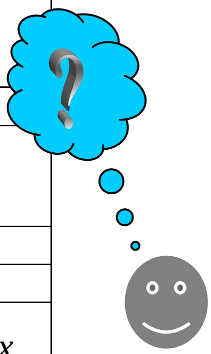
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. *Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων*:

f(x)	f΄(x)
f(x)=c	f΄(x)=0
f(x)=x	f΄(x)=1
f(x)=x^v	f΄(x)=vx^{v-1}
f(x)=$\sqrt{x}$	f΄(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
f(x)=e^x	f΄(x)= e^x
f(x)=lnx, x>0	f΄(x)=$\frac{1}{x}$
f(x)=ημx	f΄(x)= συνx
f(x)=συνx	f΄(x)=- ημx
f(x)=εφx	f΄(x)= $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1+\varepsilon\phi^2 x$
f(x)=σφx	f΄(x)= $-\frac{1}{\eta\mu^2 x}=-1-\sigma\phi^2 x$
f(x)=α^x	f΄(x)= α^xlnα
f(x)=$\log_\alpha x$	f΄(x)=$\frac{1}{x\ln a}$
f(x)=$\frac{1}{x}$	f΄(x)=$-\frac{1}{x^2}$



2. *Κανόνες παραγώγισης*:

i) [f(x)±g(x)]΄=f΄(x)±g΄(x). (*ισχύει και με περισσότερες συναρτήσεις*).
ii) [f(x)g(x)]΄=f΄(x)g(x)+f(x)g΄(x). [f(x)g(x)h(x)]΄=f΄(x)g(x)h(x)+f(x)g΄(x)h(x)+ +f(x)g(x)h΄(x). (*Ομοίως και με περισσότερες συναρτήσεις*).
iii) [cf(x)]΄=cf΄(x), όπου c=σταθερός.
iv) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{x^2}$
v) $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

3. *Παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων*:

$(f^v(x))'=vf^{v-1}(x)$
$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}f'(x)$
$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, f(x)>0
$(\eta\mu\ f(x))'=\sigma\upsilon\nu\ f(x)\ f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu\ f(x))'=-\eta\mu\ f(x)\ f'(x)$
$(\varepsilon\phi\ f(x))'=\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2\ f(x)}$
$(\sigma\phi\ f(x))'=-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2\ f(x)}$
$\left(\alpha^{f(x)}\right)'=\alpha^{f(x)}\ln a\cdot f'(x)$
$(\lambda o\gamma_\alpha\ f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a},\quad f(x)>0$
$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

4. Υπάρχει περίπτωση να παραγωγίζεται το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο ή το πηλίκο δυο συναρτήσεων σε κάποιο σημείο, χωρίς να παραγωγίζονται ξεχωριστά οι συναρτήσεις. Πχ οι συναρτήσεις f(x)=|x| και g(x)=3-|x|δεν παραγωγίζονται στο x=0, το άθροισμά τους όμως παραγωγίζεται στο x=0.

5. Στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, η παράγωγος στο σημείο αλλαγής του τύπου, βρίσκεται με τον ορισμό.

6. Συμβολισμοί Lagrange:

- Συνάρτηση πρώτης παραγώγου: $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$

Τιμή της *f΄* σε σημείο x_0: $f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$

- Συνάρτηση δεύτερης παραγώγου: $f''(x)=\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$

- Συνάρτηση τρίτης παραγώγου: $f'''(x)=\dfrac{d^3 f(x)}{dx^3}$

- Συνάρτηση ν-στής παραγώγου: $f^{(\nu)}(x)=\dfrac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}$

7. Για την ν-στή παράγωγο μιας συνάρτησης, πάντα επαγωγή.
8. Η παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης ν-στού βαθμού είναι πολυώνυμο ν-1 βαθμού.
9. Όταν παραγωγίζουμε μια συναρτησιακή σχέση ως προς x, θεωρούμε το x μεταβλητή και το y σταθερό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

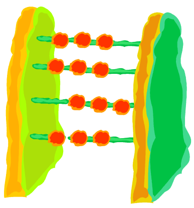
i) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

ii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{\ln x}$

iv) $f(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$

v) $f(x)=\dfrac{xe^x}{x^2+1}$



vi) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}$

vii) $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2+1}$

viii) $f(x)=xe^x\varepsilon\phi x$

ix) $f(x)=\dfrac{1-x\ln x}{1+x\ln x}$

x) $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$

2) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=e^{2x}-2e^x$

ii) $f(x)=xe^{\sqrt{1-x}}$

iii) $f(x)=e^{\sqrt{3x}}(\sqrt{3x}+1)$

iv) $f(x)=\ln^2\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+2}\right)$

v) $f(x)=\sqrt{x^2-1-\ln x^2}$

vi) $f(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln^2 x}$

vii) $f(x)=\eta\mu^3(2x+3)$

viii) $f(x)=\eta\mu^3(2x+3)^2$

ix) $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$

x) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$

xi) $f(x)=e^{-2x}+e^{-x}$

3) Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $f(x)=x^{\ln x}$

iii) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

4) Εάν *P*(x) είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού και ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 οι ρίζες του, να δείξετε ότι $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}+\dfrac{1}{x-\rho_3}+\dfrac{1}{x-\rho_4}$.

5) Εάν *P*(x) είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες του, διαφορετικές ανά δυο, να δείξετε ότι $\dfrac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\dfrac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\dfrac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=0$.

6) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με α, β, γ, $\delta\in R$, τέτοιο ώστε $P(x)-P'(x)=x^4-4$, για κάθε $x\in R$.

7) Εάν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο R^*, με:

- **i)** $g(x)=xf(x)$, για κάθε $x\in R^*$,
- **ii)** $g(1)=14$ και
- **iii)** η g είναι παραγωγίσιμη στο R^*, με $g'(1)=17$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+2x^2-x$. Να βρείτε το $\alpha\in R$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$, να:

- **i)** είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1): $y=3x+1$
- **ii)** είναι κάθετη στην ευθεία (ε_2): $y=-2x+1$
- **iii)** σχηματίζει γωνία 135^0 με τον ημιάξονα Ox.

9) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=συν2x

- **i)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\pi/8$,
- **ii)** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

10) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R.

- **i)** Εάν f άρτια, τότε f΄ περιττή,
- **ii)** Εάν f περιττή, τότε f΄ άρτια,
- **iii)** Εάν f περιοδική με περίοδο Τ, τότε f΄ περιοδική με περίοδο επίσης Τ.
- **iv)** Αν f περιττή και στο $x_0=1$ έχει κλίση 2008, να βρείτε την κλίση της f στο $x_0=-1$.

11) Εάν f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f(x_0)=2$, $[f^3(x_0)]'=3$, να δείξετε ότι $f'(x_0)=1/4$.

12) Εάν f παραγωγίσιμη στο R και $f(2x+3)=x^5$, για κάθε $x\in R$, να βρείτε την $f'(x)$.

13) Εάν y=xημx, $x\in R$, να δείξετε ότι $(y'''+y')^2+(y''+y)^2=4$.

14) Εάν $y=xe^{2x}$, $x\in R$, να δείξετε ότι $y''=4y'-4y$.

15) Εάν f δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(\ell nx)=e^x+\ell nx$, x>0, να βρείτε την $f''(0)$.

16) Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x), για τα οποία ισχύει $P(x)=[P'(x)]^2$, για κάθε $x\in R$.

17) α) Να δείξετε ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει ρίζα τον αριθμό x=ρ με πολλαπλότητα κ ($\kappa\in N$, κ>1), τότε το x=ρ είναι ρίζα της f΄ με πολλαπλότητα κ-1

β) Υπολογίστε τα α, $\beta\in R$, ώστε η εξίσωση $3x^3-5x^2+(\alpha+1)x-\beta=0$ να έχει διπλή ρίζα το x=1.

18) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^3+2x+1$ δια $(x-1)^2$.

19) Έστω $f,g:R\to R$, παραγωγίσιμες στο R με $f(x)g(x)e^x+\ell nx=xe^{x-1}$, για κάθε x>0, να δείξετε ότι $\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=-\dfrac{f(1)}{g(1)}$.

20) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}2x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2} & ,\alpha\nu\ x\in R^*\\ 0 & ,\alpha\nu\ x=0\end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $f'(x)=\begin{cases}4x\left(\eta\mu\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2}\right) & ,\alpha\nu\ x\in R^*,\\ 0 & ,\alpha\nu\ x=0\end{cases}$

ii) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0}\left(2x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)$=f΄(0),

iii) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to\pi} f(x)=2\pi^2\eta\mu\frac{1}{\pi^2}$.

21) Η συνάρτηση f:R→R, είναι παραγωγίσιμη με f(1)=3 και $f(x^3)=f(x)$, για κάθε x∈R. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 f(x)-3}{x-1}$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a_1^x+a_2^{2x}+...+a_\nu^{\nu x}$, όπου α_1, α_2, …, α_ν θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν f΄(0)=0, να δείξετε ότι $a_1 a_2^2...a_\nu^\nu=1$.

23) Έστω f παραγωγίσιμη στο R με $f(x^3)=f^3(x)$, f(x)>0 και f΄(x)≠0, για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(1)=1.

24) Έστω $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Να δείξετε ότι:

i) $f^2(x)+f΄(x)=1$

ii) f΄΄(x)=-2f(x)f΄(x)

25) Εάν για την συνάρτηση f ισχύει f(0)=0, f΄(x)≠0 και $f΄(x)=3+f^3(x)$, για κάθε x∈R, να δείξετε ότι:

i) $\frac{f''(x)}{f'(x)}=3f^2(x),\ x\in R$

ii) f΄΄(0)=0

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

26) Έστω f παραγωγίσιμη στο R, 1-1 και τέτοια ώστε f΄(x)=f(x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x}$. (*Υπόδειξη*: $f(f^{-1}(x))=x$)

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x+2\sigma\upsilon\nu^2 x$, x∈(0,2π). Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία 2x-y+5=0.

28) Υπολογίστε τα α,β∈R, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{x^2+x+1}{2x}$ και $g(x)=x^2+\alpha x+\beta$, να έχουν στο κοινό τους σημείο κοινή εφαπτομένη, κάθετη στην ευθεία 2x-3y+5=0.

29) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄Ox.

30) Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$, x>1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία x-y+5=0.

31) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ και $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x$. Αν η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ τέμνει τον άξονα xOx΄ στο A, να δείξετε ότι η προβολή του MA στον άξονα xOx΄ έχει σταθερό μήκος.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε τυχαίο σημείο της M, τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B, να δείξετε ότι το M είναι μέσο του AB.

34) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $c(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $s(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $t(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{s(x)}{c(x)}$ και $\sigma(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{c(x)}{s(x)}$, x∈R. Να δείξετε ότι:

i) s(0)=0, c(0)=1, t(0)=0.
ii) s(-x)=-s(x) και c(-x)=c(x)
iii) t(-x)=-t(x) και σ(-x)=-σ(x)
iv) $c^2(x)-s^2(x)=1$
v) $c(x)+s(x)=e^x$, $c(x)-s(x)=e^{-x}$
vi) c(x+y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)
vii) c(x-y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)
viii) s(x+y)=s(x)c(y)+c(x)s(y)
ix) s(x-y)=s(x)c(y)-c(x)s(y)
x) $t(x+y)=\dfrac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}$
xi) $t(x-y)=\dfrac{t(x)-t(y)}{1-t(x)t(y)}$
xii) $c(x)+c(y)=2c\left(\dfrac{x+y}{2}\right)c\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
xiii) $c(x)-c(y)=2s\left(\dfrac{x+y}{2}\right)s\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
xiv) $c(2x)=c^2(x)+s^2(x)$
xv) s(2x)=2s(x)c(x)
xvi) $t(2x)=\dfrac{2t(x)}{1+t^2(x)}$
xvii) $c(2x)=\dfrac{1+t^2(x)}{1-t^2(x)}$
xviii) $c(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2(x)}}$
xix) $s(x)=\dfrac{t(x)}{\sqrt{1-t^2(x)}}$

Για την παράγωγο των παραπάνω συναρτήσεων ισχύουν τα:

i) c΄(x)=s(x) και s΄(x)=c(x)
ii) $t'(x)=1/c^2(x)=1-t^2(x)$
iii) $σ'(x)=-1/s^2(x)=1-σ^2(x)$

35)…