

vii) $f(x) = \frac{x\ln x}{x^2+1}$

viii) $f(x) = xe^x \varepsilon\varphi x$

ix) $f(x) = \frac{1-x\ln x}{1+x\ln x}$

x) $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$

2) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

ii) $f(x) = xe^{\sqrt{1-x}}$

iii) $f(x) = e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x} + 1)$

iv) $f(x) = \ln^2\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)$

v) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1 - \ln x^2}$

vi) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x}$

vii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)$

viii) $f(x) = \eta\mu^3(2x+3)^2$

ix) $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$

x) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$

xi) $f(x) = e^{-2x} + e^{-x}$

3) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $f(x) = x^{\ln x}$

iii) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

4) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού και $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ οι ρίζες του, να δείξετε ότι:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \frac{1}{x-\rho_3} + \frac{1}{x-\rho_4}.$$

5) Εάν $P(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες του, διαφορετικές ανά δυο, να δείξετε ότι:

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{P'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{P'(\rho_3)} = 0.$$

6) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, τέτοιο ώστε $P(x)-P'(x)=x^4-4$, για κάθε $x \in$ IR.

7) Εάν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο IR*, με:

- **i)** $g(x)=xf(x)$, για κάθε $x\in$ IR*,
- **ii)** $g(1)=14$ και
- **iii)** η g είναι παραγωγίσιμη στο IR*, με $g'(1)=17$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+2x^2-x$. Να βρείτε το $\alpha\in$ IR, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$, να:

- **i)** είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1): $y=3x+1$
- **ii)** είναι κάθετη στην ευθεία (ε_2): $y=-2x+1$
- **iii)** σχηματίζει γωνία 135^0 με τον ημιάξονα Ox.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$

- **i)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\pi/8$,
- **ii)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

10) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR.

- **i)** Εάν f άρτια, τότε f΄ περιττή,
- **ii)** Εάν f περιττή, τότε f΄ άρτια,
- **iii)** Εάν f περιοδική με περίοδο Τ, τότε f΄ περιοδική με περίοδο επίσης Τ.
- **iv)** Αν f περιττή και στο $x_0=1$ έχει κλίση 2008, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=-1$.

11) Εάν f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f(x_0)=2$ και $[f^3(x_0)]'=3$, να δείξετε ότι $f'(x_0)=1/4$.

12) Εάν f παραγωγίσιμη στο IR και $f(2x+3)=x^5$, για κάθε $x\in$IR, να βρείτε την $f'(x)$.

13) Εάν $y=x\eta\mu x$, $x\in$IR, να δείξετε ότι $(y'''+y')^2+(y''+y)^2=4$.

14) Εάν $y=xe^{2x}$, $x\in$IR, να δείξετε ότι $y''=4y'-4y$.

15) Εάν f δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(\ln x)=e^x+\ln x$, $x>0$, να βρείτε την $f''(0)$.

16) Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x), για τα οποία ισχύει $P(x)=[P'(x)]^2$, για κάθε $x\in$IR.

17) **α)** Να δείξετε ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει ρίζα τον αριθμό x=ρ με πολλαπλότητα κ (κ∈N, κ>1), τότε το x=ρ είναι ρίζα της f΄ με πολλαπλότητα κ-1

β) Υπολογίστε τα α, β∈IR, ώστε η εξίσωση $3x^3-5x^2+(α+1)x-β=0$ να έχει διπλή ρίζα το x=1.

18) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^3+2x+1$ δια $(x-1)^2$.

19) Έστω f,g: IR→ IR, παραγωγίσιμες στο IR με $f(x)g(x)e^x+lnx=xe^{x-1}$, για κάθε x>0, να δείξετε ότι:

$$\frac{f'(1)}{g'(1)}=-\frac{f(1)}{g(1)}.$$

20) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}2x^2ημ\frac{1}{x^2} & ,\text{αν } x\in R*\\ 0 & ,\text{αν } x=0\end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $f'(x)=\begin{cases}4x\left(ημ\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}συν\frac{1}{x^2}\right) & ,\text{αν } x\in IR*\\ 0 & ,\quad \text{αν } x=0\end{cases}$,

ii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2ημ\frac{1}{x^2}\right)$ =f ΄(0),

iii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to π}f(x)=2π^2ημ\frac{1}{π^2}$.

21) Η συνάρτηση f:R→R, είναι παραγωγίσιμη με f(1)=3 και $f(x^3)=f(x)$, για κάθε x∈IR. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)-3}{x-1}$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a_1^x+a_2^{2x}+\ldots+a_ν^{νx}$, όπου $α_1$, $α_2$, …, $α_ν$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν f΄(0)=0, να δείξετε ότι $a_1a_2^2\ldots a_ν^ν=1$.

23) Έστω f παραγωγίσιμη στο IR με $f(x^3)=f^3(x)$, f(x)>0 και f΄(x)≠0, για κάθε x∈IR. Να δείξετε ότι f(1)=1.

24) Έστω $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Να δείξετε ότι:

i) $f^2(x)+f'(x)=1$

ii) $f''(x)=-2f(x)f'(x)$

25) Εάν για την συνάρτηση f ισχύει f(0)=0, f΄(x)≠0 και $f'(x)=3+f^3(x)$, για κάθε x∈IR, να δείξετε ότι:

i) $\frac{f''(x)}{f'(x)}=3f^2(x),\ x\in$IR.

ii) f΄΄(0)=0

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

26) Έστω f παραγωγίσιμη στο R, 1-1 και τέτοια ώστε f΄(x)=f(x) για κάθε x∈IR. Να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x}$.

(*Υπόδειξη*: $f(f^{-1}(x))=x$)

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ2x+2συν^2x$, x∈(0,2π). Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία 2x-y+5=0.

28) Υπολογίστε τα α,β∈R, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{x^2+x+1}{2x}$ και $g(x)=x^2+αx+β$, να έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, κάθετη στην ευθεία 2x-3y+5=0.

29) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄Ox.

30) Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$, x>1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία x-y+5=0.

31) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x$. Αν η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ τέμνει τον άξονα xOx΄ στο Α, να δείξετε ότι η προβολή του ΜΑ στον άξονα xOx΄ έχει σταθερό μήκος.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε τυχαίο σημείο της Μ, τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β, να δείξετε ότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

34) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $c(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $s(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $t(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{s(x)}{c(x)}$ και $σ(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{c(x)}{s(x)}$, x∈IR. Να δείξετε ότι:

i) $s(0)=0$, $c(0)=1$, $t(0)=0$.
ii) $s(-x)=-s(x)$ και $c(-x)=c(x)$
iii) $t(-x)=-t(x)$ και $\sigma(-x)=-\sigma(x)$
iv) $c^2(x)-s^2(x)=1$
v) $c(x)+s(x)=e^x$, $c(x)-s(x)=e^{-x}$
vi) $c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)$
vii) $c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)$
viii) $s(x+y)=s(x)c(y)+c(x)s(y)$
ix) $s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)$
x) $t(x+y)=\frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}$
xi) $t(x-y)=\frac{t(x)-t(y)}{1-t(x)t(y)}$
xii) $c(x)+c(y)=2c\left(\frac{x+y}{2}\right)c\left(\frac{x-y}{2}\right)$
xiii) $c(x)-c(y)=2s\left(\frac{x+y}{2}\right)s\left(\frac{x-y}{2}\right)$
xiv) $c(2x)=c^2(x)+s^2(x)$
xv) $s(2x)=2s(x)c(x)$
xvi) $t(2x)=\frac{2t(x)}{1+t^2(x)}$
xvii) $c(2x)=\frac{1+t^2(x)}{1-t^2(x)}$
xviii) $c(x)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2(x)}}$
xix) $s(x)=\frac{t(x)}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

Για την παράγωγο των παραπάνω συναρτήσεων ισχύουν τα:

i. $c'(x)=s(x)$ και $s'(x)=c(x)$
ii. $t'(x)=1/c^2(x)=1-t^2(x)$
iii. $\sigma'(x)=-1/s^2(x)=1-\sigma^2(x)$