23. 23312-4: Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2,2]$, συνεχής στο $[-2,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$ (1), για κάθε $x\in[-2,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 8)

β) Αν $f(0)=3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2=4-x^2$, για κάθε $x\in[-2,2]$ και κατόπιν ότι $f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$. (Μονάδες 9)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Επειδή και τα δύο μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο (-2, 2), έχουμε: $(f^2(x)-2f(x)+x^2-3)'=(0)'$ ⇔ 2f(x)f ΄(x)-2f ΄(x)+2x=0… (2)

Επίσης και τα δύο μέλη της (2) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο (-2, 2), οπότε:

$\big(2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x\big)'=(0)'$ ⇔ $2(f'(x))^2+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0$….(3)

Αν η f παρουσιάζει στο $x_0\in(-2,2)$ σημείο καμπής τότε $f''(x_0)=0$ και η (3) για $x=x_0$ δίνει:

$2(f'(x_0))^2+2f(x_0)\cancelto{0}{f''(x_0)}-2\cancelto{0}{f''(x_0)}+2=0$ ⇔ $2(f'(x_0))^2+2=0$ η οποία είναι αδύνατη. Επομένως η f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

β)

i. Για κάθε $x\in[-2,2]$, έχουμε $4-x^2\geq 0$ και (1) ⇔ $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$

⇔ $f^2(x)-2f(x)+1=4-x^2$

⇔ $(f(x)-1)^2=4-x^2$

⇔ $|f(x)-1|=4-x^2$……..(4)

Θέτουμε g(x) = f(x) - 1, $x\in[-2,2]$. Τότε από την σχέση (4) έχουμε $|g(x)|=4-x^2$……(5)

Επειδή $4-x^2>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$ η σχέση (4) ⇔ $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(-2,2)$ και αφού η g είναι συνεχής στο (-2, 2), διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2, 2) και αφού g(0) = f(0) – 1
= 3 – 1
= 2 > 0

θα είναι g(x) > 0 για κάθε $x\in(-2,2)$, οπότε η (5) ⇔ $g(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Επειδή g(2) = g(-2) = 0, είναι $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

⇔ $f(x)-1=\sqrt{4-x^2}$

⇔ $f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$, για κάθε $x\in[-2,2]$.

ii. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [-2, 2], επομένως από το θεώρημα μεγίστης – ελαχίστης τιμής, παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

Παρατηρούμε ότι $0\leq\sqrt{4-x^2}\leq 2$ ⇔ $1\leq 1+\sqrt{4-x^2}\leq 3$

⇔ $1\leq f(x)\leq 3$, για κάθε $x\in[-2,2]$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 3, για x = 0 και ολικό ελάχιστο το 1 για x = -2 και x=2.

Λύση της εξίσωσης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$:

Έχουμε $f(x)\geq 1$ και $\sigma\upsilon\nu x\leq 1$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

Η ισότητα στην πρώτη ανίσωση ισχύει μόνο για x = -2 και x = 2.

Η ισότητα στη δεύτερη ανίσωση ισχύει μόνο για x = 0.

Όμως f(0)=3 και f(x) > 1 στο (-2, 2), άρα f(x) > συνx για κάθε $x\in[-2,2]$.

Άρα η εξίσωση f (x) = συνx είναι αδύνατη στο [-2, 2].

24. 23531-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)<0$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f(x))^{2023}}{f(x)-f(x_0)}$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Για κάθε x > 0 η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με f '(x) = $e^x - \frac{1}{x}$ και f ' ' (x) = $e^x + \frac{1}{x^2} > 0$.
Άρα η f είναι κυρτή στο (0, +∞).
β) Αφού η συνάρτηση f ' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, θα έχουμε ότι για x ∈ (0,1) οι αντίστοιχες τιμές f ' (x) θα ανήκουν στο διάστημα f '((0,1)) = $\left(\lim\limits_{x\to0^+} f'(x), \lim\limits_{x\to1^-} f'(x)\right)$
= (-∞, e-1).
στο οποίο ανήκει ο αριθμός μηδέν και καθώς η συνάρτηση f ' είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) θα υπάρχει μοναδικό x_0 ∈ (0, 1) ώστε f ' (x_0) = 0. Τότε:
• για x > x_0 θα είναι f '(x) > f '(x_0) = 0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [x_0, +∞).
• για x < x_0 θα είναι f '(x) < f '(x_0) = 0, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-∞, x_0].
Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της f.

x	0	x_0	1
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗
		Ο.Ε. f (x_0)	

Ώστε η f παρουσιάζει ελάχιστο για x_0 .

Επίσης, x_0 < 1 $\overset{f\uparrow \text{ στο } (x_0,1)}{\Leftrightarrow}$ f(x_0) < f(1) ⇔ f(x_0) < 0.
γ) Επειδή είναι f(x) ≥ f(x_0) (ολικό ελάχιστο), είναι f(x) > f(x_0) ⇔ f(x) - f(x_0) > 0 κοντά στο x_0.. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞), είναι και συνεχής, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = f(x_0) - f(x_0)$=0.
'Επειδή f παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{2023} = (f(x_0))^{2023} < 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f(x))^{2023}}{f(x)-f(x_0)} \overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{2023} \cdot \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)} = \underbrace{\left(f(x_0)\right)^{2023}}_{<0} \cdot (+\infty) = -\infty.$

25. 24759-4 (τράπεζα): Έστω συνάρτηση f: IR → IR παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει
$f(x) \geq x^2 - x + 1$για κάθε $x \in$ IR.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in$ IR. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (Μονάδες 5)

ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) i. Για x > 0, είναι $\frac{f(x)}{x} \geq x - 1 + \frac{1}{x}$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)$ = +∞-1+0 = +∞, θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ = =+∞, (παρατήρηση 11 σελίδα 21 στο παρόν φυλλάδιο).

ii. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ = =+∞, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο +∞.
Επίσης για x < 0, είναι $\frac{f(x)}{x} \leq x - 1 + \frac{1}{x}$ και αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)$ = -∞-1+0 = -∞, θα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ = -∞, (παρατήρηση 11 σελίδα 21 στο παρόν φυλλάδιο), οπότε η συνάρτηση f δεν έχει πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο -∞ .
Τέλος η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και άρα συνεχής στο IR, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Τελικά η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Θέτω g(x)=x^2-x+1, για κάθε $x \in$ IR.
g΄(x)=2x-1, της οποίας ο πίνακας μεταβολών είναι ο παρακάτω:

x	-∞	$\frac{1}{2}$	+∞
g΄(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗

O.E.
g($^1/_2$)=$^3/_4$

στο x=$^1/_2$ παρουσιάζει Ο.Ε. και άρα f(x) ≥ g(x) ≥ ¾.

β) i. $f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x = $\frac{1}{2}$ ελάχιστο το $\frac{3}{4}$.
Συνεπώς από το θεώρημα Fermat συμπεραίνουμε ότι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

ii. Από Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f, στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, υπάρχει ξ∈$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ldots\ldots(1)$$

Αφού $\frac{1}{2}$ < ξ και $f'\left(\frac{1}{2}\right) < f'(\xi)$f, η f ' δεν είναι γνησίως φθίνουσα και κατ' επέκταση η f δεν είναι κοίλη.

Εναλλακτικά, θεωρούμε τη συνάρτηση g(x) = f (x) - x^2 + x – 1 , η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με g΄(x) = f ΄(x) - 2x + 1.
Παρατηρούμε ότι g(1) = f (1) - 1 + 1 - 1 = 0, οπότε από τη σχέση g(x) ≥ 0 ⇔ g(x) ≥ g(1), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο το 0. Συνεπώς από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι g'(1) = 0 ⇔ f ΄(1) - 2 + 1 = 0
⇔ f ΄(1) = 1.
Επειδή $\frac{1}{2}$ < 1 και $f'\left(\frac{1}{2}\right) < f'(1)$ συμπεραίνουμε ότι η f ' δεν είναι γνησίως φθίνουσα και κατ' επέκταση η f δεν είναι κοίλη.

26. **24760-4:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x,\ \ x > 0$ όπου $\lambda \in$ IR. Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o \in (1, e)$ με $f'(x_o) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_o}(1 - x_o) + 1 - \ln x_o$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) συναρτήσεων ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και συνεχής, με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - \lambda$. Η f ' είναι επίσης παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με f ΄΄(x) = $e^x + \frac{1}{x^2}$ > 0 για κάθε x ∈ IR που σημαίνει ότι η f είναι κυρτή.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο [1,e] άρα και συνεχής.
Επίσης $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$
⇔ f(1) = f(e)
οπότε πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση f στο [1, e] και επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1, e)$ με $f'(x_o) = 0$ και επειδή η f ' είναι γνησίως αύξουσα το x_o είναι μοναδικό.

γ) Η f ' είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο IR, άρα και στο διάστημα $[1, e]$. Επίσης 1 < x_o < e και αφού η f ' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε f΄(1) < f΄(x_0) <f΄(e)
⇔ f΄(1) < f΄(x_0) <f΄(e)
⇔ f΄(1) < 0 < f΄(e)
Επομένως f΄(1) · f΄(e) < 0, οπότε για την f ' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [1,e] .

δ) • Για κάθε x∈(0, x_0) είναι x < x_0 και αφού η f ' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε
⇔ f΄(x) < f΄(x_0)
⇔ f΄(x) < 0

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0)$.

• Για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ είναι $x > x_0$ και αφού η f ' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$\Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0)$

$\Leftrightarrow f'(x) > 0$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 που είναι το:

$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - \lambda x_0$.........(1)

$f'(x_o) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} - \lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = e^{x_0} - \frac{1}{x_0}$........(2)

$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right) x_0$

$\Leftrightarrow f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 e^{x_0} + 1$

$\Leftrightarrow f(x_0) = e^{x_0}(1 - x_o) + 1 - \ln x_o$.

27. 24769-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o = 1$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x) = \left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right)'$

$= \frac{1}{x+1}(x+1)' - \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x}{(x+1)^2}$.

Επειδή $(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x > -1$, το πρόσημο της παραγώγου της f(x) είναι ίδιο με το πρόσημο του x. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Η f ΄΄ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f''(x) = \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)'$

$= \frac{(x)'(x+1)^2 - x[(x+1)^2]'}{(x+1)^4}$

$= \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4}$

$= \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4}$

$= \frac{(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4} = \frac{(-x+1)}{(x+1)^3}$.

Επειδή $(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x > -1$, το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f(x) είναι ίδιο με το πρόσημο του (-x+1). Άρα f ΄΄ > 0 και η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) i. $F(1) = \ln 2$ και $F'(1) = f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης F στο σημείο της A(1,F(1)) έχει εξίσωση y - F(1) = F΄(1) (x-1)

$\Leftrightarrow y - \ln 2 = (\ln 2 - ½)(x-1)$

$\Leftrightarrow y = (\ln 2 - ½)\, x + ½$.

ii. Η F είναι κυρτή στο [0, +∞), οπότε η γραφική της παράσταση της F είναι πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της, άρα και στο σημείο Α(1,F(1)).

Επομένως F(x) ≥ (ln2 – ½) x + ½ ⇔ 2F(x) ≥ (2ln2 – 1) x + 1

⇔ 2F(x) - 1 ≥ (2ln2 – 1) x

$\Leftrightarrow \frac{2F(x)-1}{x} \geq ln4 - 1$

με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 1, που είναι το ζητούμενο.

28. **25745-4:** Δίνεται συνάρτηση $f: [0,2] \to$ IR η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν f(1)=1, $f'(1) = 0$, f(0) = f(2) και $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 8)

Λύση:

α) i. Αν υπήρχε $x_0 \in (0,2)$ με $f(x_0) = 0$, τότε από τη δοσμένη σχέση θα είχαμε $(f'(x))^2 < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς f(x) ≠ 0, για κάθε $x \in (0,2)$.

ii. Αφού f συνεχής στο (0,2) και για κάθε $x \in (0,2)$ είναι f(x) ≠ 0, διατηρεί πρόσημο σε αυτό και επειδή f (1) =1 > 0, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

β) Από τη δοσμένη σχέση και αφού δείξαμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$, προκύπτει ότι:

$f''(x) < -\frac{(f'(x))^2}{f(x)} < 0$, για κάθε $x \in (0,2)$, οπότε αφού η f είναι συνεχής στο [0,2], είναι κοίλη στο [0,2] και δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Αφού f κοίλη στο [0,2] η f ' θα είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,2).

Άρα για κάθε 0 < x < 1 $\overset{f'\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f ΄(0) > f ΄(x) > f ΄(1)

⇔ f ΄(x) > 0

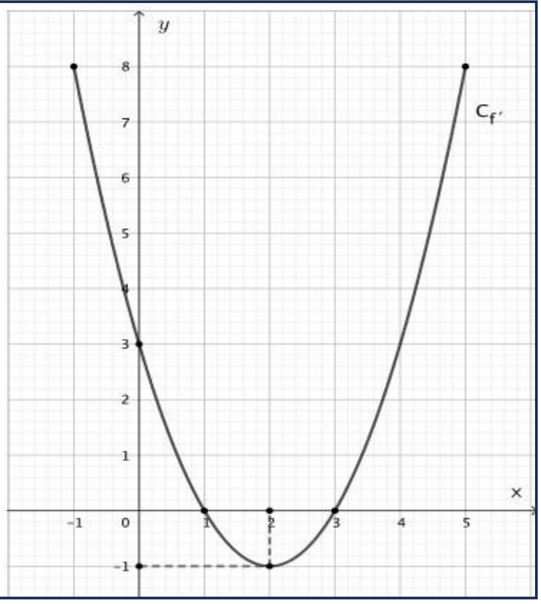
και αφού f συνεχής στο [0,1] θα είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1],

ενώ για κάθε 1 < x < 2 $\overset{f'\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f ΄(1) > f ΄(x) > f ΄(2)

⇔ 0 > f ΄(x)

και αφού f συνεχής στο [1,2] θα είναι γνησίως φθίνουσα στο [1, 2]. Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 και ολικό ελάχιστο στο 0 και στο 2, αφού ισχύει $f(0) = f(2)$.

29. **26736-2:** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.



α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$. (Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o = 2$; (Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 2$.

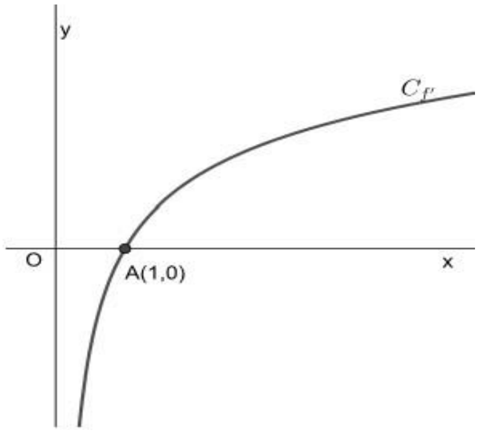
(Μονάδες 9)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [−1,2] και παραγωγίσιμη στο (−1,2), αφού είναι πολυωνυμική. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' παρατηρούμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο

$(-1,2)$. Άρα, η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$. Όμοια, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[2,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,5)$. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' παρατηρούμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,5)$. Άρα, η f είναι κυρτή στο $[2,5]$.
β) Η κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$ ισούται με $f'(2)$. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' παρατηρούμε ότι $f'(2) = -1$.
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$ είναι $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = -x + \frac{7}{3}$, γιατί $3f(2) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(2) = 1/3$.

30. **27320-4:** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ με $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f. (Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$ να ισούται με 2».

Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

Λύση:
α) Από τη γραφική παράσταση της f ' παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f ' είναι αρνητική στο (0,1), θετική στο (1,+∞) και μηδενίζεται για x=1 αφού τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο Α(1,0). Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, οπότε είναι και συνεχής σ' αυτό, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,1] και γνησίως αύξουσα στο [1,+∞). Παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, το f (1).
β) Ο 1ος ισχυρισμός είναι σωστός. Γιατί όπως βλέπουμε στο σχήμα ισχύει ότι f '(1) = 0, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 1 είναι 0, άρα στο σημείο αυτό η εφαπτομένη είναι οριζόντια.
Ο 2ος ισχυρισμός είναι σωστός.
Για να υπάρχει κ∈(0,+∞) τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ(κ, f(κ)) να ισούται με 2, πρέπει f '(κ) = 2.
Η συνάρτηση f ' είναι συνεχής στο (0,+∞), $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της γραφικής της παράστασης αποτελεί το σύνολο τιμών της, το οποίο είναι το IR. Το 2 ανήκει στο IR, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον κ∈(0,+∞) τέτοιο, ώστε f '(κ) = 2. Το κ είναι μοναδικό γιατί η f ' είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα.
γ) Η f ' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο (0,+∞), οπότε η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της, το (0,+∞).

31. **27667-4:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023, x \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι:

a. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR. (Μονάδες 5)

b. το σύνολο τιμών της f' είναι το IR. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x) = \alpha x - f(x)$ με $x \in$ IR, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) a. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR, ως άθροισμα πολυωνυμικής με εκθετική. Για κάθε $x \in$ IR έχουμε: $f'(x) = e^x + x$ και $f''(x) = e^x + 1 > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR .

b. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR, έπεται ότι η συνάρτηση f ' είναι γνησίως αύξουσα στο IR. Ακόμη η f ' είναι και συνεχής ως παραγωγίσιμη, οπότε $f'(\text{IR}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f'(x), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right)$

$= (-\infty,+\infty) =$ IR,

αφού είναι $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x + x) = 0 - \infty = -\infty$

και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x + x) = +\infty + \infty = +\infty$.

β) $e^x + x = \alpha \Leftrightarrow f'(x) = \alpha$.

Επειδή $\alpha \in f'(\text{IR}) =$ IR και η f ' είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in$ IR, τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = \alpha$. Επομένως για οποιαδήποτε τιμή του $\alpha \in$ IR, η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική λύση.

γ) Για κάθε $x \in$ IR, έχουμε $g'(x) = (\alpha x - f(x))' = \alpha - f'(x)$.

• $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha - f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow f'(x) = \alpha$
$\Leftrightarrow x = \rho$………..λόγω του (β) ερωτήματος.

• $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha - f'(x) > 0$
$\Leftrightarrow f'(x) < \alpha$
$\Leftrightarrow f'(x) < f'(\rho)$
$\Leftrightarrow x < \rho$………..επειδή η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \alpha - f'(x) < 0$
$\Leftrightarrow f'(x) > \alpha$
$\Leftrightarrow f'(x) > f'(\rho)$
$\Leftrightarrow x > \rho$………..επειδή η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

x	$-\infty$		ρ		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
g		↗	ΟΜ	↘	

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα, οπότε η g παρουσιάζει στη θέση x = ρ μέγιστη τιμή, την $g(\rho) = \alpha\rho - f(\rho)$………(1)

Επειδή $f'(\rho) = \alpha$ η σχέση (1) $\Leftrightarrow g(\rho) = \rho f'(\rho) - f(\rho)$.

β τρόπος :

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (ρ,f(ρ)) βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Άρα για κάθε $x \in$ IR ισχύει $f(x) \geq f'(\rho)(x - \rho) + f(\rho)$
$\Leftrightarrow f(x) \geq xf'(\rho) - \rho f'(\rho) + f(\rho)$
$\Leftrightarrow \rho f'(\rho) - f(\rho) \geq xf'(\rho) - f(x)$
$\Leftrightarrow \alpha\rho - f(\rho) \geq \alpha x - f(x)$
$\Leftrightarrow \alpha\rho - f(\rho) \geq \alpha x - f(x)$
$\Leftrightarrow g(\rho) \geq g(x)$

και έπεται το ζητούμενο.

32. 31527-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8, x \in$ IR.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μόρια 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το Α, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε). (Μόρια 8)

Λύση:

α) Η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x) = 4x^3+6x$ και $f''(x) = 12x^2+6 > 0$.

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR.

β) i. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο A(1, -4) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = f ‘(1) = 10 και εξίσωση (ε) : y – f(1) = f ‘(1) (x – 1) ⇔ y + 4 = 10(x – 1)

⇔ y = 10x – 14 .

ii. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι η συνάρτηση f ‘(x) είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1». Επομένως δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f διαφορετικό από το A στο οποίο η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

33. **31549-4:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$. (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται $e \simeq 2{,}71$.

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x > e$.

x	0	e	+∞
f ‘(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Ο.Μ.

Μονοτονία: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,e], γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞).

Ακρότατα: Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x = e το $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$.

β) Επειδή e < 2022 < 2023 και η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞) είναι f(2022) > f(2023)

$\Leftrightarrow \frac{\ln 2022}{2022} > \frac{\ln 2023}{2023}$

$\Leftrightarrow 2023 \cdot \ln 2022 > 2022 \cdot \ln 2023$

$\Leftrightarrow \ln 2022^{2023} > \ln 2023^{2022}$

$\Leftrightarrow 2022^{2023} > 2023^{2022}$.

γ) Η f ‘ είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με
$$f''(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3}$.
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-3+2\ln x}{x^3} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -3 + 2\ln x > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e^3}$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e^3}$.

x	0	$\sqrt{e^3}$	+∞
f ‘’(x)	-	0	+
f(x)			

Σ.Κ.

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, \sqrt{e^3}]$, κυρτή στο διάστημα $[\sqrt{e^3}, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή για $x = \sqrt{e^3}$ το $f(\sqrt{e^3}) = \frac{\ln\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{\frac{3}{2}\ln e}{\sqrt{e^3}} = \frac{3}{2\sqrt{e^3}}$. Άρα το σημείο καμπής είναι το $\Gamma\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

δ) Από Θ.Μ.Τ για την f στο [2021,2022] υπάρχει $\xi_1 \in (2021, 2022)$ με $f'(\xi_1) = \frac{f(2022) - f(2021)}{2022 - 2021}$

$\Leftrightarrow f'(\xi_1) = f(2022) - f(2021)$.

Από Θ.Μ.Τ για την f στο [2022,2023] υπάρχει $\xi_2 \in (2022, 2023)$ με $f'(\xi_2) = \frac{f(2023)-f(2022)}{2023-2022}$
$\Leftrightarrow f'(\xi_2) = f(2023) - f(2022)$.
Επειδή $\sqrt{e^3} < 2021 < \xi_1 < 2022 < \xi_2 < 2023$ και f ' γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{e^3}, +\infty)$ είναι
$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(2022) - f(2021) < f(2023) - f(2022)$
$\Leftrightarrow 2f(2022) < f(2021) + f(2023)$.

34. 31550-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ln\,x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o \in (\frac{1}{2}, 1)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_o} + x_o$. (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$.
Η f ' είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ οπότε η f είναι κυρτή.

β) Η f είναι κυρτή οπότε η f ' είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).
Επίσης $f'(1) = e - 1 > 0$ και $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$, άρα $f'(1) \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.
Από θεώρημα Bolzano για την συνεχή f ' στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ με $f'(x_0) = 0$.

- Για $x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$.
- Για $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

x	0	x_0	+∞
f '(x)	-	0	+
f(x)	↘	Ο.Ε.	↗

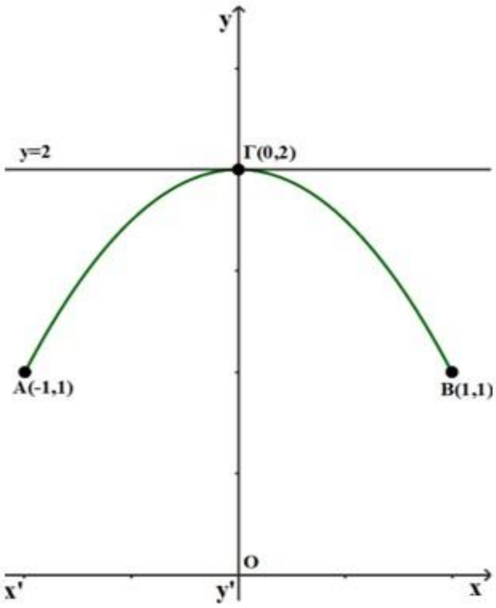
Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Συνεπώς η f παρουσιάζει ένα ακριβώς ακρότατο και μάλιστα ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o \in (\frac{1}{2}, 1)$.

γ) Είναι $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$
$\Leftrightarrow \ln e^{x_0} = -lnx_0$
$\Leftrightarrow x_0 = -lnx_0$ ....(1)

$f(x_0) = e^{x_0} - lnx_0 \overset{(1)}{=} \frac{1}{x_0} + x_0$.

δ) Είναι $f(x_0) > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} + x_0 > 2$
$\overset{x_0>0}{\Longleftrightarrow} x_0^2 - 2x_0 + 1 > 0$
$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 > 0$ που ισχύει γιατί $x_o \in (\frac{1}{2}, 1)$.
Συνεπώς $f(x) \geq f(x_0) > 2$ που σημαίνει ότι η Εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

35. **32799-2:** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:[-1,1] \to$ IR και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1), B(1,1)$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1 \le f'(x) \le 2$, για κάθε $x \in [-1,1]$. (Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) Το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της $C_{f'}$ είναι το σύνολο τιμών f ‘. Από τη γραφική παράσταση της f ‘ προκύπτει ότι f ‘([-1,1]) = [1.2]. Άρα για κάθε x∈[-1,1] ισχύει 1 ≤ f ‘(x) ≤ 2.

β) Για κάθε x∈[-1,1], είναι f ‘(x) ≥ 1 > 0 και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-1,1] (ως παραγωγίσιμη), έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η συνεχής συνάρτηση f :
- είναι κυρτή στο διάστημα [-1,0], αφού η f ‘ είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,0].
- είναι κοίλη στο διάστημα [0,1], αφού η f ‘ είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1].
- έχει σημείο καμπής το σημείο (0,f(0)).

36. **34438-2:** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $2x^3 - 15x^2 + 24x$, $x \in$ IR.

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x)$=0 και $f''(x) = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR με f '(x) = $(2x^3 - 15x^2 + 24x)' = 6x^2 - 30x + 24$ και f ''(x) = $(6x^2 - 30x + 24)' = 12x - 30$.
- f '(x) = 0 ⇔ $6(x^2 - 5x + 4) = 0$ ⇔ x =1 ή x = 4.
- f ''(x) = 0 ⇔ 12x −30 = 0 ⇔ x = $^5/_2$.

β)

x	-∞	1		4	+∞
f΄(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Μονοτονία: Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (-∞,1], [4,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1,4] .
Ακρότατα: Στο x = 1 εμφανίζει τοπικό μέγιστο το f(1) = 11 και στο x = 4 εμφανίζει τοπικό ελάχιστο το f(4)= = −16 .

γ)

x	-∞	$\frac{5}{2}$	+∞
''(x)	-	0	+
f(x)	∩		∪

Κυρτότητα: Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα (-∞,$^5/_2$] και κυρτή στο διάστημα [$^5/_2$,+∞).
Σημεία καμπής: Στο x = $^5/_2$ εμφανίζει καμπή το f($^5/_2$)= = **…** = - $^5/_2$.
Άρα το σημείο Γ($^5/_2$, - $^5/_2$) είναι Σ.Κ..

37. **35172-2:** Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = ln(1 + x^2).

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της. (Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) D_f = IR, αφού 1 + x^2 > 0 για κάθε x∈IR.
Η f είναι συνεχής στο IR ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο IR με
$f'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$.
$f'(x)$ =0 ⇔ $2x$ = 0 ⇔ x = 0.
$f'(x)$ > 0 ⇔ $2x$ > 0 ⇔ x > 0 (αφού 1 + x^2 > 0 για κάθε x∈IR).
$f'(x)$ < 0 ⇔ x < 0.
Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	-∞	0	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Ο.Ε.

Μονοτονία:
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (−∞,0] με $f'(x)$ < 0 στο (−∞,0), άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (−∞,0]. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,+∞) με $f'(x)$ > 0 στο (0,+∞), άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0 , +∞).
Ακρότατα:
Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το f(0) = 0.

β) $f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$.
$f''(x)$ = 0 ⇔ 2 - $2x^2$ = 0 ⇔ x = ± 1.
$f''(x)$ > 0 ⇔ 1 - x^2 > 0 ⇔ |x| < 1 ⇔ -1 < x < 1.
$f''(x)$ < 0 ⇔ x < - 1 ή x > 1.
Τα πρόσημα της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	-∞	-1		1	+∞
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο (−∞, −1] και στο [1, +∞) αφού είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα αυτά με $f''(x)$ < 0 στο εσωτερικό τους, ενώ στο [-1,1] είναι κυρτή, αφού είναι συνεχής στο διάστημα αυτό με $f''(x)$ > 0 στο εσωτερικό του.
Έχει σημεία καμπής τα σημεία (-1, f(-1)) δηλαδή το σημείο (-1, ln2) και στο σημείο (1, f(1)) δηλαδή το σημείο (1, ln2).

38. END.