

## ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ, ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ (Σ.Κ.)

- 1) **Ορισμός:** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Θα λέμε ότι:
  - Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
  - Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
2. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$ , βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
3. Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
  - Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
  - Αν  $f''(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .
4. Η πρόταση «Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή (κοίλη) και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ , τότε  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ » είναι ψευδής.  
Πχ η συνάρτηση  $f(x) = x^4$  έχει  $f'(x) = 4x^3$  που είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , όμως η  $f''(x) = 12x^2$  δεν είναι θετική στο  $\mathbb{R}$ , αφού  $f''(0) = 0$ .
5. **Ορισμός:** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Αν
  - η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$ , ή αντιστρόφως, και
  - η  $C_f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ , τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .
6. Στα σημεία καμπής, η εφαπτομένη της  $C_f$ , "διαπερνά" την καμπύλη.
7. Αν το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$  και η συνάρτηση  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε  $f''(x_0) = 0$ .
8. Η πρόταση «Αν  $f''(x_0) = 0$ , τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ » είναι ψευδής. Πχ  $f(x) = x^4$ , έχει  $f'(x) = 4x^3$ ,  $f''(x) = 12x^2$ . Είναι  $f''(0) = 0$  και το σημείο  $A(0, 0)$  δεν είναι Σ.Κ. αφού  $f''(x) = 12x^2 > 0$  εκατέρωθεν του  $x_0 = 0$ .
9. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ . Αν
  - η  $f''$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του  $x_0$  και
  - ορίζεται εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A(x_0, f(x_0))$ , τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής.
- 10) Ο ορισμός της κυρτής και κοίλης συνάρτησης, είναι αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ , ή αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$  αντίστοιχα, και όχι αν  $f'' > 0$  ή  $f'' < 0$ .
- 11) Αν η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  έχει Σ.Κ. στο  $x = x_0$ , και ισχύει  $f'(x_0) = 0$ , τότε λέμε ότι έχουμε ένα Σ.Κ. με οριζόντια εφαπτομένη.
- 12) Αν  $P(x_0, f(x_0))$  είναι ένα Σ.Κ., τότε  $f''(x_0) = 0$ , ή δεν υπάρχει η  $f''$  στο  $x_0$ .
- 13) Στις πανελλήνιες εξετάσεις, η κυρτότητα είναι είτε θέμα θεωρίας, (ορισμός ή σε ερώτηση σωστό-λάθος αν η γραφική παράσταση της  $f$  είναι πάνω ή κάτω από την εφαπτομένη της σε τυχαίο σημείο της), είτε ερώτημα κάποιας γενικότερης άσκησης.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ .
- 2) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης  $f(x) = x + \eta\mu x$ .
- 3) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης  $f(x) = x^2 e^x$ .
- 4) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  έχει τρία Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά.
- 5) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ . Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ώστε η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(2, 7)$ , να έχει ελάχιστο στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$  και να έχει Σ.Κ. στο σημείο της  $A(3, f(3))$ .
- 6) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 2\lambda x^3 + 6(\lambda^2 - 2\lambda + 3)x^2 + x + 2008$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , δεν έχει Σ.Κ.
- 7) Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση  $3^{\text{ου}}$  βαθμού που ικανοποιεί τις συνθήκες:
  - i) Έχει παράγοντα το  $x+1$ .
  - ii) Έχει Σ.Κ. στο σημείο της με τετμημένη  $x = -2$ .
- iii) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x = -2$  έχει εξίσωση  $2y - 6x = 5$ .
- 8) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$  με  $\alpha, \beta \neq 0$ , έχει δυο ακρότατα και ένα Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά και μάλιστα το Σ.Κ. διχοτομεί το τμήμα που ορίζουν τα ακρότατα.
- 9) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + x - 1$ . Να υπολογίσετε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο Σ.Κ. της.
- 10) Να δείξετε ότι αν μια άρτια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  στρέφει τα Κ.Α. στο  $[0, +\infty)$ , τότε στρέφει επίσης τα Κ.Α. στο  $(-\infty, 0]$ .
- 11) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 9$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , έχει το Σ.Κ. της και κέντρο συμμετρίας.
- 12) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  στρέφει τα Κ.Κ. στο  $(0, \pi/2)$ .
- 13) Έστω οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δυο φορές παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και στρέφουν τα Κ.Κ. στο

$\mathbb{R}$ . Αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η σύνθεσή τους fog στρέφει τα Κ.Κ. στο  $\mathbb{R}$ .

**14)** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής στο διάστημα  $\Delta$ . Να δείξετε ότι:

- i)** αν η  $f$  στρέφει τα Κ.Α. στο  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
- ii)** αν η  $f$  στρέφει τα Κ.Κ. στο  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ .

### ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΣ

**15)** Να υπολογίσετε το  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \left(a - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$  να παρουσιάζει Σ.Κ. στο  $x = \frac{3}{2}$ . Μετά για την τιμή του  $a$  που βρήκατε, να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών. (Α δέσμη 1990)

**16)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2ax^3}{3} + \left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x^2 + (a^3 + 7)x - 5a^2$  δεν παρουσιάζει Σ.Κ. για καμία τιμή του  $a \in \mathbb{R}$ . (Α δέσμη 1991)

**17)** (Θέμα 4<sup>ον</sup> 2003) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν ισχύει  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  και υπάρχουν αριθμοί  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ,  $\delta \in (\alpha, \beta)$ , έτσι ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

- α.** Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ . Μονάδες 8
- β.** Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(\xi_1) < 0$  και  $f'(\xi_2) > 0$ . Μονάδες 9
- γ.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ . Μονάδες 8

**18)** (ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup> 2004) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x^2 \ln x$ .

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10
- β.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. Μονάδες 8
- γ.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . Μονάδες 7

**19)** (Θέμα 3<sup>ον</sup> 2007) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  μια σταθερά με  $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ .

- i)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής Μονάδες 7
- ii)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 8
- iii)** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής της  $f$ , να αποδειχθεί ότι τα σημεία  $A(x_1, f(x_1))$ ,  $B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(x_3, f(x_3))$  βρίσκονται στην ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ . Μονάδες 3

**20)** (Θέμα 3<sup>ο</sup> 2009) Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = a^x \cdot \ln(x+1)$ ,  $x > -1$

όπου  $a$  σταθερός πραγματικός με  $0 < a \neq 1$ .

Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων.

Εφαρμογή:

- i)** Να δείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$  ισχύει  $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{2} \leq \eta\mu\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ ,
- ii)** Να δείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\frac{e^\alpha + e^\beta}{2} \geq e^{\frac{\alpha + \beta}{2}}$ .



**20.1.** Αν ισχύει  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x > -1$ , να αποδείξετε ότι  $a = e$ . Μονάδες 8

**20.2.** Για  $a = e$ ,

- i)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή.

Μονάδες 5

**ii)** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι  $\curvearrowright$  στο διάστημα  $(-1, 0]$  και  $\curvearrowleft$  στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

Μονάδες 6

**iii)** Αν  $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{f(\beta) - 1}{\beta - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\gamma - 1} = 0$  έχει μια

τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$ .

Μονάδες 6

**21)** (Θέμα Γ 2010) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση  $f$ . Μονάδες 5

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right].$$

Μονάδες 7

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δυο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής της παράστασης στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα  $\psi\psi'$ . Μονάδες 8

**22)** (Θέμα Γ 2011) Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$  η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**A.** Να δείξετε ότι  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 8

**B.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 3

**C.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής. Μονάδες 7

**D.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Μονάδες 7

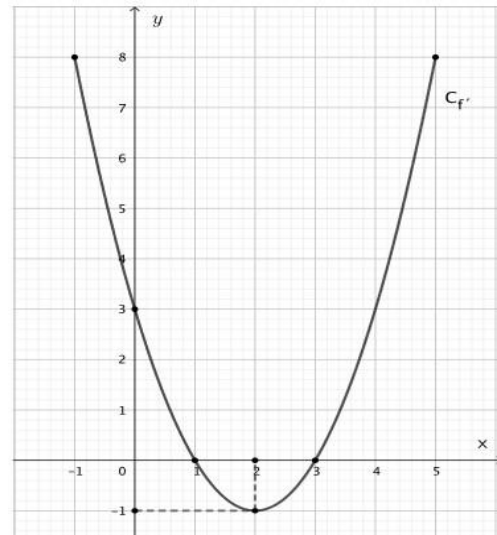
**ΤΡΑΠΕΖΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ**

- 23. 23312-4:** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $[-2, 2]$ , συνεχής στο  $[-2, 2]$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-2, 2)$  και  $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ , για κάθε  $x \in [-2, 2]$ .
- α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 8)
- β)** Αν  $f(0) = 3$ ,
- i.** Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$ , για κάθε  $x \in [-2, 2]$  και κατόπιν ότι  $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in [-2, 2]$ . (Μονάδες 9)
- ii.** Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $f$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \sin x$ . (Μονάδες 8)
- 24. 23531-4:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x - 3$ .
- α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)
- β)** Να αποδείξετε ότι η  $f(x)$  παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο  $x_0 \in (0, 1)$  με  $f(x_0) < 0$ . (Μονάδες 10)
- γ)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$ . (Μονάδες 9)
- 25. 24759-4 (τράπεζα):** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει  $f(x) \geq x^2 - x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- α) i.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . (Μονάδες 4)
- ii.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)
- iii.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq \frac{3}{4}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 5)
- β)** Αν επιπλέον  $f(1) = 1$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$  να αποδείξετε ότι:
- i.**  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . (Μονάδες 5)
- ii.** η  $f$  δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)
- 26. 24760-4:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$ ,  $x > 0$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν ισχύει  $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$ , να αποδείξετε ότι :
- α)** η  $f$  είναι κυρτή. (Μονάδες 6)
- β)** υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (1, e)$  με  $f'(x_0) = 0$ . (Μονάδες 6)
- γ)** για την  $f'$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο  $[1, e]$ . (Μονάδες 6)
- δ)** η  $f$  παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο  $x_0$  που είναι το  $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$ . (Μονάδες 7)
- 27. 24769-4:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ ,  $x > -1$  και έστω  $F$  αρχική της  $f$  με  $F(1) = \ln 2$ .
- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > -1$  ισχύει  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)
- β)** Να αποδείξετε ότι η  $F$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)
- γ) i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $F$  στο  $x_0 = 1$ . (Μονάδες 6)
- ii.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$ . (Μονάδες 5)
- 28. 25745-4:** Δίνεται συνάρτηση  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0, 2]$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$  και ισχύουν  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 0$ ,  $f(0) = f(2)$  και  $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) < 0$ , για κάθε  $x \in (0, 2)$ .
- α)** Να αποδείξετε ότι:
- i.**  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, 2)$ . (Μονάδες 5)
- ii.**  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 2)$ . (Μονάδες 5)
- β)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 8)

**29.26736-2:** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας πολυωνυμικής συνάρτησης  $f$  τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα  $[-1,5]$ .



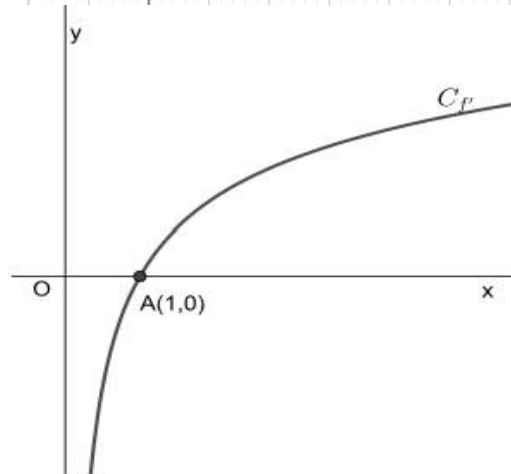
α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου  $f'$  είναι το σημείο  $A(2, -1)$ , με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο  $[-1,2]$  και κυρτή στο  $[2,5]$ .

(Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της  $f$  στο  $x_0 = 2$ ; (Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $3f(2) - 1 = 0$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 2$ . (Μονάδες 9)

**30.27320-4:** Στο διπλανό σχήμα δίνεται στο  $(0, +\infty)$  η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$ . Δίνεται επίσης ότι η  $f'$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο  $(0, +\infty)$  με  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$ .



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1<sup>ον</sup>: «Η γραφική παράσταση της  $f$  δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2<sup>ον</sup>: «Υπάρχει μοναδικό  $\kappa \in (0, +\infty)$  τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M(\kappa, f(\kappa))$  να ισούται με 2».

Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της  $f$  στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

**31. 27667-4:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023, x \in \mathbb{R}$ .

1) Να αποδείξετε ότι:

a. η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 5)

b. το σύνολο τιμών της  $f'$  είναι το  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 6)

2) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , η εξίσωση  $e^x + x = \alpha$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ . (Μονάδες 5)

3) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , η συνάρτηση  $g(x) = \alpha x - f(x)$  με  $x \in \mathbb{R}$ , έχει μέγιστη τιμή την  $\rho f'(\rho) - f(\rho)$ . (Μονάδες 9)

**32. 31527-2:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8, x \in \mathbb{R}$ .

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μόρια 10)

β) Έστω  $(\epsilon)$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon)$ . (Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της  $C_f$ , διαφορετικό από το  $A$ , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην  $(\epsilon)$ . (Μόρια 8)

**33. 31549-4:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ .

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι  $2022^{2023} > 2023^{2022}$ . (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

- δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα  $[2021,2022]$  και  $[2022,2023]$  να αποδείξετε ότι  $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$ . (Μονάδες 7)

Δίνεται  $e \approx 2,71$ .

34. 31550-4: Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x$ . Να αποδείξετε ότι  
α) η  $f$  είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο  $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$  το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το  $\frac{1}{x_0} + x_0$ . (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση  $f(x) = 2$  είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

35. 32799-2: Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  και η ευθεία  $y = 2$ . Αν η γραφική παράσταση της  $f'$  διέρχεται από τα σημεία  $A(-1,1)$ ,  $B(1,1)$  και  $\Gamma(0,2)$  τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει:  $1 \leq f'(x) \leq 2$ , για κάθε  $x \in [-1,1]$ . (Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 10)

36. 34438-2: Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης  $f$  και να λύσετε τις εξισώσεις:  $f'(x) = 0$  και  $f''(x) = 0$ . (Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής. (Μονάδες 8)

37. 35172-2: Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln(1 + x^2)$ .

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της. (Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 13)

38. END.

