ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

3ον ΕΛΛΕΙΨΗ

1) Να ορίσετε για καθεμιά από τις παρακάτω ελλείψεις το μήκος μικρού και μεγάλου ημιάξονα, τις συν/νες των εστιών και των κορυφών τους και την εκκεντρότητα:

i) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

ii) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$

iii) $225x^2+289y^2=65025$.

2) Να βρεθεί η εξίσωση καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις, εάν δίνονται τα στοιχεία:

i) Εστίες $(\pm4,0)$, κορυφές $(\pm5,0)$

ii) Εστίες $(0,\pm6)$, μικρός ημιάξονας 8

iii) Εστίες $(\pm5,0)$, εκκεντρότητα 5/8.

iv) Εστίες $(\pm3,0)$, β=7.

v) Διέρχεται από τα σημεία (4,1),(-2,-2).

3) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο Α(6,4) και έχει α=2β.

4) Να βρεθούν τα μήκη μικρού και μεγάλου ημιάξονα, εκκεντρότητα και εστίες της έλλειψης $9x^2+16y^2=576$.

5) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $16x^2+y^2-16=0$ στο σημείο $A(1/2,-2\sqrt{3})$.

6) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $x^2+9y^2=9$ που διέρχεται από το σημείο Α(2,-1).

7) Να δείξετε ότι το σημείο Κ(2α/3,β/3) είναι εσωτερικά της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

8) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι διάμετροι της έλλειψης $x^2+6y^2=2$ που έχουν μήκος 2.

9) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης $x^2+4y^2=16$ που είναι:

i) παράλληλες στην ευθεία y=2x,

ii) κάθετες στην ευθεία x+2y+3=0.

10) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου που έχουν διάνυσμα θέσης $\vec{OM}=\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\phi\cdot\vec{i}+2\eta\mu\phi\cdot\vec{j}$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

11) Έστω α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τον γ.τ. των εικόνων των σημείων Μ(ασυνθ, βημθ), όταν το θ μεταβάλλεται.

12) Η τροχιά της γης γύρω από τον ήλιο είναι έλλειψη που ο ήλιος κατέχει την μια από τις δυο εστίες της. Αν ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς είναι 92,9 εκ. μίλια και η εκκεντρότητα 0,017, να βρείτε με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη απόσταση της γης από τον ήλιο.

13) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων των ελλείψεων $4x^2+5y^2=20$ και $5x^2+4y^2=20$.

14) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που εφάπτονται της έλλειψης $4x^2+y^2=4$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο ελάχιστου εμβαδού.

15) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης m, έχει εξίσωση $y=mx\pm\sqrt{\alpha^2m^2+\beta^2}$.

16) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2=x+1$ (1) με ρίζες φ, φ΄ με φ>φ΄. Θεωρούμε επίσης την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\frac{\alpha}{\beta}=\phi$. Να αποδείξετε ότι:

i) εάν Ε και Ε΄ οι εστίες της, ο κύκλος διαμέτρου ΕΕ΄ έχει εμβαδόν Ε=παβ,

ii) η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\sqrt{-\phi'}$.

17) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με α>β και $\alpha^2+\beta^2<1$ και η ευθεία (ε): x+y=2. Να δείξετε ότι:

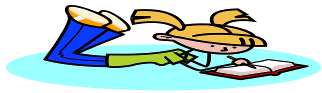
i) Η ευθεία (ε) και η έλλειψη δεν έχουν κοινά σημεία

ii) εάν Μ τυχαίο σημείο της (ε) και ΜΓ, ΜΔ οι εφαπτόμενες από το Μ προς την έλλειψη, να δείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από σταθερό σημείο, ανεξάρτητα από την θέση του Μ πάνω στην (ε). Ποιό είναι το σημείο αυτό;

18) Να δείξετε ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{\beta^2+\mu}=1$, όπου μ>0, α>β>0, έχουν τις ίδιες εστίες.

19) Να βρεθεί κανονικό πολύγωνο με τις περισσότερες πλευρές που μπορεί να εγγραφεί σε έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και να βρεθούν οι συν/νες των κορυφών του.

20) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ από την εφαπτομένη της στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι $d=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-x_1^2\varepsilon^2}}$.



21) Εάν το σημείο Α(κ,λ) διαγράφει την έλλειψη $4x^2+y^2=4$, να αποδείξετε ότι το σημείο Β(2κ,λ-1) διαγράφει κύκλο του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα.

22) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με α>β>0 και οι ευθείες $\varepsilon_1: x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$, $\varepsilon_2: x=-\frac{\alpha^2}{\gamma}$. Έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο της έλλειψης.

a) Να δείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων του σημείου Μ από την ευθεία ε_1 και από την εστία Ε(γ, 0) είναι ίσος με την εκκεντρότητα ε,

b) Να δείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων του σημείου Μ από την ευθεία ε_2 και από την εστία Ε΄(-γ, 0) είναι ίσος με την εκκεντρότητα ε.

c) $|\overrightarrow{EM}|=\frac{\rho}{1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\phi}$ και $|\overrightarrow{E'M}|=\frac{\rho}{1-\varepsilon\sigma\upsilon\nu\theta}$ όπου $\rho=\beta^2/\alpha$ και φ,θ οι γωνίες που σχηματίζουν οι ΕΜ και Ε΄Μ αντίστοιχα με τον ημιάξονα Οx.

d) Εάν η ευθεία x=γ τέμνει την έλλειψη στα σημεία Ρ και Ρ΄, να δείξετε ότι $|\overrightarrow{PP'}|=2\rho$.

23) Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των περιφερειών που εφάπτονται των κύκλων (c_1): $(x-1)^2+y^2=25$ και (c_2): $(x+1)^2+y^2=1$.

24) Δίνεται ο κύκλος C: $(x+2)^2+y^2=25$ και το σημείο Θ(2,0). Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Θ και εφάπτονται του κύκλου C.

25) Δίνεται ορθογώνιο παρ/μο ΑΒΓΔ με (ΑΒ)=2α και (ΒΓ)=2β. Έστω Ν και Ρ σημεία των ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{N\Delta}}=\frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\overrightarrow{P\Gamma}}=\lambda$, $\lambda\in$R. Να βρεθεί ο γ.τ. του σημείου τομής Μ των ΑΡ και ΒΝ, όταν το λ μεταβάλλεται.
(***Υπ**: θεωρήστε σύστημα συν/νων με άξονα χΟχ΄ την ΑΒ και Ο το μέσο της.*)

26) Έστω σταθερού μήκους ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ κινείται, έτσι ώστε τα άκρα του Α και Β να ολισθαίνουν πάνω στους άξονες x΄Οx και y΄Οy αντίστοιχα. Να δείξετε ότι σταθερό σημείο Γ του ΑΒ διαφορετικό από τα άκρα του κατά την κίνηση αυτή:

a) διαγράφει κύκλο αν το Γ είναι το μέσο του ΑΒ και

b) διαγράφει έλλειψη σε κάθε άλλη περίπτωση.