

1. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση:

$$f(x) = (3-a)^x$$

Για ποιες τιμές του  $a$  η  $f(x)$  είναι:

- α) γνησίως αύξουσα;
- β) γνησίως φθίνουσα;

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (2-a)^x \quad \text{και} \quad g(x) = (2+a)^x$$

Να βρείτε τις τιμές του  $x$ , ώστε:

- α) η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα,
- β) η  $g$  να είναι γνησίως φθίνουσα.

3. Αν οι αριθμοί  $2^a$ ,  $2^\beta$  και  $2^\gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Αν ισχύει:

4.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  και  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

να αποδείξετε ότι  $f^2(x) - g^2(x) = 1$ .

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-5}$       β)  $3^{\sqrt[3]{16}} = 81$

γ)  $\left(\frac{4}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^{x-1} = \frac{32}{81}$       δ)  $6^{x^2-5x+9} = 216$

ε)  $7^{x^4-13x^2+36} = 1$       στ)  $2^{\sigma \nu \nu 2x} = \sqrt{2}$

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{x^2-6} \cdot 3^{x^2-6} = \frac{1}{6^5} (6^{x-1})^4$$

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α)  $(e^x + 3)(e^x - 1) > 0$       β)  $\frac{2^x - 4}{2^x - 8} \leq 0$

9. Να λύσετε τις εκθετικές εξισώσεις:

α)  $(5^{2-x})^{3x-1} = 1$       β)  $5^{5\sqrt{x}} = (5^{\sqrt{x}-4})^x$

γ)  $9^x - 3^{x+1} - 3^x + 3 = 0$       δ)  $3^{x+3} - 3^{x+2} + 3^{x+1} = 189$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $2^{2x+1} + 1 = 3 \cdot 2^x$       β)  $5^{x^2+1} + 25^{x^2} = 6$

γ)  $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$       δ)  $5 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 25^x = 8 \cdot 15^x$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$\left[ 1 - 2 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \left( \frac{\alpha^{\frac{4}{3}} - 8\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \beta}{\alpha^{\frac{2}{3}} + 2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} + 4\beta^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{1}{\alpha^{-2}} \right)^{\frac{1}{3}} = 1$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

a)  $6 \cdot 9^x + 6 \cdot 4^x = 13 \cdot 6^x$   
 β)  $2 \cdot 49^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 7 \cdot 4^{x^2} = 0$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

a)  $\begin{cases} 2^{x^2-y^2} = 256 \\ 5x+3y = 2(10-y) \end{cases}$   
 β)  $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 172 \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 4 \cdot 2^{x-y} = 304 \end{cases}$

14. Να λύσετε τα συστήματα:

a)  $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ x + y = 5 \end{cases}$   
 β)  $\begin{cases} 2^x - 3^y = -1 \\ 2^x \cdot 3^y - 11 \cdot 2^x = -16 \end{cases}$

15. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x-2)^{x^2} = (x-2)^{x+6}$$

16. Δίνεται η συνάρτηση  $Q(t) = ce^{kt}$ , ώστε  $Q(1) = 2$  και  $Q(2) = 4$ . Να βρείτε:

- a) την τιμή του  $c$ ,  
 β) τον τύπο της συνάρτησης  $Q(t)$ ,  
 γ) τις λύσεις της εξίσωσης  $Q(t) = 256$ .

17. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση:

$$f(x) = \left( \frac{3-\lambda}{1+\lambda} \right)^x$$

- a) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ .  
 β) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα;  
 γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα.  
 δ) Αν  $\lambda = 2$ , να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2 + x - 1) > \frac{3-\lambda}{1+\lambda}$$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

a)  $3\sqrt[3]{81} - 10\sqrt[3]{9} + 3 = 0$   
 β)  $3^{4\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 9 = 0$   
 γ)  $3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$   
 δ)  $16^{\eta\mu^2 x} + 16^{\sigma\nu\nu^2 x} = 10$ ,  $x \in [0, \pi]$

19. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{α)} \begin{cases} 2^{5y-x} = 2^{2x-y} \\ 2^x \cdot 2^{4y} = 64 \end{cases} & \text{β)} \begin{cases} 2^x = 5y \\ 5^x = 2y \end{cases} \\ \text{γ)} \begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75 \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \end{cases} & \text{δ)} \begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 4^x - 9^y = -17 \end{cases} \end{array}$$

20. Αν  $x = \eta\mu$  και  $a \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $\kappa \in \mathbb{Z}$ ), να αποδείξετε ότι:

$$\left( \frac{(1-x)^{\frac{1}{4}}}{2(1+x)^{\frac{3}{4}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2} \right) : (1-x^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sigma v \nu^2 \alpha}$$

21. Να λύσετε τα παρακάτω εικθετικά συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{α)} \begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases} & \text{β)} \begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3 \end{cases} \end{array}$$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{α)} (x-3)^{x^2-1} = 1 & \\ \text{β)} (x+4)^{x^2-x} = (x+4)^{x+3} & \end{array}$$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} 7^x - 7^{x-1} = 6 & \text{ii)} 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13 \\ \text{iii)} 5^x + 5^{x-1} = 3750 & \text{iv)} 7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347 \\ \text{v)} 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0 & \text{vi)} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \\ \text{vii)} 2^{x+2} - 2^x = 96 & \text{viii)} 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \end{array}$$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \sqrt[3]{8^{x+1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}} & \text{ii)} \sqrt[4]{0,25^{\frac{5-x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}} \\ \text{iii)} \sqrt{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt{8^{2x-3}} - 3^{2x-3} & \text{iv)} 5^{2x} - 5^x - 600 = 0 \\ \text{v)} \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 1,2 & \text{vi)} 9^x - 3^x - 6 = 0 \\ \text{vii)} 4^x + 2^x = 272 & \end{array}$$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} 2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x & \text{ii)} 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x \\ \text{iii)} 4^x - 13 \cdot 6^{x-1} + 9^x = 0 & \text{iv)} 6^{2x} - 210 \cdot 6^{x-1} - 36 = 0 \\ \text{v)} 7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0 & \text{vi)} 5^{x+3} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 7 \cdot 3^{x+1} \end{array}$$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} 5 \cdot 9^x - 2 \cdot 4^x = 3 \cdot 6^x & \text{ii)} 4 \cdot 2^{2x} + 3^x + \frac{4^x}{2} = 9^{\frac{x}{2}+1} \\ \text{iii)} 2^{x+1} + 2^x + \frac{12}{2^{x-1}} = \frac{18}{2^{x-2}} & \text{iv)} 7^{2x} - 50 \cdot 7^x + 49 = 0 \\ \text{v)} 2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x & \text{vi)} 5 + \frac{2}{5^{x-1}} = \frac{3}{5^{x-1}} \end{array}$$

v)  $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$

vi)  $5 + \frac{2}{5^{x-1}} = \frac{3}{5^{x-1}}$

vii)  $8 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 4 = 0$

viii)  $2^{x+1} + 7 \cdot 2^{x+2} - \frac{24}{2^{x-1}} = \frac{468}{2^{x-2}}$

ix)  $14 \cdot 7^x - \frac{35}{7^{x-1}} = 681$

x)  $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$

27. Να λυθούν οι εξισώσεις για  $x \in \mathbb{Z}$ :

i)  $(2^x)^8 \cdot (1 - 2^{3x}) + 3 \cdot \left[ (2^x)^5 - 4^{2x} \right] = 0$

ii)  $4^{2x} - 5 \cdot 8^x - 7 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 2^x + 13 = 0$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i)  $3^{\frac{\sigma_{uv}x}{2}} + 3^{\frac{\sigma_{uv}x+1}{2}} + 3^{\frac{\sigma_{uv}x+5}{2}} = 31$

ii)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{x^2-6x+9} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 2$

iii)  $2^{\eta u^2 x} + 2^{\sigma_{uv} v^2 x} = 3$

iv)  $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 6$

v)  $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$

vi)  $\sqrt{3^x} + \sqrt{3^{-x}} = \frac{10}{3}$

vii)  $x^x - x^{-x} = 3 \cdot (1 + x^{-x})$

viii)  $(x^2 - 5x + 7)^{x^2-x} = 1$

29. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^x$

ii)  $3 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} > 2 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} + 2$

iii)  $5 \cdot 125^x > \frac{5^x}{125}$

30. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i)  $3^{x+3} < 36 \cdot 2^{x-1}$

ii)  $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} < 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}}$

iii)  $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}+x}} > \frac{3^{2x}}{\sqrt{3}}$

31. Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{e^x - 1}{x^2 - 5x + 6} > 0$

32. Για ποια τιμή του  $x$  οι αριθμοί  $5^{2x-3}$ ,  $40$ ,  $3 \cdot 5^x$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

33. Για ποιες τιμές του  $a$  η  $f(x) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^x$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ , είναι γνησίως αύξουσα;

**34.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 64 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = \frac{1}{81} \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} 2^x + 3^y = 3 \\ 4^x + 9^y = 5 \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{3x+2} + 3^{2y-1} = 259 \end{cases}$$

$$\text{iv) } \begin{cases} 2^{3x+4} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{v) } \begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$$

**35.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + 16 \cdot 2^{-x} = 11 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 5^x = 40 \cdot 2^{-y} \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 17 \\ 2^y - 3^{x-1} = -19 \end{cases}$$

$$\text{iv) } \begin{cases} 9^x \cdot 27^y = 3^8 \\ 9^x : 27^y = 3^{-6} \end{cases}$$

**36.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 2 \cdot 2^{x+1} + 5^y = 57 \\ 4^{x-3} + 5^{y-1} = 6 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 65 \\ 2^y - 3^{x-3} = -1 \end{cases}$$

**37.** Ομοίως:

$$\text{i) } \begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 3^{3x} - 5^{3y} = 604 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-2} \cdot 3^{y-4} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

**38.** Ομοίως:

$$\text{i) } \begin{cases} 2^{2x+y} = 1024 \\ 5^{3x-4y} = 625 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} y^{x^2-2x+12} = 1 \\ x+y = 6 \end{cases}$$

**39.** Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση  $f(x) = e^{x^2-1}$ .

**40.** α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad \text{και} \quad g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

β) Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $g$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $y' y$ .

**41.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{α) } (x^2 - 5x + 5)^{x+2} = 1$$

$$\text{β) } e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$$

## 4.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 2\log 5 + 3\log 2 - \log 60 + \log 3 = 1 \\ \text{b)} & 3\log_3 2 + 2\log_3 6 - \log_3 4 - \log_3 8 = 2 \end{aligned}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \log 25 + \log 4 - \log 2 - \log 5 = 1 \\ \text{b)} & \log 5 + 3\log 2 - \log 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{γ)} \log_2 \left( \sqrt{32\sqrt{16\sqrt[4]{2}}} \right)^{20} = 71$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{a)} \frac{2 + \log_5 8 - 2\log_5 10}{\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{b)} \frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log \sqrt{15} - \log \sqrt{2}} = 3$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{a)} 7\log \frac{16}{15} + 5\log \frac{25}{24} + 3\log \frac{81}{80} = \log 2$$

$$\text{b)} 3\log \frac{36}{25} + \log \left( \frac{6}{27} \right)^3 - 2\log \frac{16}{125} = \log 2$$

5. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = 2$$

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\log_3 \sqrt{27} - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{64}}{\log_{\sqrt{2}} 8 + 2 \log_{\frac{1}{3}} 9}$$

7. Να βρείτε τις τιμές του  $\theta$ , ώστε η εξίσωση:

$$x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 1 - \log^2 \theta = 0$$

να έχει μία διπλή ρίζα.

8. Αν  $\alpha x = 4$ , να αποδείξετε ότι:

$$3 + \log_a x - \frac{1}{2} \log_a 16 = 2$$

9. Αν  $x, y > 0$  και  $x^2 + y^2 = 2xy$ , να αποδείξετε ότι:

$$\log_a \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} (\log_a x + \log_a y)$$

10. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{8^{1+\log_2 5}}{3^{\log_3 8 - \log_3 2} 100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt{2}}} = 50$

11. Δίνονται οι αριθμοί  $\log \frac{1}{x+1}$ ,  $\log \sqrt{5x}$  και 2.

Να βρείτε τις τιμές του  $x$ , ώστε οι παραπάνω αριθμοί

να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

12. Να αποδείξετε ότι  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$ .

13. Αν οι αριθμοί  $\log_a x$ ,  $\log_{a\beta} \sqrt{x}$  και  $\log_\beta x$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και  $x \neq 1$ , να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $\log a$ ,  $\log(a\beta)$  και  $\log \beta$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

14. Σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ο  $\log 2$  και ο δεύτερος ο  $\log 8$ . Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν όρων της προόδου δίνεται από τον τύπο:  $S_v = \frac{3^v - 1}{2} \cdot \log 2$ .

15. Να αποδείξετε ότι:

$$\log_\beta \alpha \cdot \log_\gamma \beta \cdot \log_\delta \gamma \cdot \log_\alpha \delta = 1$$

16. Αν  $\alpha > \beta > 0$  και  $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\log \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2} (\log \alpha + \log \beta)$

17. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι  $a_1 = \ln 3$  και  $a_2 = \ln 27$ . Να αποδείξετε ότι το άθροισμα  $S_v$  των ν πρώτων όρων είναι  $S_v = \ln 3^{v^2}$ .

18. Αν οι αριθμοί:

$$\frac{1}{3} \log_2 8, \log_4 (2^{1-x} + 9) \text{ και } \log_2 (2^x + 3)$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε την τιμή του  $x$ .

19. Για τη συνάρτηση  $f(x)$  ισχύει ότι:  $\ln f(x) = ax + b$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } f(0) = 3 \text{ και } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}:$$

α) να βρείτε τα  $a$  και  $b$ ,

β) να αποδείξετε ότι  $f(x) = 3 \cdot 4^{-x}$ .

20. Αν  $a_v = \log 3^v$ , να βρείτε την τιμή του  $v$ , ώστε:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_v = 15 \log 3$

21. Αν  $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$ , να αποδείξετε ότι:  $\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma = 1$

β)  $\alpha \beta \gamma = 1$

22. Να βρείτε τις τιμές του  $x$ , ώστε οι αριθμοί:  $\log^{x-2}$ ,  $\log \sqrt{5^x + 2^{x-3}}$  και  $\log 63$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

23. Να αποδείξετε ότι:

α)  $5^{\log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 2004} = 2004$

β)  $5^{\sqrt{\log_5 13}} = 13^{\sqrt{\log_{13} 5}}$

24. Να προσδιορίσετε το  $x$  στις πιο κάτω ισότητες:

i)  $\log_2 32 = x$

ii)  $\log_{\frac{1}{2}} 256 = x$

iii)  $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} = x$

vi)  $\log_5 625 = x$

v)  $\log_x \sqrt{x} = x, x > 0$

25. Στις πιο κάτω ισότητες να βρείτε το  $x$ :

i)  $\log_x 1000 = 3$

ii)  $\log_x 8 = 6$

iii)  $\log_x 25 = 8$

iv)  $\log_x 5 = \frac{1}{3}$

v)  $\log_x \frac{625}{16} = 4$

vi)  $\log_x 16 = \frac{2}{3}$

26. Να βρείτε το  $x$  στις πιο κάτω ισότητες:

i)  $\log_8 x = -\frac{7}{3}$

ii)  $\log x = -3$

iii)  $\ln x = \frac{1}{2}$

iv)  $\ln e^x = 8$

v)  $\ln x = 0$

vi)  $\ln(\ln x) = 0$

27. Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ορίζονται οι λογάριθμοι:

i)  $\log(x^2 - 1)$

ii)  $\log(x^4 - 1)$

iii)  $\log(x^2 - 5x + 6)$

iv)  $\log\left(\frac{1-x}{x}\right)$

v)  $\log(x^2 + x + 1)$

28. Να υπολογίσετε τις παρακάτω εκφράσεις (χωρίς τη βοήθεια υπολογιστών).

i)  $\log 8 + \log 5 - \log 4$

ii)  $\log_2 3 + \log_2 20 - \log_2 15 - 2$

iii)  $\log_5 29 + \log_5\left(\frac{1}{29}\right)$

iv)  $\log_3 5 + \log_3 12 - \log_3 6,6666\dots$

29. Να δείξετε ότι: i)  $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} + \frac{1}{\log_5 a} = \frac{1}{\log_{120} a}$ .

ii) Για κάθε  $x > 0$  και  $x \neq 1$ :

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_v x} = \frac{1}{\log_{v!} x}, \text{ όπου } v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots v \text{ (v: παραγοντικό).}$$

30. Για  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  να εφαρμόσετε όλες τις δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων:

i)  $\log \frac{3a\sqrt{\beta^2\gamma}}{5\beta_2\sqrt[3]{a^2\beta\gamma^2}}$

ii)  $\log\left(\frac{3a^2}{5\beta\sqrt{\gamma}}\right)$

iii)  $\log \frac{5a^3\sqrt[4]{\beta^2\gamma}}{7\beta^2\sqrt{a^2\beta\gamma^2}}$

31. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i)  $\log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36}$

ii)  $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$

iii)  $\log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 + \log_{\frac{1}{2}} 2$

iv)  $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 4 - \log_{0,1} 2$

v)  $\log_4 6 - \log_4 8 - \log_4 3$

vi)  $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0,5$

32. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } K = \frac{(\log_2 5 + \log_3 5) \cdot \log_6 5}{\log_2 5 \cdot \log_3 5} \quad \text{ii) } A = \frac{\log_3 81 - \log_8 64}{\log_{0,5} 64 + \log_2 \frac{1}{32} - \log 4\sqrt{2}}$$

$$\text{iii) } M = \frac{\log_3 9\sqrt{3} \cdot \log_{49} 7}{\log_5 \frac{1}{125} - \log_2 32 + \log_3 27 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 64}$$

33. Αν  $\alpha > \beta > 0$  και  $\alpha^2 + \beta^2 = 27\alpha\beta$ , να αποδείξετε ότι  $\log \frac{\alpha - \beta}{5} = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta)$ .

34. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{a) } a^{\log_a \beta + \log_\beta \gamma + \log_\gamma 2004} = 2004$$

$$\text{β) } 7^{\sqrt{\log_7 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 7}}$$

35. Να αποδείξετε ότι:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = 3$$

36. Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 1$ , να αποδείξετε ότι:

$$\log_a \beta \gamma \delta = \frac{1}{\log_\beta \alpha} + \frac{1}{\log_\gamma \alpha} + \frac{1}{\log_\delta \alpha}$$

37. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\log_2 \beta} + \frac{1}{\log_8 \beta} + \frac{1}{\log_{32} \beta} = 9 \log_\beta 2$$

38. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\log_2 3}, \frac{1}{\log_4 3} \text{ και } \frac{1}{\log_8 3}$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

39. Αν ισχύει:

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_\beta x} + \frac{1}{\log_\gamma x} = 0$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{a) } x \neq 1 \quad \text{β) } \alpha\beta\gamma = 1$$

40. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί:

$$\frac{1}{\log_2 5}, \frac{1}{\log_4 5} \text{ και } \frac{1}{\log_8 5}$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

41. Αν  $0 < \alpha, \beta, \gamma, \theta \neq 1$  και οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $\log_\theta \alpha$ ,  $\log_\theta \beta$  και  $\log_\theta \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

42. Αν  $\alpha = \log_{x^2} 3$  και  $\beta = \log_x 81$ , να αποδείξετε ότι  $\beta = 8\alpha$ .

43. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\text{a) } A = 2\log 6 + \log 5 - \log 2 - 2\log 3$$

$$\text{β) } B = \frac{\log 4,9 + \log 20 - \log 2}{\log 14 - \log 2}$$

- 44.** Αν  $\log \alpha = 2$ ,  $\log \beta = -\frac{1}{2}$  και  $\log \gamma = 3$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\log \frac{\sqrt{10^5} \alpha}{\beta^2 \gamma^3}}{\log \frac{\alpha^4 \beta^3}{10 \gamma^2}} = 9$$

- 45.** Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha^2 + \beta^2 = 23\alpha\beta$ , να αποδείξετε ότι:

$$\ln \alpha + \ln \beta = 2 \ln \frac{\alpha + \beta}{5}$$

- 46.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α)  $A = \log_2 32 - \log_3 81 + \log_7 49$

β)  $B = \log 100 + \log 10 + \log 1 - \log \frac{1}{100}$

γ)  $\Gamma = \frac{\log 81 + \log 16}{\log 9 + \log 4}$

- 47.** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{25^{\frac{1+\frac{1}{3}\log_3 8}{3}} + 3^{3\log_3 2}}{2^{\frac{1+\frac{1}{3}\log_2 27}{3}}} = 18$$

- 48.** Να αποδείξετε ότι:

α)  $2 \log \frac{5}{2} + \log \frac{3}{11} - \log \frac{40}{77} - \log \frac{105}{32} = 0$

β)  $\log_2 64 + 2 \log_3 \sqrt{27} - \log_8 4 - 2 \log_8 32 = 5$

- 49.** Να αποδείξετε ότι:

α)  $\log \sqrt{30} + \frac{1}{2} \log 4 - \log 2 - \log \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

β)  $\frac{\left(\log_3 9\sqrt{3}\right) : (\log_{49} 7) + \log_5 125}{\log_5 \frac{1}{125} - \log_2 \frac{1}{32} + \log_3 27 \cdot \log_{1/2} 64} = -\frac{1}{2}$

- 50.** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log (2 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} \log (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \frac{1}{2} \log (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = \log 2$$

- 51.** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} = 3$$

### 4.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - a)  $\log 2x + \log 3 = \log 36$
  - β)  $2\log(x - 3) = \log 36$
  - γ)  $\log x + \log(x - 1) = \log 12$
  - δ)  $\log(2x - 1) + 2\log 2 = \log(5 - x)$
  - ε)  $2\log(x - 1) = \log 2 + \log 8$
  - στ)  $\log x - \log(x - 2) = \log 3$
  - ζ)  $\log(x + 1) + 2\log\sqrt{5x} = 2$
  - η)  $\log(x - 2)^2 = 2\log 4$
  - θ)  $2^{2x} = 3^{x+1}$
  - ι)  $10^{2\log x - 3} = x$
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - α)  $\log(3 - x) = 3\log 2 - \log(1 - x)$
  - β)  $1 + \frac{\log(x-1)}{\log 2} = \frac{2\log 2}{\log(x-1)}$
3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - α)  $\log(x - 4) + \log(x + 3) = \log(5x + 4)$
  - β)  $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$
  - γ)  $\ln(x^3 + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 1) = \ln 3$
  - δ)  $\log_5(x - 2) + 2\log_5(x^3 - 2) + \log_5\frac{1}{x-2} = 4$
4. Να λύσετε της εξίσωση:
 
$$\log(2^x + 1) = 1 + \log 2 - x\log 2$$
5. Να λύσετε την εξίσωση:
 
$$(\log x)^2 - \log x^3 + 2 = 0$$
6. Να λύσετε την εξίσωση:
 
$$\log(3^x + 72) = 2x\log 3$$
7. Να λύσετε τα συστήματα:
  - α)  $\begin{cases} \log x + 2\log y = 6 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$
  - β)  $\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$
  - γ)  $\begin{cases} x^{\log y} = 1000 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$
  - δ)  $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \log(x + y) = 2\log 5 \end{cases}$
8. Να λύσετε τα συστήματα:
  - α)  $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$
  - β)  $\begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ \log x - \log y = \frac{1}{2} \end{cases}$
  - γ)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$
  - δ)  $\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$
9. Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - α)  $\log(x - 2) + \log(x - 1) = \log(2x + 8)$
  - β)  $\frac{1}{2}\log(3x - 1) + \frac{1}{2}\log(8x - 2) = \log(4x - 1)$
10. Να λύσετε την εξίσωση:
 
$$x^{\log 2x} = 5$$
11. Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - α)  $x + \log(2^x + 1) = x\log 5 + \log 6$
  - β)  $\log(4^{x-2} + 9) - 1 = \log(2^{x-2} + 1) - \log 2$
12. Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - α)  $\log(4^{x-2} + 1) + \log(2^{x-2} - 1) = 1 - \log 2$
  - β)  $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x\log 3 + \log 178$
13. Να βρείτε τις τιμές του  $x$ , ώστε οι αριθμοί:
 
$$\log x, \log 3\sqrt{2}, \log(x - 3)$$
 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
14. Δίνεται η συνάρτηση:
 
$$f(x) = \ln \frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}$$
  - α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ .
  - β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -2\ln 2$ .
  - γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < 0$ .
  - δ) Να αποδείξετε ότι:
 
$$f(x) = (x - 1)\ln 2 + \ln \frac{2^x - 1}{2^x + 2}$$
15. Αν  $\alpha, \beta > 1$ , να αποδείξετε ότι:
 
$$\log(\alpha - 1) + \log(\alpha + 1) + \log(\beta + 1) + \log(\beta - 1) - \log[(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta)^2] = 0$$
16. Να λύσετε τις ανισώσεις:
  - α)  $2^{\log_3(x^2 - 8x)} \leq 4$
  - β)  $(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 \leq 0$
17. Να λύσετε τα συστήματα:
  - α)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \log x + \log y = \log 6 \end{cases}$
  - β)  $\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x\log 5 + y\log 2 = \log 20 \end{cases}$
  - γ)  $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$
  - δ)  $\begin{cases} 2^{\log x} - 3^{\log y} = 1 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 25 \end{cases}$

- 18.** Να χαράξετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων και να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών τους.
- $f(x) = (x - 1)$
  - $f(x) = \log|x - 2|$
  - $f(x) = \ln|x| - 1$
  - $f(x) = \ln(1 - 2x + x^2)$
- 19.** Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
- $f(x) = \log x + 2$
  - $g(x) = \ln(x - 1)$
  - $d(x) = (x + 1) - 2$
- 20.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
- $f(x) = \log(x + 1)$
  - $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
  - $f(x) = \log(x^3 + x - 2)$
  - $f(x) = \log_3(\sqrt{x+1} - 3)$
  - $f(x) = \log_3(x^2 - 4x + 3)$
- 21.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \log_{(x+1)}(x^2 + 2x + 1)$ .
- 22.** Να βρείτε τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f(x) = \log_{\frac{a-1}{2a+1}} x$  ορίζεται και είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
- 23.** Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις  $f(x) = \log_2 x$ ,  $g(x) = \log_2 x - 1$  και  $h(x) = \log_2(x - 1)$ .
- 24.** Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  και τη λογαριθμική  $g(x) = \log_a x$ , των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο:  $A(3, 1)$   $B(-3, 2)$   $\Gamma(3, 2)$   $\Delta(-2, -3)$ .
- 25.** Να βρεθεί ο  $x$  ώστε οι αριθμοί  $2x$ ,  $\sqrt{\log(2^x + 2)}$ ,  $\log 2$  να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- 26.** Να βρεθεί ο  $x$  ώστε οι αριθμοί  $\log 2$ ,  $\log(2^x - 1)$ ,  $\log(2^x + 3)$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
- 27.** Να λυθούν οι εξισώσεις:
- $\log_3^2 x - 3 \log_3 x - 10 = 0$
  - $(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 4$
  - $2 \log \sqrt{x+1} + \log 5x = 2$
  - $3 \cdot 4^{\log x} + 2^{\log x} = 52$
- 28.** Να λυθούν οι εξισώσεις:
- $\log x = \log 24 - \log 3$
  - $3 \log \frac{x}{2} = 5 \log x - \log 288$
  - $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$
  - $\log x - \log 80 = \log \frac{1}{4}$
  - $\log_3 x - \log_8 81 = 3$
  - $\log(x - 2) + \log(x - 3) = \log 6$
- 29.** Να λυθούν οι εξισώσεις:
- $\log 61 - \log 1525 = \log(2^{2x} + 3^2)$
  - $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + 4 \log 3 - \log 3^x = \log 178$
  - $\log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$
  - $\log(x - 2) + \log(x - 1) = \log(2x + 8)$
  - $\log(x + 7) + \log(3x + 1) = 2$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i)  $\frac{1}{3} \log(x-1) + \log 2 = \log x$
- ii)  $\frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$
- iii)  $\log_2 x = 2 \log_2 a + 3 \log_2(a+\beta) - 4 \log_2(a-\beta)$
- iv)  $\log(3^x + 2) = 2x \log 3$
- v)  $\log_{\sqrt{2}}(2 \log_4 x \cdot \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x) = 6$
- vi)  $3^{2 \log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$

31. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  ώστε να ισχύει:

- i)  $\log_{3-x}(x^2 + 6x + 9) + \log_{3+x}(x^2 - 6x + 9) = 4$
- ii)  $\log_x(x+3) = \log_x(x^2 + 1)$
- iii)  $\log_x 2 - \log_x 3 = 2$
- iv)  $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$
- v)  $2 \log^2(x^3) - 3 \log x - 1 = 0$
- vi)  $3 \log^2(x^2) - \log x - 1 = 0$

32. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i)  $x^{\log x - 1} = 100$
- ii)  $x^{1+\log x} = 10x$
- iii)  $x^{\log x - 3} = 10^{-2}$
- iv)  $4^{\frac{1}{2} \log x} + 4^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \log x} = 12$
- v)  $x^{\log \sqrt{x}} = 100$
- vi)  $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}(x-2)}} = 3$

33. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  ώστε να ισχύει:

- i)  $4 \log_3^2 5x - 7 \log_3 15x + 7 = 0$
- ii)  $\frac{1}{12} \log^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \log x$
- iii)  $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}$
- iv)  $\log_x(x^2 - 3x + 6) = 2$
- v)  $2 \log(x-1) = \frac{1}{2} \log x^5 - \log \sqrt{x}$
- vi)  $\log(x^2 - 17) = \log(x + 3)$

34. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i)  $x + 2^x + \log_2 x = 7$
- ii)  $\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2}$
- iii)  $\ln(3x+1) + \ln(1-4x) = 2 \ln(x+1)$
- iv)  $\frac{2 + \log(x+2)}{4 + \log(x^2+36)} = \frac{1}{2}$
- v)  $\log x = \log 24 - \log 8$
- vi)  $\frac{4}{\log_2 x} + \frac{1}{1 - \log_2 x} = 1$

35. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i)  $\log_c x = 2 \log_c a - \frac{1}{2} \log_c b - 3 \log_c 3$
- ii)  $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 4 - \log_a 5$
- iii)  $\log_a x = 2 \log_a 7 + 3 \log_a 6 - 4 \log_a 5$
- iv)  $2x - x^2 = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x$
- v)  $\log_a \cdot (\log_a x) = \log_a a^a (\log_a a^a x)$

36. Να λυθεί η εξισωση:

$$1000^{\log x} + 5 \cdot 100^{1+\log x} = 10^{2+\log x} + 498x^2 + 200$$

37. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  ώστε να ισχύει:

- i)  $\ln x + 6 \log_x e = 5$
- ii)  $\log_2 x + \log_3 x = 1$
- iii)  $\log_3(2-3x) = \log_9(8x^2 - 9x + 14)$
- iv)  $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

38. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  ώστε να ισχύει:

- i)  $\log_2 x + \log_{4x} 2 = 0$
- ii)  $\log_{64}(x-3) + \log_2 5 = \frac{1}{2} \log_2 50$
- iii)  $\log_4 x + \log_x 4 = \frac{5}{2}$

39. Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

- i)  $2^{\log_9 x^2} - 3 \cdot 2^{\log_9 x+1} + 8^{\log_3 3} = 0$
- ii)  $5^{\log 2x} + 3 \cdot 5^{4-\log 2x} = 100$
- iii)  $(4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100$
- iv)  $\frac{10}{\sqrt{x}} = x^{2-\log x}$
- v)  $x^{\log x + \frac{1}{2}} = 10^3$
- vi)  $100^{1+\frac{1}{2} \log x} + 1000^{\frac{1}{3} \log(x-1)-1} = 1$

40. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- i)  $\log_3 x > \log_3 4$
- ii)  $\log_{\frac{1}{2}}(2x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 5$
- iii)  $\log_2 x^2 \geq \log_2 8$
- iv)  $\log_6(x^2 - 1) \leq \log_6(4x + 4)$
- v)  $\log_4(x+1) - \log_2(2x+2) + 2 < 0$

41. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- i)  $\log_2 \frac{x-1}{x+1} \geq 1$
- ii)  $\log_{1/2} \frac{x^2-4}{x^2+4} \leq 1$
- iii)  $-2 < \log_2 \frac{x-1}{x+2} < 2$
- iv)  $\frac{1 - \ln x}{2 + \ln x} > 0$
- v)  $\ln \frac{x-1}{x+1} + \ln x < 1$

**42.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \log_3(4^x + 1) + \log_{4^x+1} 3 > 2,5 & \text{iii) } \log(x^2 - 3) > \log(x + 3) \\ \text{ii) } \log 2 + \log(4^{x-2} + 9) \leq 1 + \log(2^{x-2} + 1) & \text{iv) } \log^2 x - 2 \log x - 8 \leq 0 \end{array}$$

**43.** 170. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \log_{\frac{1}{2}}[\log_3(3x-1)] > 0 & \text{iv) } \log_2(9-2^x) > 3-x \\ \text{ii) } (0,4)^{\log^2 x+2} \leq 6,25^{3-\log x^3} & \text{v) } (0,25)^{x-4} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^x \\ \text{iii) } \log_{(x+3)}(x^2 - x) \leq 1 & \text{vi) } \log_{\frac{1}{5}}(x-1) > -2 \end{array}$$

**44.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } x^{\frac{1}{\log x}} \cdot \log x < 1 & \text{ii) } \log_x[\log_4(2^x - 2)] < 1 \end{array}$$

**45.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 + y = 12 \end{cases} & \text{ii) } \begin{cases} \log x + \log y = \log 14 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \end{array}$$

**46.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} & \text{ii) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases} \end{array}$$

**47.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \begin{cases} x^{\log y+1} = y^{\log x+2} \\ y^{\sqrt{x+3}} = x^{y-2} \end{cases} & \text{ii) } \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases} \end{array}$$

**48.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ \log(2x+2) - \log(3+y) = 0 \end{cases} & \text{ii) } \begin{cases} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \end{array}$$

**49.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \begin{cases} 2^{\log x} - 3^{\log y} = 1 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 25 \end{cases} & \text{ii) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2x^{2/y} = 10 \\ 2 \log x + y \log 5 = 2 \log 20 \end{cases} \\ \text{iii) } \begin{cases} a^{x^y-y^x} = 1 \\ x = y^2 \end{cases} \quad a \neq 1, a > 0 & \text{iv) } \begin{cases} x + \log y = 1 \\ \sqrt[x]{y^2} + 10 = 11\sqrt[x]{y} \end{cases} \end{array}$$

**50.** Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \begin{cases} 4 \log x + \log y^5 = 12 \\ \log x^2 + \log \sqrt{y} = 2 \end{cases} & \text{ii) } \begin{cases} y^x (1 + y^x) = 10100 \\ \log \sqrt{x \cdot y} - \log \sqrt[\frac{x}{y}]{x} = 3 \end{cases} \\ \text{iii) } \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ [(\log x)^y \cdot (\log y)^x]^{1/x} = 1024 \end{cases} & \text{iv) } \begin{cases} \log_9 x - \log_3(x+y) = -1 \\ \log_3 x - \log_9(y-x) = 0 \end{cases} \end{array}$$

51. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[3]{1024} = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} (2x)^{\log y} + y^{\log(2x)} = 8x^2 \\ y = 4x^2 \cdot y^{\log(2x)} \end{cases}$$

52. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x^4 + y^4 = 641 \\ 2\log x + 2\log y = 2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} xy = 40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases}$$

53. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x - y = 90 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x^y - y^x = 0 \\ 2^x - 4^y = 0 \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y^x \\ y^{\sqrt{x}} = x^y \end{cases}$$

54. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει  $\mu \in \mathbb{N}^*$  ώστε η ανισότητα

$$\log_2 \left[ \log_a (x^2 - 2x + \log_a \mu + a) \right] < 0 \text{ με } a \in (0, 1) \text{ να αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

55. Να δείξετε ότι  $\frac{1}{\log_{17} 34 - \log_{34} 68} > 20$ .

56. Να δείξετε ότι για κάθε  $a > 0$  ισχύει:

$$10^{\log a} + 3 \log \sqrt{a} + \log \left( \sqrt{a}^{-\log \sqrt{10}} \right) - \frac{1}{2} \log a^3 + \log_4 (\log 10) = \frac{1}{4} \log a + a.$$

57. Για ποιες τιμές του  $a$  η εξίσωση  $x^2 - 4x \log a + 5 \log a - 1 = 0$  έχει πραγματικές ρίζες.

58. Αν  $f(x) = \log_a x$ ,  $x > 0$ ,  $a > 1$ , να δείξετε ότι  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ .

59. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η εξίσωση  $\log_a x + (a + \log_a x) \log_{\sqrt{x}} a = 2a \log_x a$  έχει λύσεις και να λυθεί η εξίσωση.

60. Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες μεταξύ των ριζών της εξίσωσης  $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$  ισχύει η σχέση  $\log_{x_1^2 + x_2^2} (2x_1 x_2) + \log_{2x_1 x_2} (x_1^2 + x_2^2) = 2$ .

61. Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $x^2 = \log_4 \frac{32^{\kappa x}}{5^{\kappa-1}}$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ , έχει μια λύση ανεξάρτητη του  $\kappa$ .

62. Αν  $\log_{48} 108 = \omega$  να εκφράσετε τον  $\log_8 27$  συναρτήσει του  $\omega$ .

63. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log_x \sqrt[3]{625} - \log_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0$$

64. Να λύσετε τις εξισώσεις:

a)  $\log(x+1) + 2 \log \sqrt{5x} = 2$

b)  $(4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} = 100$

c)  $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$

d)  $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$

**65.** Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α)  $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6$
- β)  $x + \log_2(9 - 2^x) = 3$
- γ)  $\log_6(1 + 2^x) = 1 + x \log_6 3 - x$
- δ)  $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

**66.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 - 9 = 0$$

**67.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left[ \log_x (16x - 5 - x^2) + \log_x 2 \right] \cdot \log_{x+5} x \cdot \log_x x = 2$$

**68.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α)  $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$
- β)  $\log_2 x - 4 \log_{x^2} 4 = 3$
- γ)  $2^{\log x} + 2^{3 - \log x} = 6$
- δ)  $2^{\log x} + 3 \cdot 4^{\log x} = 52$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. α)  $\alpha < 2$       β)  $2 < \alpha < 3$

2. α)  $\alpha < 1$       β)  $-2 < \alpha < -1$

3. Αρκεί νδο  $2\beta = \alpha + \gamma$

4. ...

5. α)  $x=3$     β)  $x=2$     γ)  $x=-2$     δ)  $x=3 \text{ ή } x=2$

ε)  $x=\pm 2 \text{ ή } x=\pm 3$  στ)  $x=\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$ .

6.  $x=1 \text{ ή } x=3$

7.  $x=\pm 1$

8. α)  $x>0$       β)  $2 \leq x < 3$

9. α)  $x=2 \text{ ή } x=1/3$  β)  $x=0 \text{ ή } x=25$

γ)  $x=0 \text{ ή } x=1$     δ)  $x=2$

10. α)  $x=0 \text{ ή } x=-1$     β)  $x=0$     γ)  $x=3$

δ)  $x=0 \text{ ή } x=1$

11. ...

12. α)  $x=\pm 1$       β)  $x=0 \text{ ή } x=\pm 1$

13. α)  $(x,y)=(3,1)$     β)  $(x,y)=(4,2)$

14. α)  $(x,y)=(3,2) \text{ ή } (x,y)=(2,3)$

β)  $(x,y)=(3,2) \text{ ή } (x,y)=(1,1)$

15.  $x=-2$

16.  $c=1$ ,  $Q(t)=2^t$ ,  $t=8$

17. α)  $\lambda \in (-1,1) \cup (1,3)$       β)  $\lambda \in (-1,1)$

γ)  $\lambda \in (1,3)$       δ)  $-2 < x < 1$

18. α)  $x=\pm 2$     β)  $x=0 \text{ ή } x=1$

γ)  $x=\pm 2$     δ)  $x=\pi/6, x=5\pi/6, x=\pi/3,$   
 $x=2\pi/3$

19. α)  $(x,y)=(2,1)$     β)  $(x,y)=(-1, 1/10)$

γ)  $(x,y)=(1,2)$     δ)  $(x,y)=(3,2)$

20. ...

21. α)  $(x,y)=(5,1)$     β)  $(x,y)=(7,5)$

22. α)  $x=\pm 1 \text{ ή } x=4$     β)  $x=-3 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=3$

23. i)  $x=1$     ii)  $x=3$     iii)  $x=4$     iv)  $x=0$     v)  $x=2$

vi)  $x=3$     vii)  $x=5$     viii)  $x=0 \text{ ή } x=2$

24. i)  $x=-1/13$     ii)  $x=48$     iii)  $x=5/2$     iv)  $x=2$

v)  $x=0$     vi)  $x=1$     vii)  $x=4$

25. i)  $x=0$     ii)  $x=0 \text{ ή } x=1$     iii)  $x=1 \text{ ή } x=-1$

iv)  $x=2$     v)  $x=0 \text{ ή } x=\pm 1$     vi)  $x=-1$

26. i)  $x=0$     ii)  $x=2$     iii)  $x=2$     iv)  $x=0 \text{ ή } x=2$     v)  $x=0$

vi)  $x=0$     vii)  $x=-3 \text{ ή } x=2$     viii)  $x=3$     ix)  $x=2$

x)  $x=1 \text{ ή } x=0$

27. i)  $x=0$     ii)  $x=0$

28. i)  $x=2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$     ii)  $x=3$

iii)  $x=\kappa\pi \text{ ή } x=\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$     iv)  $x=\pm 2$

v)  $x=\pm 2$     vi)  $x=\pm 2$     vii)  $x=2$

viii)  $x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3$

29. i)  $x > 1/4$     ii)  $x > 3/2$     iii)  $x > -2$

30. i)  $x > -1$     ii)  $x > 1$     iii)  $x < 0$

31.  $0 < x < 2 \text{ ή } x > 3$

32.  $x=2$

33.  $\alpha < -1$

34. i)  $(x,y)=(10,-8)$     ii)  $(x,y)=(1,0) \text{ ή } (0,\ln_3 2)$

iii)  $(x,y)=(2,1)$     iv)  $(x,y)=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

v)  $(x,y)=(2,1)$ .

35. i)  $(x,y)=(3,2) \text{ ή } (x,y)=(1,1)$     ii)  $(x,y)=(1,3)$

iii)  $(x,y)=(4,3)$     iv)  $(x,y)=\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$ .

36. i)  $(x,y)=(3,2)$     ii)  $(x,y)=(4,1)$

37. i)  $(x,y)=(2,1)$     ii)  $(x,y)=(2,3)$

38. i)  $(x,y)=(8,-6)$     ii)  $(x,y)=(1,5)$

**39.** Στο διάστημα  $(-\infty, 0]$  είναι ↗ και στο

διάστημα  $[0, +\infty)$  είναι ↘.

**40.**  $x = x = x = x = x = x = x =$

**41.**  $x = x = x = x == x =$

**42.**  $x == x == x = x = x =$