ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ
ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ (Σ.Κ.)

1) *Ορισμός*: Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του *Δ* .

● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f ′ είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του *Δ* .

2. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* σε κάθε σημείο του *Δ*, βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

3. Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *εσωτερικό* του *Δ*.

● Αν *f* ″(x)>0 για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του *Δ*, τότε η f είναι κυρτή στο *Δ* .

● Αν *f* ″(x)<0 για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του *Δ*, τότε η f είναι κοίλη στο *Δ* .

4. Η πρόταση «*Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή (κοίλη) και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε f ″(x)>0 (f ″(x)<0) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ*" είναι ψευδής. Πχ η συνάρτηση $f(x)=x^4$ έχει $f'(x)=4x^3$ που είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα συνάρτηση f είναι κυρτή στο R, όμως η f ″$(x)=12x^2$ δεν είναι θετική στο R , αφού f ″(0)=0.

5. *Ορισμός*: Έστω μια συνάρτηση *f* παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (*α*,*β*), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

● η f είναι κυρτή στο $(α,x_0)$ και κοίλη στο $(x_0,β)$, ή αντιστρόφως, και

● η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

6. Στα σημεία καμπής, η εφαπτομένη της C_f, "διαπερνά" την καμπύλη.

7. Αν το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.

8. Η πρόταση «Αν $f''(x_0)=0$, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f» είναι ψευδής. Πχ $f(x)=x^4$, έχει $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$. Είναι $f''(0)=0$ και το σημείο Α(0,0) δεν είναι Σ.Κ. αφού $f''(x)=12x^2>0$ εκατέρωθεν του $x_0=0$.

9. Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα (*α*,*β*) και $x_0∈(α,β)$. Αν

● η *f* ″ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και

● ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

10) Ο ορισμός της κυρτής και κοίλης συνάρτησης, είναι αν η f ' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ, ή αν η f ' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ αντίστοιχα, και όχι αν f '' > 0 ή f '' < 0.

11) Αν η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει Σ.Κ. στο $x=x_0$, και ισχύει $f'(x_0)=0$, τότε λέμε ότι έχουμε ένα Σ.Κ. με οριζόντια εφαπτομένη.

12) Αν $P(x_0,f(x_0))$ είναι ένα Σ.Κ., τότε $f''(x_0)=0$, ή δεν υπάρχει η f΄΄ στο x_0.

13) Στις πανελλήνιες εξετάσεις, η κυρτότητα είναι είτε θέμα θεωρίας, (ορισμός ή σε ερώτηση σωστό-λάθος αν η γραφική παράσταση της f είναι πάνω ή κάτω από την εφαπτομένη της σε τυχαίο σημείο της), είτε ερώτημα κάποιας γενικότερης άσκησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

2) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x+ημx$.

3) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x^2e^x$.

4) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-αx^2+βx+γ$. Να υπολογίσετε τα α, β, γ∈R, ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο Α(2,7), να έχει ελάχιστο στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ και να έχει Σ.Κ. στο σημείο της Α(3,f(3)).

6) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x)= x^4-2λx^3+6(λ^2-2λ+3)x^2+x+2008$, x∈R,

δεν έχει Σ.Κ.

7) Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση 3^ου^ βαθμού που ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) έχει παράγοντα το x+1,

ii) έχει Σ.Κ. στο σημείο της με τετμημένη x=-2,

iii) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη x=-2 έχει εξίσωση 2y-6x=5.

8) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=αx^3+βx^2$ με α,β ≠0, έχει δυο ακρότατα και ένα Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά και μάλιστα το Σ.Κ. διχοτομεί το τμήμα που ορίζουν τα ακρότατα.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\lambda x^2+x-1$. Να υπολογίσετε το $\lambda\in R$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο Σ.Κ. της.

10) Να δείξετε ότι αν μια άρτια συνάρτηση $f: R\to R$ στρέφει τα Κ.Α. στο $[0,+\infty)$, τότε στρέφει επίσης τα Κ.Α. στο $(-\infty,0]$.

11) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=x^3-6x^2+11x+9,\ x\in R,$$

έχει το Σ.Κ. της και κέντρο συμμετρίας.

12) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ στρέφει τα Κ.Κ. στο $(0,\pi/2)$.

13) Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και στρέφουν τα Κ.Κ. στο R. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η σύνθεσή τους $f\circ g$ στρέφει τα Κ.Κ. στο R.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f: \Delta\to R$, συνεχής στο διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

i) αν η f στρέφει τα Κ.Α. στο Δ, τότε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

ii) αν η f στρέφει τα Κ.Κ. στο Δ, τότε για κάθε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων.

Εφαρμογή:

i) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in[0,\pi/2]$ ισχύει

$$\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2}\leq\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει

$$\frac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{2}\geq e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

15) Να υπολογίστε το $\alpha\in R$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\left(a-\frac{2}{3}\right)x^3-\left(a+\frac{1}{2}\right)x^2-10x+7$$

να παρουσιάζει Σ.Κ. στο $x=3/2$. Μετά για την τιμή του α που βρήκατε, να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών. (Α δέσμη 1990)

16) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+(\alpha^3+7)x-5a^2$$

δεν παρουσιάζει Σ.Κ. για καμιά τιμή του $\alpha\in R$. (Α δέσμη 1991)

17) (Θέμα 4ον 2003) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β). Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$. Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 8

18) (ΘΕΜΑ 2ο 2004) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τι μών της f. Μονάδες 7

19) (Θέμα 3ον 2007) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\pi/2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής Μονάδες 7

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 8

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. Μονάδες 3

20) (Θέμα 3ο 2009) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1),\ x>-1$$

όπου α σταθερός πραγματικός με $0<\alpha\neq1$.

A) Αν ισχύει $f(x)\geq1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. Μονάδες 8

B) Για $\alpha=e$,

i) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή. Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ↘ στο διάστημα $(-1,0]$ και ↗ στο διάστημα $[0,+\infty)$ Μονάδες 6

iii) Αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Μονάδες 6

21) (Θέμα Γ 2010) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ x\in R.$$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right].$$ Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής. Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f έχει δυο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής της παράστασης στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψψ΄. Μονάδες 6

22) (Θέμα Γ 2011) Δίνεται η συνάρτηση f:R→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f΄(0)= f(0)=0 η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$e^x\big(f'(x)+f''(x)-1\big)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in R$.

A. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x\in R$. Μονάδες 8

B. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 3

C. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής. Μονάδες 7

D. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=$ =συνx έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Μονάδες 7

23) END.