ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

1ον ΚΥΚΛΟΣ

1) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που έχει διάμετρο ΑΒ με Α(5,-1), Β(-3,7).

2) Να βρεθεί η εξίσωση της περιφέρειας με κέντρο Κ(2,4) και εφάπτεται της ευθείας (ε): 3x+4y-12=0.

3) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α(0,1), Β(0,6) και Γ(3,0).

4) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που είναι περιγεγραμμένος στο τρίγωνο:
i) με κορυφές Α(1,7), Β(8,6) και Γ(7,1),
ii) με εξισώσεις πλευρών x+y=2, y=2x-1 και x-3y=3.

5) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α(0,-3), Β(4,0) και έχει το κέντρο της στην ευθεία x+2y=0.

6) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία x+y=0 και διέρχεται από τα σημεία τομής των περιφερειών:
(c_1): $(x-1)^2+(y+5)^2=50$ και
(c_2): $(x+1)^2+(y+1)^2=10$.

7) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α(1,-1) και από τα σημεία τομής των περιφερειών:
(c_1): $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ και
(c_2): $x^2+y^2-6x+12y-35=0$.

8) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων που άγονται από την αρχή Ο του συστήματος συν/νων στην περιφέρεια $x^2+y^2-6x-2y+\frac{81}{37}=0$.

9) Να δείξετε ότι η περιφέρεια $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ εφάπτεται στον άξονα x΄Ox. Μετά να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτής στα σημεία (1,1) και (2,2) και το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από αυτές και τους άξονες.

10) Να βρείτε το $\kappa\in R$, ώστε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο Α(5,4) προς την περιφέρεια $x^2+y^2+2\kappa y=0$ να είναι 1.

11) Δείξτε ότι οι περιφέρειες $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ και $x^2+y^2+2x-6y+1=0$ εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συν/νες του σημείου επαφής Α. Μετά να βρείτε την εξίσωση της περιφέρειας που εφάπτεται των παραπάνω περιφερειών στο Α και διέρχεται από το σημείο Β(3,2).

12) Να βρεθεί η μεγαλύτερη και η μικρότερη απόσταση του σημείου Μ(10,7) από την περιφέρεια $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

13) Έστω α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τον γ.τ. του σημείου τομής των ευθειών (ε_1): xσυνθ+yημθ=α και (ε_2): xημθ-yσυνθ=β, όταν το θ μεταβάλλεται.

14) Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των περιφερειών $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+4=0$, εάν ξέρουμε ένα εξ' αυτών, το (6,2) και ότι ο γ.τ. είναι πάνω σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο.

15) Στο επίπεδο θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy και σημείο Α τέτοιο ώστε $\left|\vec{OA}\right|=3$. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, τέτοια ώστε $\vec{OM}(\vec{OM}-2\vec{OA})=7$.

16) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας υπό την οποία φαίνεται ο κύκλος κέντρου Κ(4,5) και ρ=1, από την αρχή Ο του συστήματος συν/νων.

17) Να ορίσετε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α(1,4) και με τον κύκλο (c): $(x-2)^2+(y-2)^2=10$ ορίζει χορδή ΒΓ που έχει μέσον το Α.

18) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $\alpha=\sqrt{3}$. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, τέτοια ώστε $2\vec{MA}^2+\vec{MA}\cdot\vec{MB}+\vec{MA}\cdot\vec{M\Gamma}=\frac{9}{8}$.

19) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $A=60^0$ και πλευράς α.
a) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Delta})\vec{M\Gamma}=3\kappa^2$, όπου $\kappa\in R_+$,
b) να υπολογίσετε το κ, ώστε το σημείο Α να είναι σημείο του παραπάνω γ.τ.,
c) να δείξετε ότι υπάρχει σημείο Σ του επιπέδου, τέτοιο ώστε $\vec{\Sigma A}-2\vec{\Sigma B}+4\vec{\Sigma\Gamma}=\vec{0}$,
d) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων Ρ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $\left|\vec{PA}-2\vec{PB}+4\vec{P\Gamma}\right|=3\left|\vec{P\Delta}\right|$.

20) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, τέτοια ώστε $4(\vec{MA}\cdot\vec{MB}+\vec{MB}\cdot\vec{M\Gamma}+\vec{MA}\cdot\vec{M\Gamma})=\alpha^2$.

21) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in R$, ώστε η εξίσωση: (C_λ): $x^2+y^2-2\lambda x-2(\lambda+1)y+4\lambda^2-\lambda+2=0$ να παριστάνει κύκλο. Στην συνέχεια να δείξετε ότι ο γ.τ. των κέντρων των παραπάνω κύκλων όταν το λ μεταβάλλεται, είναι ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22) Δίνεται η εξίσωση:
(C_λ): $x^2+y^2+4\lambda x-2(\lambda-2)y+4(\lambda^2-\lambda+1)=0$. (1)

i) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, $\forall\lambda\in R^*$,
ii) να βρείτε τον γ.τ. των κέντρων των παραπάνω κύκλων,
iii) για ποιά τιμή του λ ο κύκλος που προκύπτει εφάπτεται:
iiiα) στον άξονα xOx΄,
iiiβ) στον άξονα yOy΄,
iv) Να δείξτε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) έχουν δυο κοινές εφαπτομένες.

23) Δίνονται η ευθεία (ε): $5x+3y+2=0$ και ο κύκλος (c): $x^2+y^2-x-2=0$ που τέμνονται στα σημεία Μ και Ν.
i) Να δείξετε ότι η εξίσωση
$x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0$, $\lambda\in R$ (1)
παριστάνει κύκλο που διέρχεται από τα σημεία Μ και Ν,
ii) να βρείτε το λ, ώστε ο κύκλος (1) να διέρχεται από το Ο,
iii) να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων (1) όταν το λ μεταβάλλεται, διαγράφουν ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

24) Δίνεται εξίσωση κύκλου (c): $x^2+y^2+2Ax+2By+\Gamma=0$……………(1), με $A^2+B^2-\Gamma>0$.
i) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του $P(x_0,y_0)$ δίνεται από την εξίσωση $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+\Gamma=0$. *__Εφαρμογή__*: Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2-4x+2y=0$ που διέρχεται από το σημείο P(1,1).
ii) Εάν $M(x_0,y_0)$ τυχαίο σημείο εξωτερικό του κύκλου και ΜΚ, ΜΛ τα εφαπτόμενα τμήματα από το Μ προς τον κύκλο, να δείξετε ότι η ΚΛ έχει εξίσωση $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+\Gamma=0$. *__Εφαρμογή__*: Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+4x+8y+16=0$ και το σημείο $M_0(-4,1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο και ότι το σημείο M_0 είναι εξωτερικά του κύκλου. Εάν οι εφαπτομένες από το Μ προς τον κύκλο, τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Κ και Λ, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ.
iii) Αφού αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+(\lambda+2)x-2=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή της παραμέτρου λ και $M_0(x_0,y_0)$ τυχαίο σημείο εξωτερικό του κύκλου, να δείξετε ότι οι ευθείες ΚΛ του (ii) ερωτήματος διέρχονται από σταθερό σημείο, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου λ, το οποίο και να βρείτε.

25) Θεωρούμε τους κύκλους
(c_1): $x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και
(c_2): $x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$.
i) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): $(A_1-A_2)x+ +(B_1-B_2)y+(\Gamma_1-\Gamma_2)=0$ είναι κάθετη στην διάκεντρό τους,
ii) εάν Μ είναι τυχαίο σημείο της (ε), να δείξετε ότι $\Delta_{c_1}^{M}=\Delta_{c_2}^{M}$, δηλαδή η (ε) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων.

26) Να δείξετε ότι ο γ.τ. των μέσων των χορδών του κύκλου (c): $x^2+y^2+2gx+c=0$, με $g,c\in R$ και $g^2>c$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, είναι η περιφέρεια $x^2+y^2+gx=0$.

27) Θεωρούμε κύκλο (K,R) και σταθερό σημείο του Α. Αν ΓΔ τυχαία διάμετρός του που δεν διέρχεται από το Α και οι εφαπτόμενες του στα Γ και Δ τέμνουν την εφαπτομένη του κύκλου στα Μ και Ν αντίστοιχα, να δείξετε ότι το γινόμενο $\vec{AM}\cdot\vec{AN}$ είναι σταθερό.

28) Δίνονται δυο σταθερά σημεία Α και Β με (ΑΒ)=2α=const. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=\lambda$, $\lambda\in R$ με $\lambda\geq-\alpha^2$.

29) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=R^2$, R>0. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία οι εφαπτόμενες από το Μ προς τον δοθέντα κύκλο να είναι κάθετες μεταξύ τους.

30) Να δείξετε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι κύκλοι:
(c_1): $x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και
(c_2): $x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$
να τέμνονται ορθογωνίως, είναι η $A_1A_2+B_1B_2=2(\Gamma_1+\Gamma_2)$.
(*__Σημείωση__*: Δύο κύκλοι τέμνονται <u>ορθογώνια</u>, εάν οι εφαπτομένές τους στα κοινά τους σημεία είναι κάθετες.)

31) Να δείξετε ότι η περιφέρεια που έχει διάμετρο την κοινή χορδή των κύκλων $x^2+y^2-αx=0$ και $x^2+y^2-βy=0$, είναι $(α^2+β^2)(x^2+y^2)=αβ(βx+αy)$.

32)