1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x-\alpha\ln x$, $x>0$, με α πραγματικό αριθμό.

i. Εάν $f(x)\geq 2e$, για κάθε $x>0$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α.

ii. Εάν $\alpha=2e$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα. Στη συνέχεια να μελετήσετε την κυρτότητα της συνάρτησης f.

iii. Εάν $\alpha=2e$, να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, καθώς και εάν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

iv. Εάν $\alpha=2e$, να δείξετε ότι για κάθε $x\in(1,2e)$, ισχύει $(f(x)-2e)(2e-1)<(f(2e)-2e)(x-1)$.

Λύση:

i. Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=2e^x-\frac{\alpha}{x}$.

Επίσης $f(x)\geq 2e \Leftrightarrow f(x)\geq f(1)$ επομένως στο $x=1$ παρουσιάζει Τ.Ε.

Άρα (Θ. Fermat) $f'(1)=0 \Leftrightarrow 2e-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=2e$.

ii. $f(x)=2e^x-2e\ln x \Leftrightarrow f'(x)=2e^x-\frac{2e}{x}$.

Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ το $x=1$.

$f''(x)=2e^x+\frac{2e}{x^2}>0$, άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επομένως f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

- $0<x\leq 1 \overset{f'\nearrow}{\Longrightarrow} f'(x)<f'(1)=0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
- $x\geq 1 \overset{f'\nearrow}{\Longrightarrow} f'(x)\geq f'(1)=0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα στο $x=1$ παρουσιάζει Τ.Ε. το $f(1)=2e$.

iii. Πιθανή κατακόρυφος ασύμπτωτος, η ευθεία $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x-2e\ln x)$$
$$=1-(-\infty)$$
$$=+\infty.$$

Άρα η ευθεία $x=0$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Οριζόντια ασύμπτωτος έχει νόημα μόνο στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-2e\ln x)\overset{(+\infty-\infty)}{=\!=\!=}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-2e\frac{\ln x}{e^x}\right)\right]$$
$$=+\infty(1-0)$$
$$=+\infty,$$ .....γιατί $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{xe^x}\right)=0.$

Μορφή $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ DLH

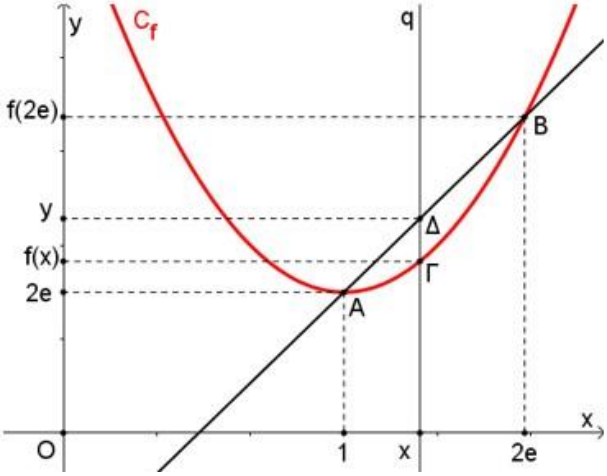
Επομένως δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο.

iv. Η ευθεία ΑΒ με $A(1,2e)$ και $B(2e,f(2e))$, έχει εξίσωση:

ΑΒ: $y-f(2e)=\frac{f(2e)-f(1)}{2e-1}(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=f(2e)+\frac{f(2e)-2e}{2e-1}(x-1)$.....(1)

Εάν 1<x<2e, τότε κατακόρυφη ευθεία q, τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε σημείο Γ και την ευθεία ΑΒ σε σημείο Δ και επειδή η συνάρτηση είναι κυρτή, το Δ βρίσκεται πάνω από το Γ (διπλανό σχήμα).



Άρα y>f(x) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Leftrightarrow$ f(2e)+ $\frac{f(2e)-2e}{2e-1}$(x-1)>f(x)

$\Leftrightarrow$ f(x)-f(2e)<$\frac{f(2e)-2e}{2e-1}$(x-1)

$\Leftrightarrow$ (f(x)-2e)(2e-1)<(f(2e)-2e)(x-1).

2) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : IR→ IR, με f΄(x)=$\begin{cases}\frac{1}{x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu x}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ και f(0)=1.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f΄(x) είναι συνεχής στο IR και να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-π,0] και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,π).

ii. Να δείξετε ότι f(x)=$\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περιέχεται από τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης f, τον άξονα xx΄, και τις ευθείες x=0 και x=π.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=$\begin{cases}\ln\left(f(x)\right), & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο x=0 και ότι είναι κοίλη στο (-π,π).

Λύση:

i. Επειδή η f είναι συνεχής στο R*, αρκεί να είναι συνεχής στο 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu x}{x}\right)$

μορφή $\pm\infty\cdot 0$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}\right)\xRightarrow{\mu o\rho\varphi\acute{\eta}\left(\frac{0}{0}\right)\ DLH}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\eta\mu x}{2x}$

$=-\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x$

=0

=f΄(0).

Άρα η f΄(x) είναι συνεχής στο IR.

Για x≠0, είναι:

f΄(x)= $\frac{1}{x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu x}{x}\right)$

$=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$.

Θέτω h(x)=xσυνx-ημx.

h΄(x)=-xημx.

• για $x\in(-\pi,0]$, $x \le 0$ και $\eta\mu x \le 0$, οπότε $x\eta\mu x \ge 0 \Leftrightarrow -x\eta\mu x \le 0 \Leftrightarrow h'(x) \le 0$.

Άρα h(x) ↘ στο $(-\pi,0)$ οπότε:

$-\pi<x<0 \Leftrightarrow h(-\pi)>h(x)>h(0)$

$\Leftrightarrow \pi>x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x \ge 0$,

άρα $f'(x) \ge 0$ με $f'(x)=0$, μόνο για $x=0$.

Άρα f(x) ↗ στο διάστημα $(-\pi,0]$.

$h'(x)=-x\eta\mu x$.

3ο–4ο τεταρτημόριο

1ο–2ο τεταρτημόριο

• για $x\in[0,\pi)$, $x \ge 0$ και $\eta\mu x \ge 0$, οπότε $x\eta\mu x \ge 0 \Leftrightarrow -x\eta\mu x \le 0 \Leftrightarrow h'(x) \le 0$.

Άρα h(x) ↘ στο $[0,\pi)$ οπότε:

$0 \le x <\pi \Leftrightarrow h(0) \ge h(x)>h(\pi)$

$\Leftrightarrow 0 \ge x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x > -\pi$,

άρα $f'(x) \le 0$ με $f'(x)=0$, μόνο για $x=0$.

Άρα f(x) ↘ στο διάστημα $[0,\pi)$.

ii. Για $x\neq0$, έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

$$=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$$

$$=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' \text{ ..... Άρα } f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}+c, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

<u>Υπολογισμός c:</u>

Επειδή f συνεχής, θα είναι και συνεχής στο 0.

Άρα $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+c\right)=1$

$\Leftrightarrow 1+c=1$

$\Leftrightarrow c=0$, οπότε $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

iii. Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, γιατί είναι συνεχής στο R. Επίσης από το προηγούμενο ερώτημα, $f'(x) \le 0$ στο $[0,\pi]$, οπότε:

$E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f'(x)|dx$

$= -\int_0^{\pi} f'(x)dx$

$= [-f(x)]_0^{\pi}$

$= [f(x)]_{\pi}^{0}$

$= f(0)-f(\pi)$

$=1-0$

$=1$.

Θέτω f(x)=u.

$\lim\limits_{x\to0}(f(x))=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1$

iv. <u>Συνέχεια στο x=0</u>:

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}(\ln f(x))=\lim\limits_{u\to1}(\ln u)=\ln1=0=g(0)$, άρα είναι συνεχής στο x=0.

<u>Παράγωγος στο x=0</u>:

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}$$

$$\underset{\substack{\left(\frac{0}{0}\right)\\ DLH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\ln f(x)\right)'$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\frac{\eta\mu x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu x}{x}}{\eta\mu x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sigma\varphi x-\frac{1}{x}\right)$$

Όταν $x\to 0^+$, μορφή $+\infty-\infty$
Όταν $x\to 0^-$, μορφή $-\infty+\infty$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\varphi x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(x\sigma\varphi x)\underset{0\cdot(\pm\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\varphi x}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\underset{\substack{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ DLH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sigma\varphi x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)^2$$

$$=1^2$$

$$=1.$$

$$\underset{\substack{\left(\frac{0}{0}\right)\\ DLH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x\sigma\varphi x-1)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sigma\varphi x-\frac{x}{\eta\mu^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-\frac{x}{\eta\mu^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-x}{\eta\mu^2 x}\right)$$

$$\underset{\substack{\left(\frac{0}{0}\right)\\ DLH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-x)'}{(\eta\mu^2 x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x-1}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x-1}{\eta\mu x}$$

Μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$
DLH

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x-1)'}{(\eta\mu x)'}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-4\eta\mu x\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}$$

$$=-2\cdot\lim_{x\to 0}(\eta\mu x)$$

$$=0.$$

άρα είναι παραγωγίσιμη στο x=0, με g΄(0)=0.

<u>Κυρτότητα</u>:

Για $x\neq 0$, $g'(x)=(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{1}{x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\sigma\varphi x-\frac{1}{x}$.

$g''(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}+\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\eta\mu x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $|\eta\mu x|\leq|x|$ (1), με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0.

- $x\in(-\pi,0)$, η σχέση (1) γίνεται $-\eta\mu x < -x < 0 \Leftrightarrow 0 > \eta\mu x > x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} < \frac{1}{x}$$

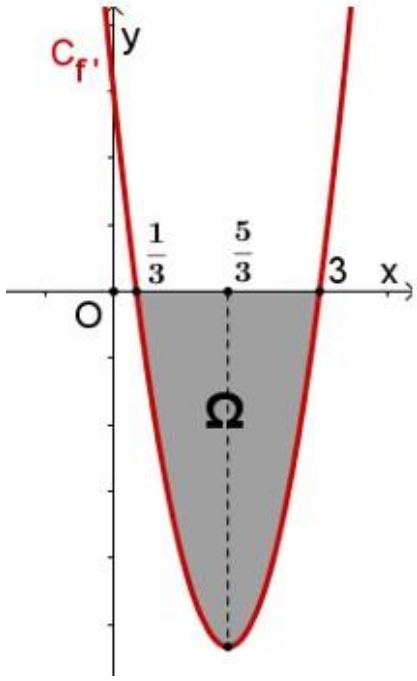
$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} > 0. \\ \text{Επίσης } x<0 \text{ και } \eta\mu x<0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{\eta\mu x} < 0. \end{array}\right\} \Rightarrow g''(x) < 0 \quad (2)$$

- $x\in(0,\pi)$, η σχέση (1) γίνεται $0 < \eta\mu x < x \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} > \frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} < 0. \\ \text{Επίσης } x>0 \text{ και } \eta\mu x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{\eta\mu x} > 0. \end{array}\right\} \Rightarrow g''(x) < 0 \quad (3)$$

Από (2) και (3), $g''(x) < 0$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, είναι κοίλη στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου της, δίνεται στο διπλανό σχήμα. Για τη συνάρτηση f ισχύουν:



- Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{27}$.
- Το εμβαδόν του χωρίου Ω στο σχήμα, είναι $E(\Omega) = \frac{256}{27}$ τετραγωνικές μονάδες.
- $\int_0^3 f'(x)dx = -9$.

i. Να δείξετε ότι $f(3)=-8$ και $f(0)=1$.

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

v. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τέμνει τον άξονα xx΄ σε τρία σημεία, τα δυο με θετική τετμημένη και το ένα με αρνητική.

Λύση:

i. Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι στο διάστημα $[1/3, 3]$ είναι $f'(x)<0$. Άρα

$$E(\Omega) = \frac{256}{27} \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} |f'(x)|dx = \frac{256}{27}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{3} f'(x)dx = -\frac{256}{27}$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_{\frac{1}{3}}^{3} = -\frac{256}{27}$$

$$\Leftrightarrow f(3) - f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{256}{27}$$

$$\Leftrightarrow f(3) - \frac{40}{27} = -\frac{256}{27} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(3)=-8.$$

$$\int_0^3 f'(x)dx = -9 \Leftrightarrow [f(x)]_0^3 = -9$$

$$\Leftrightarrow f(3) - f(0) = -9$$

$\Leftrightarrow -8 - f(0) = -9 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(0)=1.$

ii. Από την γραφική παράσταση, προκύπτει ο πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		$1/3$		3		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			$40/27$		-8		

<u>Μονοτονία</u>: Στα διαστήματα $(-\infty, 1/3]$ και $[3,+\infty)$ η συνάρτηση είναι ↗.
Στο διάστημα $[1/3, +\infty)$ η συνάρτηση είναι ↘.

<u>Ακρότατα</u>: Στο $x=1/3$, παρουσιάζει Τ.Μ. το $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{40}{27}$.
Στο x=3 παρουσιάζει Τ.Ε. το f(3)=-8.

iii. <u>Κυρτότητα</u>: Από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι στο διάστημα $(-\infty,5/3]$ η συνάρτηση f΄(x) είναι ↘ επομένως η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω και στο διάστημα $[5/3,+\infty)$ η συνάρτηση f΄(x) είναι ↗, επομένως η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα πάνω.

<u>Σημεία καμπής</u>: Στο $x=5/3$, η συνάρτηση αλλάζει κυρτότητα και αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, έχει εφαπτομένη στο $x=5/3$. Άρα στο $x=5/3$ έχει Σ.Κ. το $f(5/3)$.

iv.
- $f\left(\left[\frac{1}{3},3\right]\right) \underset{f\searrow}{=} \left[f(3), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left[-8,\frac{40}{27}\right]$.
- $f\left(\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\right) \underset{f\nearrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = (\alpha, 40/27]$, όπου $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και
- $f([3,+\infty)) \underset{f\nearrow}{=} \left[f(3), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-8, \beta)$, όπου $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Επειδή η συνάρτηση f, έχει σύνολο τιμών το R, πρέπει $\alpha=-\infty$ και $\beta=+\infty$.
Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

v. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τον άξονα xx΄, είναι οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=0.
- Επειδή $0\in(-\infty, 40/27]$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_1 στο διάστημα $(-\infty,1/3]$ και επειδή είναι ↗ μοναδική.
  Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow f(x)<0$ κοντά στο $-\infty$. Άρα υπάρχει $\xi<0$, με $f(\xi)<0$ και επειδή $f(0)=1>0 \Rightarrow f(\xi)\cdot f(0)<0$ οπότε από το θ. Bolzano, η ρίζα x_1 ανήκει στο διάστημα $(\xi,0)$, άρα αρνητική.
- Επειδή $0\in\left[-8,\frac{40}{27}\right]$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2 στο διάστημα $\left[\frac{1}{3},3\right]$, άρα θετική και επειδή είναι ↘ μοναδική.
- Επειδή $0\in(-8,+\infty)$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_3 στο διάστημα $[3,+\infty)$, άρα θετική και επειδή είναι ↗ μοναδική.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τέμνει τον άξονα xx΄ σε τρία σημεία, τα δυο με θετική τετμημένη και το ένα με αρνητική.

4) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ και $f(x)+xf'(x)=\alpha\cdot e^{-xf(x)}$ (1), για κάθε x<0.

i. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x}\cdot \ln(\alpha x)$, x<0.

ii. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές y=f(x), $y=\frac{\alpha}{e}$ και $x=\frac{e^2}{\alpha}$.

iv. Να βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

v. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τέμνει τον άξονα xx΄ σε ένα μόνο σημείο, με τετμημένη μεγαλύτερη από $^{e}/_{\alpha}$.

Λύση:

i. Από τη σχέση (1) έχουμε $\left(xf(x)\right)'e^{xf(x)}=\alpha \Leftrightarrow \left(e^{xf(x)}\right)'=(\alpha x)'$

$\Leftrightarrow e^{xf(x)}=\alpha x+c$……(2)

Η σχέση (2) για $x=\frac{1}{\alpha}$ δίνει c=0, οπότε $e^{xf(x)}=\alpha x \Leftrightarrow xf(x)=\ln(\alpha x)$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}\cdot \ln(\alpha x)$, x<0.

ii. $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\cdot \ln(\alpha x)\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'\ln(\alpha x) + \frac{1}{x}\left(\ln(\alpha x)\right)'$

$= -\frac{1}{x^2}\ln(\alpha x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\alpha x}(\alpha x)'$

$= -\frac{1}{x^2}\ln(\alpha x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{\alpha}x}\cdot\cancel{\alpha}$

$= -\frac{1}{x^2}\ln(\alpha x) + \frac{1}{x^2}$

$= \frac{1}{x^2}\left(1-\ln(\alpha x)\right)$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{e}{\alpha}$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln(\alpha x)>0 \Leftrightarrow \ln(\alpha x)<1$
  $\Leftrightarrow \ln(\alpha x)<\ln e$
  $\Leftrightarrow \alpha x<e$
  $\Leftrightarrow x>\frac{e}{\alpha}$
  γιατί α<0 (?).
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-\ln(\alpha x)<0 \Leftrightarrow \ln(\alpha x)<1$
  $\Leftrightarrow \ln(\alpha x)>\ln e$
  $\Leftrightarrow \alpha x>e$
  $\Leftrightarrow x<\frac{e}{\alpha}$.

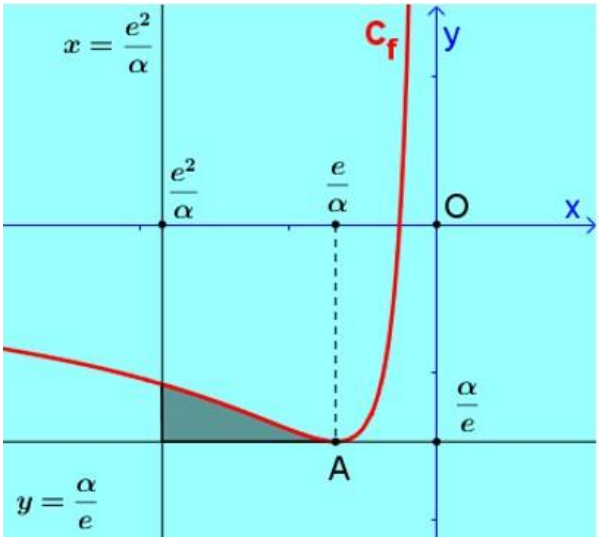
x	$-\infty$	$\frac{e}{\alpha}$	0
f΄(x)	+	0	-
f(x)	↘	T.E.	↗

<u>Μονοτονία</u>: Στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{e}{\alpha}\right]$ η συνάρτηση είναι ↘.

Στο διάστημα $\left[\frac{e}{\alpha},+\infty\right)$ η συνάρτηση είναι ↗.

<u>Ακρότατα</u>: Στο $x=\frac{e}{\alpha}$ η συνάρτηση παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{e}{\alpha}\right)=\frac{a}{e}$ (σημείο Α).

iii. Επειδή στο $x=\frac{e}{\alpha}$ η συνάρτηση παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{e}{\alpha}\right)=\frac{\alpha}{e}$, η ευθεία $y=\frac{\alpha}{e}$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο ελάχιστο Α (σχήμα δίπλα). Επίσης λόγω του ελαχίστου, η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=\frac{\alpha}{e}$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:



$$\int_{\frac{e^2}{\alpha}}^{\frac{e}{\alpha}}\left(f(x)-\frac{\alpha}{e}\right)dx=$$

$$=\int_{\frac{e^2}{\alpha}}^{\frac{e}{\alpha}}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(\alpha x)-\frac{\alpha}{e}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{e^2}{\alpha}}^{\frac{e}{\alpha}}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(\alpha x)\right)dx-\int_{\frac{e^2}{\alpha}}^{\frac{e}{\alpha}}\left(\frac{\alpha}{e}\right)dx$$

Θέτω ln(αx)=u.
Όταν $x=\frac{e}{\alpha}$ τότε u=1
Όταν $x=\frac{e^2}{\alpha}$ τότε u=2
$(\ln(\alpha x))'dx=(u)'du \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx=du$

$$=\int_2^1 u\,du-\frac{\alpha}{e}\int_{\frac{e^2}{\alpha}}^{\frac{e}{\alpha}}(1)dx$$

$$=\left[\frac{u^2}{2}\right]_2^1-\frac{\alpha}{e}[x]_{\frac{e^2}{\alpha}}^{\frac{e}{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{2}-2-\frac{\cancel{\alpha}}{e}\cdot\frac{e-e^2}{\cancel{\alpha}}$$

$$=-\frac{3}{2}-\frac{\cancel{e}(1-e)}{\cancel{e}}$$

$$=-\frac{3}{2}-1+e$$

$$=e-\frac{5}{2}.$$

iv. <u>Οριζόντια ασύμπτωτο</u> έχει νόημα μόνο στο -∞.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(\alpha x)\right)$$

Μορφή 0·(+∞)

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(\alpha x)}{x}\right)$$

Μορφή $\frac{+\infty}{-\infty}$ DLH

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\ln(\alpha x))'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Άρα η ευθεία y=0 (άξονας xx΄) είναι οριζόντια ασύμπτωτος στο -∞.

<u>Πιθανή κατακόρυφος ασύμπτωτη</u> x=0.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(\alpha x)\right)$$

$$=-\infty\cdot(-\infty)$$

$$=+\infty.$$

Άρα η ευθεία x=0 (άξονας yy΄) είναι κατακόρυφος ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

v. Έστω $A_1=\left(-\infty,\frac{e}{\alpha}\right]$ και $A_2=\left[\frac{e}{\alpha},0\right)$.

- $f(A_1) \underset{f \searrow}{=} \left[f\left(\frac{e}{\alpha}\right), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=\left[\frac{\alpha}{e},0\right)$.

  Επειδή $0\notin\left[\frac{\alpha}{e},0\right)$, η εξίσωση f(x)=0 δεν έχει ρίζα στο διάστημα A_1.

- $f(A_2) \underset{f \nearrow}{=} \left[f\left(\frac{e}{\alpha}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[\frac{\alpha}{e},+\infty\right)$.

  Επειδή $0\in\left[\frac{\alpha}{e},+\infty\right)$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα A_2, άρα με τετμημένη μεγαλύτερη από $^e/_\alpha$ και επειδή είναι $\nearrow$ μοναδική.

5) Έστω η συνάρτηση f : IR → IR, δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f^3(x)+2f(x)=x$ (1), για κάθε x ∈ IR.

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

ii. Να δείξετε ότι:

1. $\int_{-1}^{0} f(x)dx > -\frac{1}{4}$.
2. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x)=x^3+2x$, x∈ IR.
3. Η εξίσωση f(x)=1 έχει μοναδική θετική ρίζα.
4. $\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)dx=\alpha f(\alpha)$, για κάθε α>0.

iii. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x^2}$, x>0.

1. Να δείξετε ότι η ασύμπτωτος (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x) στο +∞, είναι η διχοτόμος 1ου-3ου τεταρτημορίου.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την ευθεία (ε), την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) και τις ευθείες x=0 και x=1, ως συνάρτηση του f(1).

Λύση:

i. Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) έχουμε:

$3f^2(x)f'(x)+2f'(x)=1$ (2) ⇔ $f'(x)\left(3f^2(x)+2\right)=1$

⇔ $f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+2}>0$ (3), για κάθε x∈ IR.

Άρα η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) έχουμε:

$6f(x)(f'(x))^2+3f^2(x)f''(x)+2f''(x)=0$ ⇔ $f''(x)(3f^2(x)+2)=-6f(x)(f'(x))^2$

⇔ $f''(x)=-\frac{6f(x)(f'(x))^2}{3f^2(x)+2}$. (4)

Επειδή $3f^2(x)+2>0$ και $6(f'(x))^2 > 0$, για κάθε x∈R, λόγω της (4) έχουμε πρόσ(f΄΄(x))=-πρόσ(f(x)).

Η σχέση (1) για x=0 δίνει $f^3(0)+2f(0)=0$ ⇔ $f(0)\left(f^2(0)+2\right)=0$ ⇔ f(0)=0.

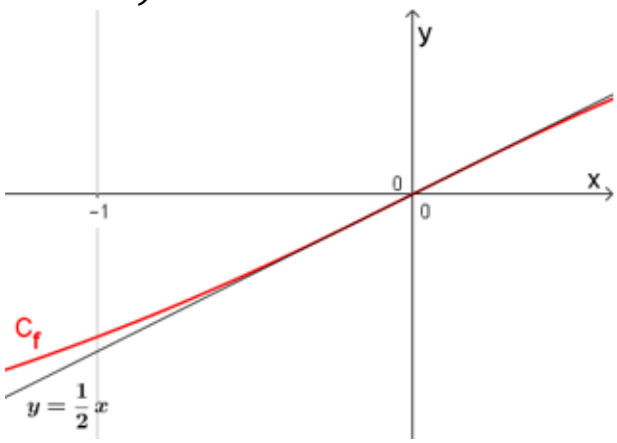
- Για x<0 $\underset{f\ \swarrow}{\Leftrightarrow}$ $f(x) < f(0)$ ⇔ f(x)<0 ⇔ f΄΄(x)>0 και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα (-∞,0].
- Για x>0 $\underset{f\ \swarrow}{\Leftrightarrow}$ $f(x) > f(0)$ ⇔ f(x)>0 ⇔ f΄΄(x)<0 και η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα [0,+∞).
- Επειδή στο x=0 η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο και f΄΄(0)=0, λόγω της (4), η συνάρτηση έχει σημείο καμπής την αρχή των αξόνων O(0,0).

ii.

1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) στο O(0,0) έχει εξίσωση $(\delta)\colon y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Είναι } f(0) = 0 \\ \text{και από τη σχέση (3)} \underset{x=0}{\Leftrightarrow} f'(0) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (\delta)\colon y = \frac{1}{2}x.$$

Επειδή η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι κυρτή στο (-1,0), η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (δ). Βλέπε διπλανό σχήμα.



Άρα για κάθε x∈[-1,0] έχουμε:

$$f(x) > \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx > \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx > \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx \geq -\frac{1}{4}.$$

2. Η σχέση (1) για f(x)=y δίνει $y^3+2y=x$ ⇔ $y^3+2y=f^{-1}(y)$
⇔ $f^{-1}(x)=x^3+2x$.

Επειδή x∈R, από την (1) ⇒ y∈ IR. Άρα η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το IR. Επομένως η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το IR.

3. Επειδή 1∈f(IR)= IR, η εξίσωση f(x)=1 έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο IR και επειδή είναι ↗ μοναδική.
Επειδή f(x)=1>0 και η συνάρτηση f(x)>0 για x>0, η ρίζα x_0 είναι θετική.

4. $\int_0^{\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)dx}$ $= \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{\alpha} uf'(u)du \ldots$ **(παραγ. ολοκλ.)**
$= \cancel{\int_0^{\alpha} f(x)dx} + [uf(u)]_0^{\alpha} - \cancel{\int_0^{\alpha} f(u)du}$
$= \alpha f(\alpha)$.

Θέτω $f^{-1}(x)=u$.
- x=f(u).
- dx=f ΄(u)du
- για x=0 ⇔ $u=f^{-1}(0)=0$.
- για x=f(α) ⇔ $u=f^{-1}(f(\alpha))=\alpha$.

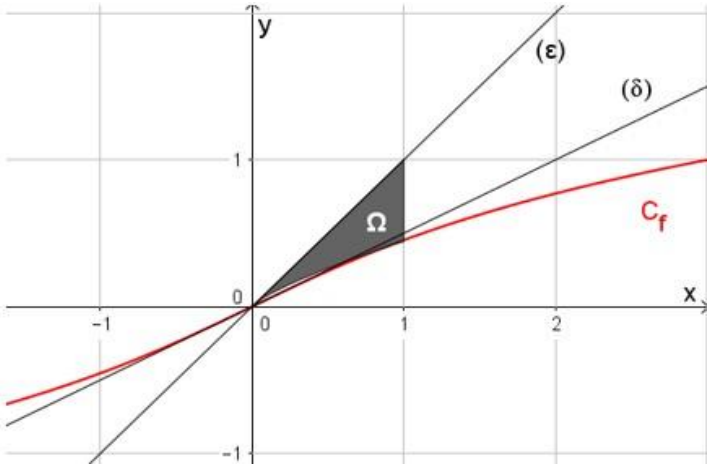
iii. $g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x^2} = \frac{x^3+2x}{x^2} = x + \frac{2}{x}$, x>0.

1. $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = 1+0=1$

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2}{x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$

Άρα η ευθεία (ε): y=λx+β ⇔ y=x (διχοτόμος 1ου-3ου τεταρτημορίου) είναι πλάγια ασύμπτωτος της C_f στο +∞.

2. Επειδή η ευθεία (ε) βρίσκεται πάνω από την ευθεία (δ) και αυτή με τη σειρά της πάνω από την C_f στο [0,1], γιατί η C_f είναι κοίλη στο [0,1], συμπεραίνουμε ότι η ευθεία (ε) βρίσκεται πάνω από την C_f στο [0,1].



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$E(\Omega) = \int_0^1 (x - f(x))dx$

$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x)dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 1f(1) + \int_0^{f(1)} f^{-1}(x)dx$

$= \frac{1}{2} - f(1) + \int_0^{f(1)}(x^3+2x)dx$

$= \frac{1}{2} - f(1) + \left[\frac{x^4}{4}+x^2\right]_0^{f(1)}$

$= \frac{1}{2} - f(1) + \frac{f^4(1)}{4} + f^2(1).$

Λόγω του υποερωτήματος ii4 για α=1

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}-\eta\mu x}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού (0,+∞)

ii. Εάν g ο περιορισμός της f στο διάστημα (0,π/2), να δείξετε ότι η συνάρτηση g έχει τοπικό μέγιστο σε σημείο ξ∈(0,π/2).

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\alpha}{\sqrt{x}-\eta\mu x}$, για τις διάφορες τιμές του α ∈ ℝ.

iv. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $h(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-1+\sigma\upsilon\nu x$.

v. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{x\eta\mu x}{f(x)}\right)dx$.

Λύση:

i. Πρέπει x>0 (1) και $\sqrt{x}-\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq \eta\mu x$

$\Leftrightarrow x \neq \eta\mu^2 x$

$\Leftrightarrow x-\eta\mu^2 x \neq 0$……..(2)

Έστω $\varphi(x)=x-\eta\mu^2 x$, x>0.

$\varphi'(x)=1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2\geq 0$, με $\varphi'(x)=0$ μόνο για $x=\kappa\pi+\pi/4$, κ∈ℤ.

Άρα φ(x) ↗ στο (0,+∞) και επειδή x>0 $\underset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x)>\varphi(0) \Leftrightarrow x-\eta\mu^2 x>0$.

Επομένως η (2) είναι αληθής για κάθε x∈(0,+∞).

Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

ii. $g'(x)=\left(\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}-\eta\mu x}\right)'=\frac{\sigma\upsilon\nu x(\sqrt{x}-\eta\mu x)-\eta\mu x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sigma\upsilon\nu x\right)}{(\sqrt{x}-\eta\mu x)^2}$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sqrt{x}-\cancel{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\eta\mu x}{2\sqrt{x}}+\cancel{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}}{(\sqrt{x}-\eta\mu x)^2}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sqrt{x}-\frac{\eta\mu x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-\eta\mu x)^2}$$

$$=\frac{2x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\eta\mu x)^2}\text{.....(3)}$$

Επειδή η (3) έχει θετικό παρονομαστή, προσ(g΄(x))=προσ(2xσυνx-ημx).
Θέτω σ(x)=2xσυνx-ημx, x∈ ℝ.
σ΄(x)=συνx-2xημx και σ΄΄(x)=-ημx-2xσυνx<0 στο [0,π/2].
Άρα σ΄(x) ↘ στο [0,π/2] οπότε για 0<x<π/2 ⇔ σ΄(0)>σ΄(x)>σ΄(π/2)
⇔ 1>σ΄(x)>-π
και επειδή η σ΄(x) είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, η εξίσωση σ΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο (0,π/2) και επειδή είναι ↘ μοναδική.

- Για $0<x<x_0 \underset{\sigma'\searrow}{\Leftrightarrow} \sigma'(x)>\sigma'(x_0)$ ⇔ σ΄(x)>0, γιατί ρίζα της εξίσωσης σ΄(x)=0.
- Για $x>x_0 \underset{\sigma'\searrow}{\Leftrightarrow} \sigma'(x)<\sigma'(x_0)$ ⇔ σ΄(x)<0, γιατί ρίζα της εξίσωσης σ΄(x)=0.

x	0	x_0	π/2
σ΄(x)	+	0	-
σ(x)	↗		↘
	T.Ε. σ(0)=0	T.Μ. σ(x_0)	T.Ε. σ(π/2)=-1

Επειδή $x_0>0 \underset{\sigma\nearrow}{\Leftrightarrow} \sigma(x_0)>\sigma(0)$ ⇔ σ(x_0)>0. Από τον πίνακα μεταβολών έχουμε:

- σ((0,x_0))=(0,σ(x_0)) άρα σ(x)>0 ⇔ f΄(x)>0 στο διάστημα (0,x_0).
- σ((x_0,π/2))=(-1,σ(x_0)) άρα η εξίσωση σ(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ∈(x_0, π/2).
  - Για $x_0<x<\xi \underset{\sigma\searrow}{\Leftrightarrow} \sigma(x)>\sigma(\xi)$ ⇔ σ(x)>0 ⇔ g΄(x)>0 στο διάστημα (x_0,ξ).
  - Για ξ<x<π/2 $\underset{\sigma\searrow}{\Leftrightarrow} \sigma(x)<\sigma(\xi)$ ⇔ σ(x)<0 ⇔ g΄(x)<0 στο διάστημα (ξ, π/2).

x	0	ξ	π/2
g΄(x)	+	0	-
g(x)	↗		↘
		T.Μ.	

Άρα υπάρχει ξ∈(0, π/2) στο οποίο η συνάρτηση g(x) παρουσιάζει Τ.Μ.

iii. Επειδή για x>0 από το (i) ερώτημα έχουμε x-ημ²x>0 ⇔ $\sqrt{x}-\eta\mu x>0$ (4) και

- για α≠0, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\alpha}{\sqrt{x}-\eta\mu x}\underset{\left(\mu o\rho\varphi\acute{\eta}\ \frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-\alpha)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}-\eta\mu x}$

$$=(-\alpha)\cdot(+\infty)=\begin{cases}-\infty, & \alpha\nu\ \alpha>0\\ +\infty, & \alpha\nu\ \alpha<0\end{cases}.$$

- για α=0, τότε το όριο είναι μορφή 0/0 και εφαρμόζουμε DLH:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)'}{(\sqrt{x}-\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sigma\upsilon\nu x}\right)=\frac{1}{+\infty-1}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

iv. $A_h=(0,+\infty)$.

$$h'(x)=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-1+\sigma\upsilon\nu x\right)'=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\frac{1}{2\sqrt{x}}-\eta\mu x$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-\eta\mu x$$

$$=\sqrt{x}-\eta\mu x>0$$ από τη σχέση (4).

Άρα η συνάρτηση h είναι ↗ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

v. $$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{x\eta\mu x}{f(x)}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{x\eta\mu x}{\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}-\eta\mu x}}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x(\sqrt{x}-\eta\mu x)\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x\cdot h'(x))dx$$ ..... παραγοντική ολοκλήρωση

$$=[xh(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}h(x)dx$$

$$=\pi h(\pi)-\frac{\pi}{2}h\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}h(x)dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-1+\overset{-1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\pi}}-\left(\cancel{\frac{2}{3}\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1+\overset{0}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}}\right)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}h(x)dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-2-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+1-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-1+\sigma\upsilon\nu x\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-1+\sigma\upsilon\nu x\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1-\left[\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-x+\eta\mu x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1-\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-x+\eta\mu x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1-\left[\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}-x+\eta\mu x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1-\left(\frac{2\pi^2\sqrt{\pi}}{5}-\pi+\overset{0}{\cancel{\eta\mu\pi}}\right)+\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{5}-\frac{\pi}{2}+\overset{1}{\cancel{\eta\mu\frac{\pi}{2}}}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\cancel{1}-\frac{2\pi^2\sqrt{\pi}}{5}+\pi+\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{5}-\frac{\pi}{2}+\cancel{1}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{2\pi^2\sqrt{\pi}}{5}+\frac{\pi}{2}+\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{5}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{2\pi^2\sqrt{\pi}}{5}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{10}.$$

7) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1}.

ii. Να βρείτε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης f και της αντίστροφής της f^{-1}.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της αντίστροφης f^{-1} στο $x_0=3$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της αντίστροφης f^{-1}, τον άξονα xx΄ και την ευθεία x=3.

Λύση:

i. $f'(x)=(x^3+x+1)'=3x^2+1>0$, άρα η συνάρτηση f είναι ↗ στο $\mathbb{R}$, άρα είναι «1-1» και αντιστρέφεται.

Επειδή η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική συνάρτηση 3ου (περιττού) βαθμού, έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Άρα $A_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

ii. Επειδή η συνάρτηση f είναι ↗ στο $\mathbb{R}$, $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow x^3+x+1=x$

$\Leftrightarrow x^3+1=0$

$\Leftrightarrow x^3=-1$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{1}$

$\Leftrightarrow x=-1$

(βλέπε σχήμα παρακάτω).

iii. $f(1)=3$ και $f'(1)=4$.

Ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$……..(1)

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)' \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=1$……(2)

Η σχέση (2) για x=1 δίνει $\left(f^{-1}\right)'(f(1))\cdot f'(1)=1$

$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3)\cdot 4=1$

$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{4}$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $y-f^{-1}(3)=\left(f^{-1}\right)'(3)(x-3)$

$\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{4}(x-3)$

$\Leftrightarrow$…

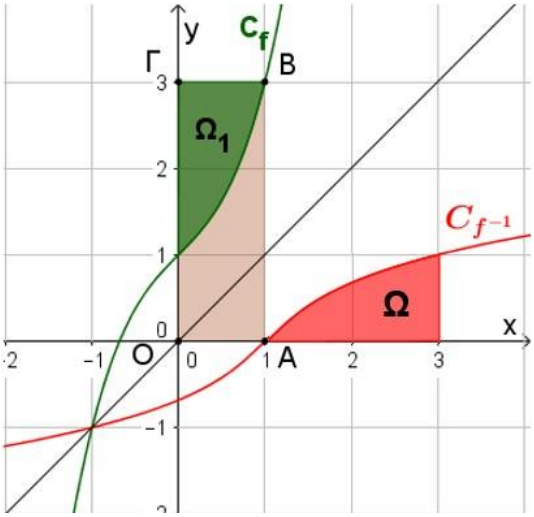
$\Leftrightarrow$ (ε): $x-4y+1=0$.

iv. 1ος τρόπος:

Επειδή f(0)=1 ⇔ $f^{-1}(1)=0$.

f ↗ στο IR ⇔ f^{-1} ↗ στο IR.

Άρα η συνάρτηση f^{-1} τέμνει τον άξονα xx΄ στο x=1.



$E(\Omega)=E(\Omega_1)=(OAB\Gamma)-\int_0^1 f(x)dx$

$= 3 - \int_0^1 (x^3+x+1)dx$

$= 3 - \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$

$= 3 - \left(\frac{1^4}{4}+\frac{1^2}{2}+1\right)$

$= 3 - \frac{7}{4}$

$= \frac{5}{4}$.

2ος τρόπος:

Επειδή f(0)=1 ⇔ $f^{-1}(1)=0$.

f ↗ στο R ⇔ f^{-1} ↗ στο IR.

Άρα η συνάρτηση f^{-1} τέμνει τον άξονα xx΄ στο x=1.

$E(\Omega) = \int_1^3 f^{-1}(x)dx$

$= \int_0^1 uf'(u)du$

$= [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)du$

$= f(1) - \int_0^1 (u^3+u+1)dx$

$= 3 - \left[\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}+u\right]_0^1$

$= 3 - \left(\frac{1^4}{4}+\frac{1^2}{2}+1\right)$

$= 3 - \frac{7}{4}$

$= \frac{5}{4}$.

Θέτω $f^{-1}(x)=u$.
- x=f(u).
- dx=f ΄(u)du
- για x=1 ⇔ $u=f^{-1}(1)=0$.
- για x=3 ⇔ $u=f^{-1}(3)=1$.

Παραγ. Ολοκλ.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=συν^2x$, $x\in[0,\pi/2]$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1}.

ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της αντίστροφης f^{-1} στο $x_0=3/4$, είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+7$.

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι έχει ένα Σ.Κ. που είναι συνευθειακό με τα σημεία Α και Β και ότι το Σ.Κ. είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iv. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο ακριβώς σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία η εφαπτομένες της να είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $y=-\frac{2}{\pi}x+7$.

Λύση:

i. $f(0)=\sigma\upsilon\nu^2 0=1$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\pi/2$.

Άρα τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο $A(\pi/2,0)$ και τον άξονα yy΄ στο σημείο $B(0,1/2)$.

$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x)'= -2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \leq 0$, γιατί για $x\in[0,\pi/2]$, (1ο τεταρτημόριο), $\eta\mu x\geq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x\geq 0$, με $f'(x)=0$, μόνο για $x=0$ και $x=\pi/2$.

Άρα η συνάρτηση f είναι ↘ στο $[0,\pi/2]$, IR, άρα είναι «1-1» και αντιστρέφεται.

$$A_{f^{-1}}=f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\underset{f\searrow}{=}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=[0,1]$$

ii. $f(\pi/6)=\sigma\upsilon\nu^2(\pi/6)=3/4$.

$f'(\pi/6) = -2\eta\mu(\pi/6)\sigma\upsilon\nu(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$……..(1)

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)' \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=1$……(2)

Η σχέση (2) για $x=\pi/6$ δίνει $\left(f^{-1}\right)'(f(\pi/6))\cdot f'(\pi/6)=1$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3/4)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3/4)=-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση (ζ): $y-f^{-1}(3/4)=\left(f^{-1}\right)'(3/4)(x-3/4)$

$$\Leftrightarrow y-\pi/6=-\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\pi/6)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_\zeta=-\frac{2}{\sqrt{3}}\\ \lambda_\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lambda_\zeta\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow (\varepsilon)\perp(\zeta).$$

iii. • <u>Κυρτότητα-Σ.Κ.</u>:

$f''(x)=(-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)'=2\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu^2x=2(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x)$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu^2x=\sigma\upsilon\nu^2x$

$\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ …… γιατί για $x\in[0,\pi/2]$, (1ο τεταρτ.), $\eta\mu x\geq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x\geq 0$.

$\Leftrightarrow x=\pi/4$.

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu^2x>\sigma\upsilon\nu^2x$

$\Leftrightarrow \eta\mu x>\sigma\upsilon\nu x$ …… γιατί για $x\in[0,\pi/2]$, (1ο τεταρτ.), $\eta\mu x\geq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x\geq 0$.

$\Leftrightarrow x>\pi/4$, γιατί η $y=\eta\mu x$ είναι ↗ και η $y=\sigma\upsilon\nu x$ είναι ↘ στο διάστημα $[0,\pi/2]$.

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<\pi/4$.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
f΄΄(x)	-	0	+
f(x)	K.K.		K.A.

Σ.Κ.

Στο διάστημα $[0,\pi/4]$ η συνάρτηση στρέφει τα Κ.Κ.

Στο διάστημα $[\pi/4,\pi/2]$ η συνάρτηση στρέφει τα Κ.Α.

Το σημείο $\Sigma(\pi/4,f(\pi/4))=\Sigma(\pi/4,1/2)$ είναι σημείο καμπής.

• <u>Α, Β, Σ συνευθειακά και Σ μέσο του ΑΒ</u>:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{A\Sigma} &= \frac{y_\Sigma - y_A}{x_\Sigma - x_A} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{\pi}.\\ \lambda_{\Sigma B} &= \frac{y_\Sigma - y_B}{x_\Sigma - x_B} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{\pi}.\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \lambda_{A\Sigma}=\lambda_{\Sigma B} \Leftrightarrow A\Sigma \,//\, \Sigma B$$

και ΣΒ έχουν κοινό σημείο το Σ, ταυτίζονται. Άρα τα σημεία Α, Β και Σ είναι συνευθειακά.

$\frac{x_A+x_B}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = x_\Sigma$ και $\frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1}{2} = y_\Sigma$.

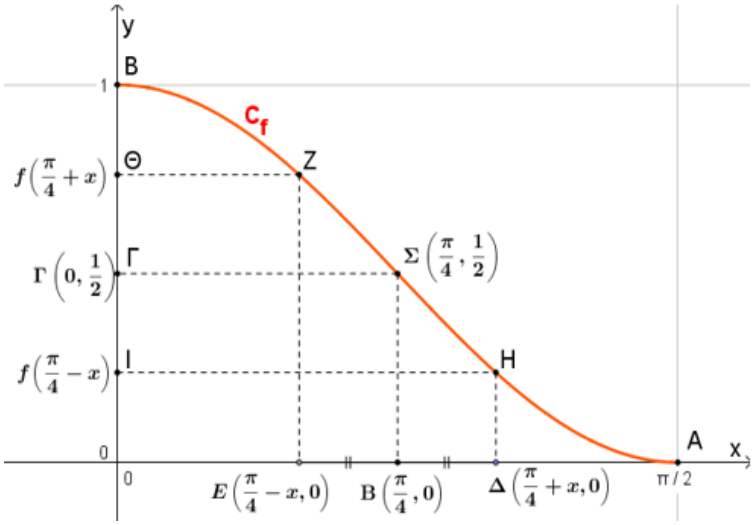
Άρα το Σ είναι μέσο του ΑΒ.

• <u>Κέντρο συμμετρίας</u>:

Έστω Δ και Ε δυο σημεία του άξονα xx΄ που απέχουν από το Β($^\pi/_4$,0) απόσταση x.

Δηλαδή Δ($^\pi/_4$+x,0) και Ε($^\pi/_4$-x,0).

Εάν Ι και Θ είναι οι αντίστοιχες εικόνες τους μέσω της συνάρτησης f, αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο Γ(0,$^1/_2$) είναι μέσο του τμήματος ΘΙ (διπλανό σχήμα):



Δηλαδή $\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{2} = \frac{1}{2}$ ή

$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1.$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) &= \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\\ &= \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\eta\mu^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]\\ &= \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-x\right)\\ &= \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

iv. Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για τη συνάρτηση f στα διαστήματα [0,$^\pi/_4$] και [$^\pi/_4$,$^\pi/_2$].
Προφανώς η f είναι συνεχής στα διαστήματα [0,$^\pi/_4$], [$^\pi/_4$,$^\pi/_2$] και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (0,$^\pi/_4$) και ($^\pi/_4$,$^\pi/_2$).

Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(0,{}^\pi/_4)$ και $\xi_2\in({}^\pi/_4,{}^\pi/_2)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{4}-0} = -\frac{2}{\pi} = \lambda_\eta$

και $f'(\xi_2) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} = \ldots = -\frac{2}{\pi} = \lambda_\eta$.

Άρα οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στις θέσεις ξ_1 και ξ_2 είναι παράλληλες στην ευθεία (η).

Επειδή η συνάρτηση f΄ είναι ↘ στο διάστημα [0,$^\pi/_4$], και ↗ στο διάστημα [$^\pi/_4$,$^\pi/_2$], τα ξ_1 και ξ_2 είναι μοναδικά.

9) Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}$, x∈(-π/2,π/2).

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1}.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα Σ.Κ. που είναι και κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

iii. Να δείξετε ότι $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2x^2+2x+1}$, για κάθε x∈(-π/2,π/2).

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x) και τους άξονες.

Λύση:

i. $f'(x)=\left(\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}\right)'=\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$. Άρα η συνάρτηση f είναι ↗ στο διάστημα (-π/2,π/2), επομένως είναι «1-1» και αντιστρέφεται.

$$A_{f^{-1}}=f\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\underset{f\nearrow}{=}\left(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=(-\infty,+\infty).$$

ii. $f''(x)=\left(\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)'=\ldots=\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu^3 x}$.

● f´´(x)=0 ⇔ ημx=0 ⇔ x=0.

● x∈(-π/2,0). Είναι ημx<0 και συνx>0, (4ο τεταρτημόριο), άρα f´´(x)<0 και η συνάρτηση στρέφει τα Κ.Κ. στο διάστημα (-π/2,0).

● x∈(0,π/2). Είναι ημx>0 και συνx>0, (1ο τεταρτημόριο), άρα f´´(x)>0 και η συνάρτηση στρέφει τα Κ.Α. στο διάστημα (-π/2,0).

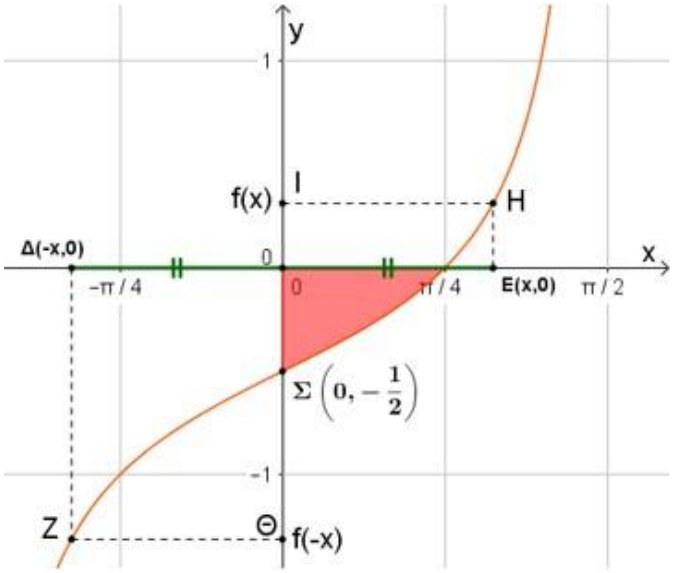
Άρα στο x=0 έχει Σ.Κ. το σημείο Σ(0,f(0))=$\Sigma\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

<u>Συμμετρία</u>:

Έστω Δ και Ε δυο σημεία του άξονα xx΄ που απέχουν από το $\Sigma\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ απόσταση x.

Δηλαδή Δ(-x,0) και Ε(x,0).

Εάν Θ και Ι είναι οι αντίστοιχες εικόνες τους μέσω της συνάρτησης f, αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο Σ είναι μέσο του τμήματος ΘΙ (διπλανό σχήμα):



Δηλαδή $\frac{f(-x)+f(x)}{\cancel{2}}=-\frac{1}{\cancel{2}}$

ή $f(-x)+f(x)$=-1.

$$f(-x)+f(x)=\frac{\varepsilon\varphi(-x)-1}{2}+\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}$$
$$=\frac{-\varepsilon\varphi x-1}{2}+\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}$$
$$=\frac{\cancel{-\varepsilon\varphi x}-1+\cancel{\varepsilon\varphi x}-1}{2}$$
$$=\frac{-2}{2}=-1.$$

iii. Ισχύει $f^{-1}(f(x))$=x……..(1)

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)' \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}=1$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}\right)=\frac{2}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

Θέτω $\omega=\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}$.
Τότε εφx=2ω+1

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(\omega)=\frac{2}{1+(2\omega+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(\omega)=\frac{2}{1+4\omega^2+4\omega+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(\omega)=\frac{2}{4\omega^2+4\omega+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(\omega)=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(2\omega^2+2\omega+1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(\omega)=\frac{1}{2\omega^2+2\omega+1}$$

και θέτοντας όπου ω το x έχουμε $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{2x^2+2x+1}$.

iv. Η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία ($^{\pi}/_4$,0) και Σ(0,-$^1/_2$), (βλέπε σχήμα προηγούμενη σελίδα).

Για $x\in(0,{}^{\pi}/_4)$, $0\le x\le \pi/4 \underset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0)\le f(x)\le f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow -{}^1/_2\le f(x)\le 0$.

Άρα $E(\Omega)=\int_0^{\pi/4}|f(x)|dx$

$$=-\int_0^{\pi/4} f(x)dx$$

$$=-\int_0^{\pi/4}\frac{\varepsilon\varphi x-1}{2}dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\varepsilon\varphi x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi x dx$$

$$=\frac{1}{2}[x]_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\eta\mu x dx$$

Θέτω συνx=u.
- -ημxdx=du ⇔ ημxdx=-du
- για x=0 ⇔ u=συν0^0=1.
- για x=$^{\pi}/_4$ ⇔ u=συν$^{\pi}/_4$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{u}du$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}[\ln u]_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln x$, x>0.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1}.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μοναδικό σημείο καμπής στη θέση x_0 και ότι $f'(x)\ge\frac{x_0+1}{x_0^2}$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_0}$, $x\ge x_0$, όπου x_0 η θέση του Σ.Κ. του (ii) ερωτήματος. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη στη θέση x_0.

iv. Να δείξετε ότι $\frac{f(x_0)+f(\alpha)}{2} > f\left(\frac{x_0+a}{2}\right)$, για κάθε α>$x_0$.

Λύση:

i. $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, ……(1)

$f''(x)= e^x-\frac{1}{x^2}$,……..(2)

$f'''(x)= e^x+\frac{2}{x^3}>0$, για κάθε x>0.

Άρα f΄΄ ↗ στο διάστημα (0,+∞).

$f''((0,+\infty)) \underset{f''\nearrow}{=} \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

ii. Επειδή $0\in f''((0,+\infty))$, η εξίσωση f΄΄(x)=0, έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(0,+\infty)$ και επειδή f΄΄ ↗, μοναδική.

- Για $0<x\le x_0 \underset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)\le f''(x_0)$

  ⇔ f΄΄(x)≤0, γιατί x_0 ρίζα της εξίσωσης f΄΄(x)=0.

- Για $x\ge x_0 \underset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)\ge f''(x_0)$

  ⇔ f΄΄(x)≥0.

x	0	x_0	+∞
f΄΄(x)	-	0	+
f΄(x)	↘		↗

O.E.

Στο x_0 η f΄ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $f'(x_0) \underset{(1)}{=} e^{x_0}+\frac{1}{x_0}$……..(3)

$f''(x_0)=0 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} e^{x_0}-\frac{1}{x_0{}^2}=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=\frac{1}{x_0{}^2}$……..(4)

$(3) \underset{(4)}{\Leftrightarrow} f'(x_0)=\frac{1}{x_0{}^2}+\frac{1}{x_0}$ ……..(5)

Επειδή στο x_0 η f΄ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, $f'(x)\ge f'(x_0) \underset{(5)}{\Leftrightarrow} f'(x)\ge\frac{1}{x_0{}^2}+\frac{1}{x_0}$….(6)

iii. $g'(x)=\left(lnx-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_0}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

$g''(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}<0$ για $x\ge x_0>0$.

Άρα g΄(x) ↘ στο διάστημα $[x_0, +\infty)$.

Για $x\ge x_0 \underset{g'\searrow}{\Leftrightarrow} g'(x)\le g'(x_0) \Leftrightarrow g'(x)\le\frac{1}{x_0{}^2}+\frac{1}{x_0}$…(7)

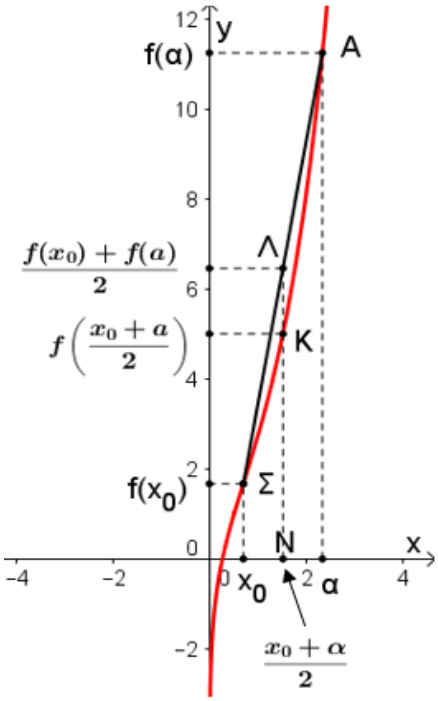
Για να έχουν κοινή εφαπτομένη, πρέπει f΄(x)=g΄(x) η οποία λόγω των σχέσεων (6) και (7) έχει μοναδική λύση $x=x_0$.

Επίσης $g(x_0) = \ln x_0 - \cancel{\frac{1}{x_0}} + \frac{1}{x_0^2} + \cancel{\frac{1}{x_0}}$

$= \ln x_0 + e^{x_0}$…λόγω της σχέσης (4)

$= f(x_0)$.

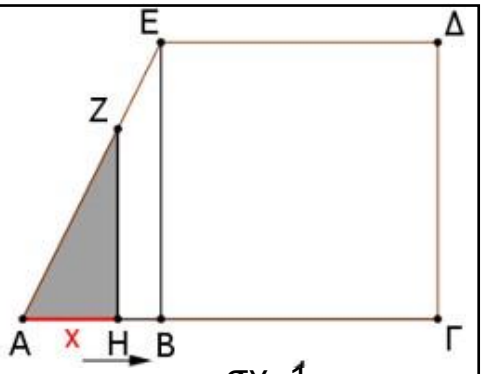
Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη στη θέση x_0.



iv. Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(x_0,+\infty)$, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΣ (βλέπε διπλανό σχήμα), βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Άρα εάν από το μέσο N του τμήματος με άκρα $(x_0,0)$, $(\alpha,0)$ – άρα $x_N=\frac{x_0+\alpha}{2}$ – φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα xx΄, τότε αυτή τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο Κ και το τμήμα ΑΣ στο μέσο του Λ, και το Λ βρίσκεται πάνω από το Κ.

Άρα $\frac{f(x_0)+f(\alpha)}{2} > f\left(\frac{x_0+a}{2}\right)$.

11) Στο διπλανό σχήμα είναι (ΑΒ)=α, (ΒΓ)=2α και (ΓΔ)=β με α>0 και β>0.



σχ. 1

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου εμβαδού χωρίου, συναρτήσει του (ΑΗ)=x, όταν το σημείο Η διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=\begin{cases}\frac{\beta}{2\alpha}x^2, & \alpha\nu\ 0\le x\le a\\ \frac{(2x-\alpha)\beta}{2}, & \alpha\nu\ \alpha<x\le 3\alpha\end{cases}.$$

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση Ε(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, για κάθε α, $\beta\in\mathbb{R}_+^*$.

iii. Να βρείτε τις τιμές των α>0 και β>0, έτσι ώστε η ευθεία (ε): $y=x-\frac{1}{2}$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης Ε στο σημείο της $M\left(\frac{\alpha}{2},E\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

Για α=β=2.

iv. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $[0,6]\to\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι f΄(x)=E(x) για κάθε $x\in[0,6]$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Ν(2,0).

Λύση:

i. • $0\le x\le\alpha$. Τότε το Η βρίσκεται μεταξύ Α και Β (σχ. 1) και το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΗΖ.

Τα τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΒΕ είναι όμοια. Άρα $\frac{(AH)}{(AB)}=\frac{(HZ)}{(BE)}\Leftrightarrow\frac{x}{\alpha}=\frac{(HZ)}{\beta}\Leftrightarrow$ (HZ) = $\frac{\beta}{\alpha}x$.

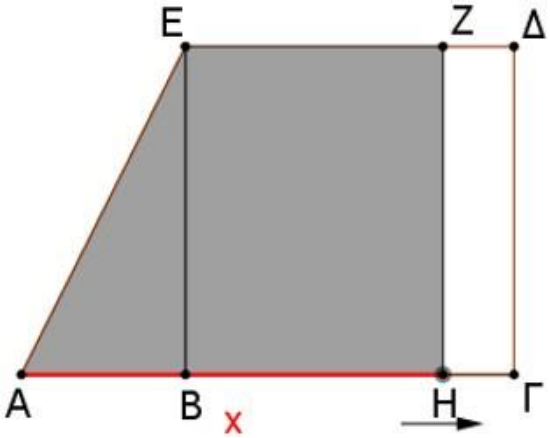
E(x) = $\frac{1}{2}$(AH)·(HZ) = $\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\beta}{\alpha}x=\frac{\beta}{2\alpha}x^2$.

• $\alpha\le x\le 3\alpha$. Τότε το Η βρίσκεται μεταξύ Β και Γ (σχ. 2) και το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΗΖΕ.

(ΕΖ)=(ΒΗ)=(ΑΗ)-(ΑΒ)=x-α.

E(x) = $\frac{(AH)+(EZ)}{2}\cdot$(EB) = $\frac{x+x-\alpha}{2}\cdot\beta$

$=\frac{(2x-\alpha)\beta}{2}$.



σχ. 2

Άρα $E(x)=\begin{cases}\frac{\beta}{2\alpha}x^2, & \alpha\nu\ 0\le x\le a\\ \frac{(2x-\alpha)\beta}{2}, & \alpha\nu\ \alpha<x\le 3\alpha\end{cases}$.

ii. Συνέχεια:

- Στα διαστήματα [0,α) και (α,3α] η συνάρτηση Ε είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο x=α:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha^-} E(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^-}\left(\frac{\beta}{2\alpha}x^2\right)=\frac{\beta}{2\alpha}\alpha^2=\frac{\alpha\beta}{2}.\\ \lim\limits_{x\to\alpha^+} E(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{(2x-\alpha)\beta}{2}=\frac{(2\alpha-\alpha)\beta}{2}=\frac{\alpha\beta}{2}.\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} E(x)=\frac{\alpha\beta}{2}=E(\alpha).$$

Άρα είναι συνεχής στο διάστημα [α,3α].

<u>Παραγωγισιμότητα</u>:

- Στο διάστημα [0,α) η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη με $E'(x)=\left(\frac{\beta}{2\alpha}x^2\right)'=\frac{\beta x}{\alpha}$.
- Στο διάστημα (α,3α] η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη με $E'(x)=\left(\frac{(2x-\alpha)\beta}{2}\right)'=\beta$.
- Στο x=α:

$$\lim_{x\to\alpha^-}\frac{E(x)-E(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{\frac{\beta}{2\alpha}x^2-\frac{\alpha\beta}{2}}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{\beta x^2-\beta\alpha^2}{2\alpha(x-\alpha)}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{\beta\cancel{(x-\alpha)}(x+\alpha)}{2\alpha\cancel{(x-\alpha)}}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{\beta(x+\alpha)}{2\alpha}=\beta.$$

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{E(x)-E(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{\frac{(2x-\alpha)\beta}{2}-\frac{\alpha\beta}{2}}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{2x\beta-2\alpha\beta}{2(x-\alpha)}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{\cancel{2}\beta\cancel{(x-\alpha)}}{\cancel{2}\cancel{(x-\alpha)}}=\beta.$$

Άρα η συνάρτηση Ε παραγωγίζεται στο x=α και είναι $E'(\alpha)=\beta$.

Επομένως η συνάρτηση Ε παραγωγίζεται στο διάστημα [α,3α] και είναι:

$$E'(x)=\begin{cases}\frac{\beta x}{\alpha}, & \alpha\nu\ 0\le x\le\alpha\\ \beta, & \alpha\nu\ \alpha<x\le 3\alpha\end{cases}.$$

iii. $E'\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\beta}{2}=1 \Leftrightarrow \beta=2.$

$E\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{2}{2\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{4}=\frac{\alpha}{4}.$

Άρα $M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{4}\right)$.

$M\in(\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=2.$

iv. Για α=β=2, $E(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & \alpha\nu\ 0\le x\le 2\\ 2x-2, & \alpha\nu\ 2<x\le 6\end{cases}.$

Επειδή f΄(x)=E(x) $\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{6}+c_1, & \alpha\nu\ 0\le x\le 2\\ x^2-2x+c_2, & \alpha\nu\ 2<x\le 6\end{cases}.$

$N(2,0)\in C_f \Leftrightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow \frac{2^3}{6}+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=-\frac{8}{6}.$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα συνεχής και στο x=2.

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2) \Leftrightarrow \lim_{x\to2^-}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{8}{6}\right)=\lim_{x\to2^+}(x^2-2x+c_2)$$
$$\Leftrightarrow c_2=0.$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{6}-\frac{8}{6}, & \alpha\nu\ 0\le x\le 2\\ x^2-2x, & \alpha\nu\ 2<x\le 6\end{cases}.$

Παραγωγισιμότητα στο x=2:

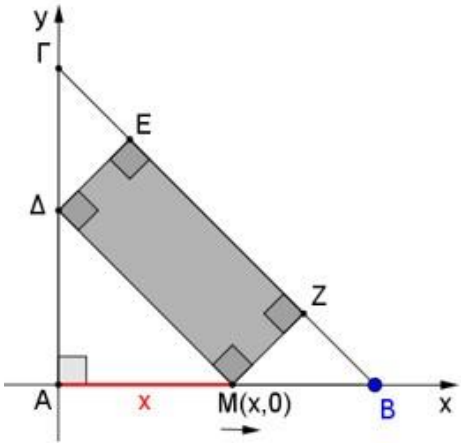
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{x^3}{6}-\frac{8}{6}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{6(x-2)}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{(x^3-8)'}{(6x-12)'}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2}{6}=2.$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{DLH}{\cancel{2(x-2)}}}{\cancel{x-2}}=2.$$

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο x=2 και είναι Ε΄(2)=2.

Επομένως η συνάρτηση Ε παραγωγίζεται στο διάστημα [2,6], οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{6}-\frac{8}{6}, & \alpha\nu\ 0\le x\le 2\\ x^2-2x, & \alpha\nu\ 2<x\le 6\end{cases}$..

12) Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Οxy δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με την κορυφή του Α στην αρχή Ο, τις κάθετες πλευρές του πάνω στους θετικούς ημιάξονες και υποτείνουσα μήκους 40 μονάδες (διπλανό σχήμα).



i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.

ii. Σημείο Μ(x,0) διαγράφει την πλευρά ΑΒ. Με αρχή το σημείο Μ, εγγράφουμε στο τρίγωνο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΔΕΖΜ, με ΜΔ//ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΔΕΖΜ, δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=20x\sqrt{2}-x^2$, $0\le x\le 20\sqrt{2}$.

iii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο όταν το Μ είναι μέσον του ΑΒ και ότι δεν υπερβαίνει το μισό εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

iv. Εάν το σημείο Μ κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα 2 μονάδες/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε, όταν το Μ διέρχεται από τη θέση $M(15\sqrt{2},0)$.

Λύση:

i. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ βρίσκουμε $(AB)=(A\Gamma)=\frac{(B\Gamma)\sqrt{2}}{2}=\frac{40\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{2}$.

Άρα $B(20\sqrt{2},0)$ και $\Gamma(0,20\sqrt{2})$.

ii. $(MB)=(\Gamma\Delta)=20\sqrt{2}-x$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\widehat{AM\Delta}=45^0$, οπότε ορθογώνια και ισοσκελή θα είναι και τα τρίγωνα ΜΖΒ, ΓΔΕ και ΑΜΔ. Με Πυθαγόρειο θεώρημα και σε αυτά, βρίσκουμε:

$(MZ)=(ZB)=(\Delta E)=(E\Gamma)=(MB)\frac{\sqrt{2}}{2}=(20\sqrt{2}-x)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$(M\Delta)=(EZ)=x\sqrt{2}$.

$E(x)=(MZ)\cdot(M\Delta)=(20\sqrt{2}-x)\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\sqrt{2}$

$=20x\sqrt{2}-x^2$

με $x_A\le x\le x_B \Leftrightarrow 0\le x\le 20\sqrt{2}$.

iii. $E'(x)=(20x\sqrt{2}-x^2)'=20\sqrt{2}-2x$.

E΄(x)=0 ⇔ x=$10\sqrt{2}$.

x	0		$10\sqrt{2}$		$20\sqrt{2}$
E΄(x)		+	0	-	
E(x)		↗	O.M.	↘	

Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο όταν x=$10\sqrt{2}=\frac{20\sqrt{2}}{2}=\frac{(AB)}{2}$ άρα το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

E($10\sqrt{2}$)= 20· $10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-(10\sqrt{2})^2$=200 τετρ. Μον.

Άρα E(x)≤200 τετρ. Μον.

(ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}$(ΑΒ)(ΑΓ)= $\frac{1}{2}\cdot 20\sqrt{2}\cdot 20\sqrt{2}$=400 τετρ. Μον.

Επομένως το εμβαδόν Ε, δεν υπερβαίνει το μισό εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

iv. $x_0(t)=15\sqrt{2}$ μονάδες, x΄(t)=x_0΄(t)=-2 μονάδες/sec.

E(x(t))=$20x(t)\sqrt{2}$ −x(t)^2.

E΄(x(t))=$20x'(t)\sqrt{2}-2$x(t)·x΄(t) που για x(t)=x(t) γίνεται:

E΄(x_0(t)) = $20x_0'(t)\sqrt{2}-2x_0(t)\cdot x_0'(t)$

= - $40\sqrt{2}+60\sqrt{2}$

= $20\sqrt{2}$ τετρ. μονάδες/sec.

13) Δίνεται η συνάρτηση f (x) = x−$\frac{1}{x}$ −2lnx, x>0.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,+∞) και να λυθεί η εξίσωση lnx=$\frac{x^2-1}{x}$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $x^x-\frac{1}{x^x}+2x-2>2xlnx+\frac{e^{2x-2}-1}{e^{x-1}}$ στο διάστημα (0,+∞).

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\cdot e^{f(x)+2lnx}}{x^2-1}\right]$.

iv. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, που τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο 2ln4-6 και το σημείο επαφής έχει τετμημένη μεταξύ 0 και 1.

Λύση:

i. f΄(x)=1+$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2+1-2x}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$≥0, για κάθε x>0.

Άρα η συνάρτηση είναι ↗ στο διάστημα (0,+∞).

lnx=$\frac{x^2-1}{2x}$ ⇔ 2lnx=x−$\frac{1}{x}$

⇔ x−$\frac{1}{x}$ −2lnx=0

⇔ f(x)=0

⇔ f(x)=f(1)

$\underset{\substack{f\nearrow \\ \text{άρα } 1-1}}{\Leftrightarrow}$ $x=1$.

ii. $x^x-\frac{1}{x^x}+2x-2>2xlnx+\frac{e^{2x-2}-1}{e^{x-1}}$ ⇔ $x^x-\frac{1}{x^x}+2(x-1)>2lnx^x+\frac{e^{2x-2}}{e^{x-1}}-\frac{1}{e^{x-1}}$

$\Leftrightarrow x^x - \frac{1}{x^x} - 2lnx^x > e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} - 2(x-1)$

$\Leftrightarrow x^x - \frac{1}{x^x} - 2lnx^x > e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} - 2lne^{x-1}$

$\Leftrightarrow f(x^x) > f(e^{x-1})$

$\underset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \quad x^x > e^{x-1}$

$\Leftrightarrow \ln(x^x) > \ln e^{x-1}$

$\Leftrightarrow x\ln x > x-1$

$\Leftrightarrow 1-x+x\ln x > 0$……(1)

Έστω $g(x)=1-x+x\ln x$, $x>0$.

Τότε $g'(x)=\ln x$.

x	0	$10\sqrt{2}$	$20\sqrt{2}$
g´(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗

Ο.Ε.

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $g(1)=0$.

Άρα $g(x)\geq g(1) \Leftrightarrow 1-x+x\ln x\geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα (1) $\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\cdot e^{f(x)+2lnx}}{x^2-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\cdot e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x\cdot e^{x-\frac{1}{x}}}{(x+1)(x-1)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x-1}$

$= 1\cdot(+\infty)$

$=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x-1} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\ DLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)'}{(x-1)'}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-\frac{1}{x}}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)'\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$=+\infty(1+0)$

$=+\infty$.

iv. Εάν $(x_0,f(x_0))$, $0<x_0<1$, είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$……(2)

- $f(x_0)=x_0-\frac{1}{x_0}-2\ln x_0$.

• $f'(x_0)=1+\frac{1}{x_0^2}-\frac{2}{x_0}$, οπότε η (2) γίνεται $y-x_0+\frac{1}{x_0}+2\ln x_0=\left(1+\frac{1}{x_0^2}-\frac{2}{x_0}\right)(x-x_0)$…(3)

Η (3) για x=0 και y=2ln4-6 δίνει $2\ln4-6-x_0+\frac{1}{x_0}+2\ln x_0=-x_0\left(1+\frac{1}{x_0^2}-\frac{2}{x_0}\right)$

$\Leftrightarrow 2\ln4-6-\cancel{x_0}+\frac{1}{x_0}+2\ln x_0=-\cancel{x_0}-\frac{1}{x_0}+2$

$\Leftrightarrow 2\ln4-8+\frac{2}{x_0}+2\ln x_0=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0}+\ln x_0=4-\ln4$ ……....(4)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,1)$.

$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}<0$ γιατί $0<x<1$.

Άρα h ↘ στο διάστημα (0,1) επομένως «1-1».

(4) $\Leftrightarrow h(x_0)=h(1/4) \underset{h\ "1-1"}{\Leftrightarrow} x_0=\frac{1}{4}$.

Η (3) για $x_0=\frac{1}{4}$ γίνεται (ε): y=9x+2ln4-6.

14) Δίνεται η συνάρτηση f : IR → IR, με f(0)=2.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^3)-2}{x^2}$ και να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f^3(2x)-8}{x}=24\cdot f'(0)$.

ii. Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x)-6f(x)=x^2-8$ (1), για κάθε $x\in$ IR, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sqrt{9x^2+9}=9-3\alpha$, $\alpha\in$IR.

iv. Έστω A το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα yy΄, M(x,f(x)) τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με x>0 και N η προβολή του M στον άξονα xx΄. Εάν το M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, έτσι ώστε η τετμημένη του x να κινείται με ταχύτητα 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN, όταν το σημείο M βρίσκεται στη θέση $M(4\sqrt{3},-4)$.

Λύση:

i. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^3)-2}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(f(x^3)-2)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x^3)\cdot(x^3)'}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x^3)\cdot3x^2}{2x}$

$=\frac{3}{2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(f'(x^3)\cdot x\right)$

$=\frac{3}{2}\cdot f'(0)\cdot0$

$=\frac{3}{2}\cdot\kappa\cdot0$

$=0$.

Επειδή f παραγωγίσιμη, f ΄(0)=κ∈R.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^3(2x)-8}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(f^3(2x)-8\right)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(3f^2(2x)\cdot\left(f(2x)\right)'\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(3f^2(2x)\cdot f'(2x)\cdot(2x)'\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(6f^2(2x)\cdot f'(2x)\right)$$

$$= 6f^2(0)\cdot f'(0)$$

$$= 24f'(0).$$

ii. (1) $\Leftrightarrow$ $f^2(x)-6f(x)=x^2-8$ $\Leftrightarrow$ $f^2(x)-6f(x)+9=x^2+1$

$\Leftrightarrow$ $(f(x)-3)^2=x^2+1$……...(2)

Θέτω $g(x)=f(x)-3$, $x\in\mathbb{R}$.

(2) $\Leftrightarrow$ $g^2(x)=x^2+1$……(3)

Εάν $g(x)=0 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} x^2+1=0$ αδύνατη.

Άρα $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $g(0)=f(0)-3=2-3=-1<0$, είναι $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε (4) $\Leftrightarrow$ $g(x)=-\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow$ $f(x)-3=-\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=3-\sqrt{x^2+1}$.

iii. Παραγωγίζοντας την (1) βρίσκουμε $2f(x)f'(x)-6f'(x)=2x$…..(4)

(4) $\underset{x=0}{\Leftrightarrow}$ $2f(0)f'(0)-6f'(0)=0$ $\Leftrightarrow$ $4f'(0)-6f'(0)=0$

$\Leftrightarrow$ $-2f'(0)=0$

$\Leftrightarrow$ $f'(0)=0$.

$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

- $f'(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ και $f'(x)>0$ $\Leftrightarrow$ $x<0$,

  $f'(x)<0$ $\Leftrightarrow$ $x>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f´(x)	+	0	-
f(x)	↗	O.M.	↘

<u>Σύνολο τιμών</u>:

- $f\big((-\infty,0]\big) \underset{f\ \nearrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ f(0)\right]=(-\infty,2]$.
- $f\big([0,+\infty)\big) \underset{f\ \searrow}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ f(0)\right]=(-\infty,2]$.

Άρα $f(R)=(-\infty,2]\cup(-\infty,2]=(-\infty,2]$.

<u>Εξίσωση</u>:

$\sqrt{9x^2+9}=9-3\alpha$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+1}=3-\alpha$

$\Leftrightarrow$ $3-\sqrt{x^2+1}=\alpha$

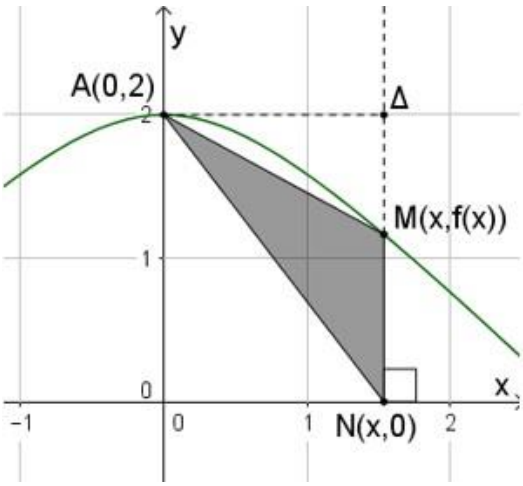
$\Leftrightarrow$ $f(x)=\alpha$……(5)

- Εάν α<2, τότε επειδή $\alpha\in f((-\infty,0])=(-\infty,2]$ και $\alpha\in f([0,+\infty))=(-\infty,2]$, η εξίσωση (5) έχει δυο τουλάχιστον ρίζες, μια στο διάστημα $(-\infty,0]$ και μια στο $[0,+\infty)$ και επειδή στα διαστήματα αυτά είναι μονότονη, είναι μοναδικές.
- Εάν α=2, τότε η εξίσωση (5) έχει μοναδική ρίζα x=0.
- Εάν α>2, τότε επειδή $\alpha\notin f((-\infty,0])$ και $\alpha\notin f([0,+\infty))$, η εξίσωση (5) είναι αδύνατη.

iv. Είναι N(x,0) και $(AMN)=\frac{1}{2}\cdot(MN)\cdot(A\Delta)$ ……(διπλανό σχήμα)

$$=\frac{1}{2}\cdot|f(x)|\cdot x$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-3\right).$$



γιατί όταν $x=4\sqrt{3}>2\sqrt{2}$, x>0 και $f(x)<f(2\sqrt{2})=0$, αφού στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι ↘.

Άρα $E(x(t))=\frac{x(t)}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2(t)+1}-3\right)$.

$$E'(x(t))=\frac{x'(t)}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2(t)+1}-3\right)+\frac{x(t)}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2(t)+1}-3\right)'$$

$$=\frac{x'(t)}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2(t)+1}-3\right)+\frac{x(t)}{2}\cdot\frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+1}}$$

$$=\frac{x'(t)}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2(t)+1}-3\right)+\frac{x^2(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+1}}\text{.....(6)}$$

Η (6) για $x(t_0)=4\sqrt{3}$ και $x'(t_0)=4$ δίνει

$$E'(x(t_0))=\frac{x'(t_0)}{2}\cdot\left(\sqrt{x^2(t_0)+1}-3\right)+\frac{x^2(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+1}}$$

$$=\frac{4}{2}(7-3)+\frac{48\cdot4}{7}$$

$$=8+\frac{192}{7}$$

$$=\frac{248}{7}\ \text{cm}^2/\text{sec}.$$

15) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : IR → IR για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=14e.$ (1)
- $f'(x)=f(x)+2e^x$ (2), για κάθε $x\in$IR.

i. Να δείξετε ότι f΄(1)=7e.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Έστω $f(x)=(2x+3)e^x$, $x\in$IR.

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv. Να βρείτε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

v. Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη στιγμή t=0 από ένα σημείο $A(x_0,f(x_0))$, με $x_0\geq-7/2$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=f(x), με $x\geq x_0$, και x=x(t), y=y(t), $t\geq0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y(t) του σημείου M, είναι πενταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης x(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$, για κάθε $t\geq0$.

Λύση:

i. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=14e \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}=14e$

Προσθαφαιρούμε το f(1)

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h)}{h}=14e$

$\Leftrightarrow f'(1)+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h)}{h}=14e$

Θέτω u = -h.
Τότε h = - u και
$\lim\limits_{h\to 0} u=\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0.$

$\Leftrightarrow f'(1)+\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(1)-f(1+u)}{-u}=14e$

$\Leftrightarrow f'(1)+\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=14e$

$\Leftrightarrow f'(1)+f'(1)=14e$

$\Leftrightarrow 2f'(1)=14e$

$\Leftrightarrow f'(1)=7e.$

ii. (2) $\underset{x=1}{\Leftrightarrow} f'(1)=f(1)+2e \Leftrightarrow 7e=f(1)+2e$

$\Leftrightarrow f(1)=5e.$

$f'(x)=f(x)+2e^x \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2e^x$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με e^x.

$\Leftrightarrow e^x f'(x)-e^x f(x)=2e^{2x}$

$\Leftrightarrow \frac{e^x f'(x)-e^x f(x)}{e^{2x}}=2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=(2x)'$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x}=2x+c$ ……(3)

Η (3) για x=1 δίνει c=3.

Άρα $\frac{f(x)}{e^x}=2x+3 \Leftrightarrow f(x)=(2x+3)e^x$, $x\in R$.

iii. $f'(x)=2e^x+(2x+3)e^x=(2x+5)e^x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-5/2$.

x	$-\infty$	$-5/2$	$+\infty$
f´(x)	-	0	+
f(x)	↘	O.E.	↗

Μονοτονία:

• Στο διάστημα $(-\infty,-5/2]$ η συνάρτηση είναι ↘ και στο διάστημα $[-5/2,+\infty)$ είναι ↗.

Ακρότατα: Στο $x=-5/2$ η συνάρτηση έχει Ο.Ε. το $f(-5/2)=-2e^{-5/2}$.

iv. $f''(x)=2e^x+(2x+5)e^x=(2x+7)e^x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-7/2$.

x	$-\infty$	$-7/2$	$+\infty$
f´´(x)	-	0	+
f´(x)	↘	O.E.	↗

Η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης, όταν $x=-7/2$ στο σημείο $M(-7/2,f(-7/2))$ ή $M(-7/2, -4e^{-5/2})$.

v. $y(t)=(2x(t)+3)e^{x(t)}$.

$y'(t)=2x'(t)e^{x(t)}+(2x(t)+3)e^{x(t)}\cdot x'(t) \Leftrightarrow$

$y'(t)=x'(t)e^{x(t)}(2x(t)+5)$……(4)

Επειδή $y'(t)=5x'(t)$, η σχέση (4) γίνεται $5\cancel{x'(t)}=\cancel{x'(t)}e^{x(t)}(2x(t)+5)$

$\Leftrightarrow 5=e^{x(t)}(2x(t)+5)$……(5)

Προφανής ρίζα της (5), x(t)=0 και επειδή η συνάρτηση $h(t)=e^{x(t)}(2x(t)+5)$ είναι ↗ στο διάστημα $[-7/2,+\infty)$, αφού $h'(t)=x'(t)e^{x(t)}(2x(t)+7)>0$, γιατί $x(t)\geq -7/2$ και $x'(t)>0$, η ρίζα είναι μοναδική.
Άρα το ζητούμενο σημείο είναι M(0,f(0)) ή M(0,3).

16) i. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Εάν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f ' είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Αν f είναι η συνάρτηση του (**iii**) ερωτήματος, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x),\ \text{όταν } x\in[0,+\infty).$$

Λύση:

i. Έστω $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

$g'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x(e^{x^2}-1)$.

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2}-1)>0$
  $\Leftrightarrow x\neq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	0	+
$e^{x^2}-1$	-	0	+
$2x(e^{x^2}-1)$	+	0	+

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f´´(x)	+	0	+
f´(x)	↗		↗

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, θα είναι και συνεχής στο 0, οπότε η συνάρτηση g είναι ↗ στο $\mathbb{R}$.

Προφανής ρίζα της εξίσωσης $e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow g(x)=0$, το x=0 και επειδή g ↗ μοναδική.

ii. $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$ λόγω του (i) ερωτήματος.
Άρα η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
Άρα υπάρχουν οι παρακάτω 4 περιπτώσεις:

α) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, & x<0 \end{cases}$.

δ) $f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \end{cases}$.

Οι περιπτώσεις γ και δ πρέπει να ελεγχθούν ως προς τη συνέχεια στο 0:
<u>Περίπτωση γ</u>:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x^2}-x^2-1\right)=0.$
  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-e^{x^2}+x^2+1\right)=0.$
  $f(0)=0.$
  $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$

Άρα είναι συνεχής στο 0 και ο τύπος είναι δεκτός.

- Ομοίως αποδεικνύεται ότι και η περίπτωση δ είναι δεκτή.

iii. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=2xe^{x^2}-2x$

$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2=2(e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-1)$

$f'''(x)=2\left(2xe^{x^2}+4xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}\right)$

$=4xe^{x^2}\left(3+x^2\right)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	-	0	+
$f''(x)$	↘	O.E.	↗

$f''(x)\geq f''(0) \Leftrightarrow f''(x)\geq 0$.

Άρα f' ↗ στο $\mathbb{R}$.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\geq 0$.

$h'(x)=f'(x+3)-f'(x)=2(x+3)e^{(x+3)^2}-2(x+3)-2xe^{x^2}+2x$

$=2xe^{(x+3)^2}+6e^{(x+3)^2}-\cancel{2x}-6-2xe^{x^2}+\cancel{2x}$

$=2xe^{(x+3)^2}+6e^{(x+3)^2}-6-2xe^{x^2}$

$=2x\left(e^{(x+3)^2}-e^{x^2}\right)+6\left(e^{(x+3)^2}-1\right)>0$

γιατί $x+3>x>0$ και $x+3>0$, αφού $x\geq 0$.

Άρα h ↗ στο $[0,+\infty)$ οπότε είναι και "1-1".

h "1-1"

$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x) \Leftrightarrow h(|\eta\mu x|+3)=h(x+3)$

$\Leftrightarrow |\eta\mu x|=x$

$\Leftrightarrow x=0$.

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x$, $x>0$.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κοιλότητα, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο τομής της με τον άξονα xx΄ και να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

iii) Εάν $e<\alpha<\beta$, να δείξετε ότι $\frac{\ln\alpha-1}{\ln\beta-1}<\frac{\beta}{\alpha}$.

iv) Να λυθεί η εξίσωση $x\cdot e^{e/x}=e^2$.

Λύση:

i. $f'(x)=\ln x$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	O.E.	↗

Μονοτονία: Στο διάστημα $(0,1]$ η συνάρτηση είναι ↘ και στο $[1,+\infty)$ είναι ↗.

Ακρότατα: Στο $x=1$ η συνάρτηση έχει Ο.Ε. το $f(1)=-1$.

<u>Σύνολο τιμών</u> : $f\big((0,1]\big) \underset{f\ \searrow}{=} \Big[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Big)$=[-1,0) και

$f\big([1,+\infty)\big) \underset{f\ \nearrow}{=} \Big[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\Big)$=[-1,+∞)

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x - x) \underset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - x\right)$

$$\underset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)\ DLH}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-x - x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(-2x)$$

$$=0$$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x\ln x - x) \underset{(+\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}[x(\ln x - 1)]$

$$=+\infty(+\infty-1)$$

$$=+\infty.$$

Άρα $f\big((0,+\infty)\big)$=[-1,0)U[-1,+∞)

=[-1,+∞).

ii. $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, για κάθε x>0. Άρα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα (0,+∞)

<u>Σημεία τομής με άξονες</u>:

- Επειδή $0 \notin A_f=(0,+\infty)$, η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα yy΄.
- f(x)=0 ⇔ xlnx-x=0

  ⇔ x(lnx-1)=0

  ⇔ lnx-1=0…… γιατί x>0

  ⇔ lnx=1

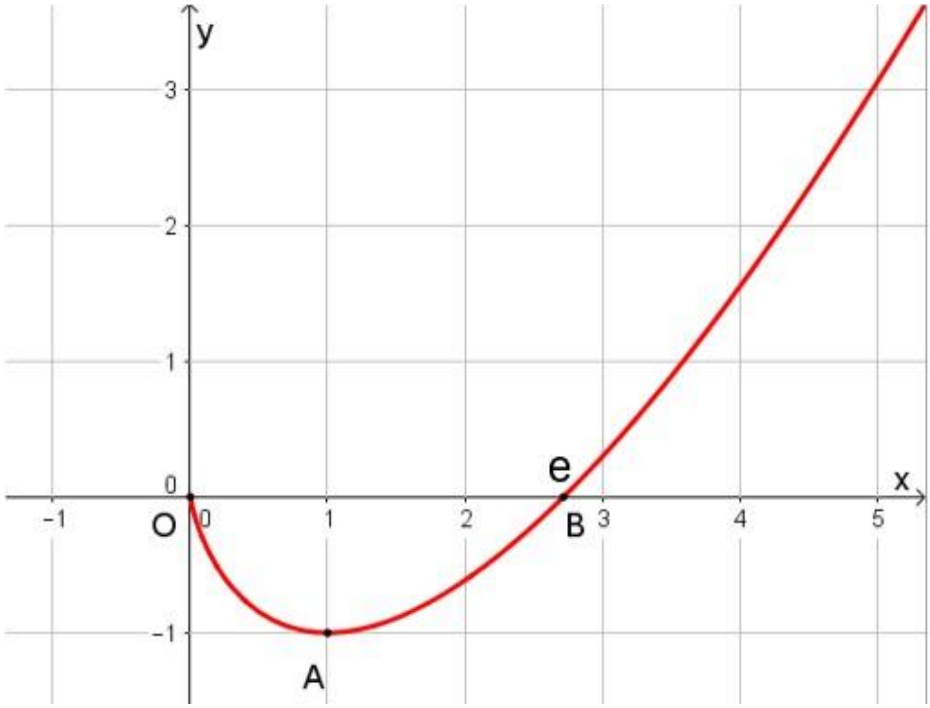
  ⇔ x=e.

Τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο B(e,0).

<u>Πίνακας μεταβολών και γραφική παράσταση</u>:

x	0	1	+∞
f΄΄(x)	+		+
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

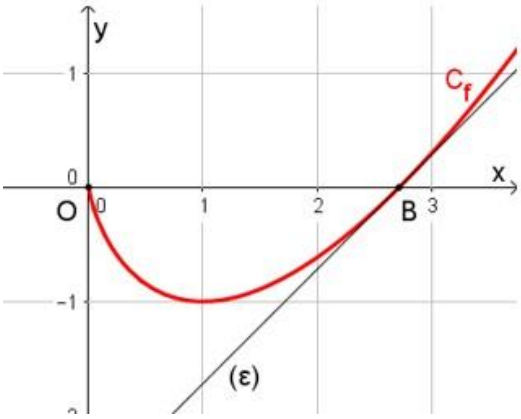
e



<u>Εξίσωση εφαπτομένης</u>:
f(e)=elne-e=0
f΄(e)=lne=1.
Η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): y-f(e)=f΄(e)(x-e) ⇔ y=x-e……(1)

iii. e<α<β ⇔ f(e)<f(α)<f(β)……γιατί η f είναι ↗ στο [e,+∞)⊆[1,+∞)
⇔ αlnα-α<βlnβ-β
⇔ α(lnα-1)<β(lnβ-1)
⇔ $\frac{\ln\alpha-1}{\ln\beta-1}<\frac{\beta}{\alpha}$, γιατί α>e>0 και β>e ⇔ lnβ>lne ⇔ lnβ>1 ⇔ lnβ-1>0.

iv) $x\cdot e^{e/x}=e^2 \Leftrightarrow \ln\left(x\cdot e^{e/x}\right)=\ln e^2$
$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{e/x}=2$
$\Leftrightarrow \ln x+\frac{e}{x}=2$
⇔ xlnx+e=2x
⇔ xlnx-x=x-e……..(2)



Επειδή η συνάρτηση είναι κυρτή στο (0,+∞), η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε) του (ii) ερωτήματος (βλέπε διπλανό σχήμα).
Άρα f(x)≥y ⇔ xlnx-x≥x-e, με το ίσον να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής x=e.
Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=e.

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)e^x$, x∈IR και α σταθερό πραγματικό θετικό αριθμό.

i. Να βρεθεί ο αριθμός α, εάν $\int_0^\alpha f(x)dx=3-e^2$.

ii. Για α=2:

1. Να δείξετε ότι f(x)≥-e, για κάθε x∈IR.
2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τα σημεία καμπής και τα σημεία τομής με τους άξονες.

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{f(x)+e^x}$.

Λύση:

i. $\int_0^\alpha f(x)dx$=3-e^2 $\Leftrightarrow \int_0^\alpha (x-\alpha)e^x dx$=3-e^2

$\Leftrightarrow \int_0^\alpha (x-\alpha)(e^x)'dx$=3-e^2

$\Leftrightarrow [(x-\alpha)e^x]_0^\alpha - \int_0^\alpha (x-\alpha)'e^x dx$=3-e^2

$\Leftrightarrow$ α$-\int_0^\alpha e^x dx$=3-e^2……

$\Leftrightarrow$ α$-[e^x]_0^\alpha$=3-e^2

$\Leftrightarrow$ α-e$^\alpha$+1=3-e^2……(1)

Έστω η συνάρτηση φ(α)=α-e$^\alpha$+1, α>0.

φ΄(α)=1-e$^\alpha$<0, γιατί α>0 $\Leftrightarrow$ e$^\alpha$>e^0=1 .

Άρα η συνάρτηση φ είναι ↘ στο διάστημα (0,+∞) άρα «1-1».

(1) $\Leftrightarrow$ φ(α)=φ(2) $\Leftrightarrow$ α=2, αφού η συνάρτηση φ είναι «1-1».

ii. 1. f(x)=(x-2)e^x.

f΄(x)=(x-1)e^x.

- f΄(x)=0 $\Leftrightarrow$ x-1=0 $\Leftrightarrow$ x=1, γιατί e^x≠0.
- f΄(x)>0 $\Leftrightarrow$ x-1>0 $\Leftrightarrow$ x>1, γιατί e^x>0.
- Ομοίως f΄(x)<0 $\Leftrightarrow$ x<1.

x	-∞	1	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Ο.Ε.

Αφού στο x=1 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο f(1)=(1-)e^1=-e, ισχύει:

f(x)≥f(1) $\Leftrightarrow$ f(x)≥-e.

2. f΄΄(x)=xe^x.

f΄΄(x)=0 $\Leftrightarrow$ x=0, γιατί e^x≠0.

f΄΄(x)>0 $\Leftrightarrow$ x>0, γιατί e^x>0 και f΄΄(x)<0 $\Leftrightarrow$ x<0, γιατί e^x>0.

x	-∞	0	+∞
f΄΄(x)	-	0	+
f(x)	∩		∪

Σ.Κ.

Στο διάστημα (-∞,0] η συνάρτηση στρέφει τα Κ.Κ. και στο [0,+∞) στρέφει τα Κ.Α.

Το σημείο Σ(0,f(0)) ή Σ(0,-2) είναι Σ.Κ.

<u>Σημεία τομής με άξονες</u>:

- f(0)=-2, άρα η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο Α(0,-2).
- f(x)=0 $\Leftrightarrow$ x=2. Άρα τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο Β(2,0).

3. <u>Ασύμπτωτες</u>:

- <u>Κατακόρυφες</u> δεν έχει γιατί έχει πεδίο ορισμού το IR.
- <u>Οριζόντιες</u>: Στο -∞: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[(x-2)e^x]$

$$\underset{(-\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\frac{1}{e^x}}$$

$$\underset{\substack{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)\\ DLH}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{(e^x)'}{(e^x)^2}} =-\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{e^x} =-\lim_{x\to-\infty} e^x=0.$$

Άρα η ευθεία y=0 (άξονας xx΄) είναι οριζόντια ασύμπτωτος στο -∞.

Στο +∞: $\lim_{x\to+\infty} f(x)= \lim_{x\to-\infty}[(x-2)e^x]$

= -∞·(+∞)

=+∞.

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο +∞.

- <u>Πλάγιες</u>: Στο -∞ δεν έχει πλάγια γιατί έχει οριζόντια.

Στο +∞: $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)e^x}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty} e^x$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty} e^x$

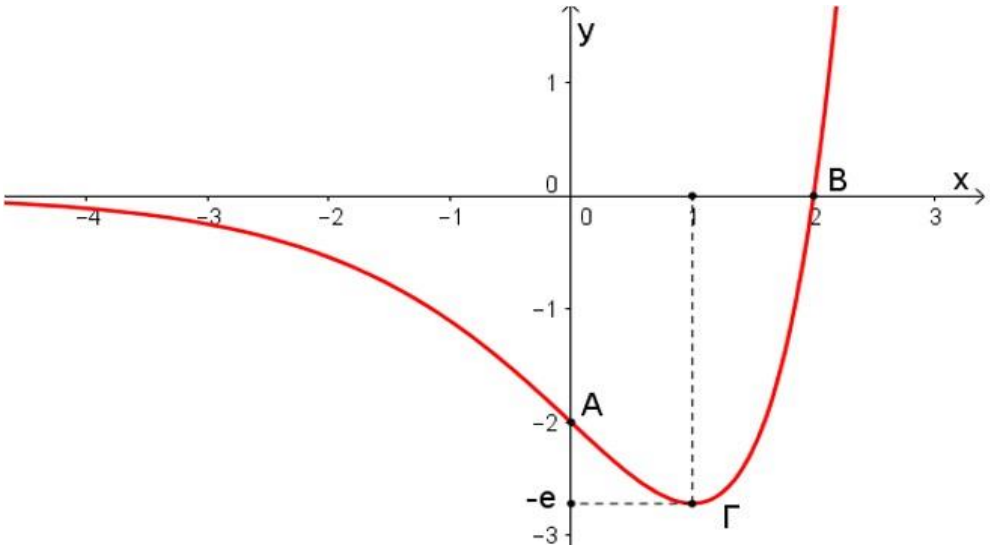
=1·(+∞)

=+∞.

Άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞.

<u>Πίνακας μεταβολών και γραφική παράσταση</u>:

x	-∞		0		1		+∞
f΄(x)		-		-	0	+	
f΄΄(x)		-	0	+		+	
f(x)		↓		↓		↑	
	0		-2		-e		+∞



4. $\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{f(x)+e^x} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)e^x}{(x-2)e^x+e^x} = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)e^x}}{\cancel{(x-1)e^x}}=1.$

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x$, $x\in\mathbb{R}$ και α, β σταθερούς πραγματικούς αριθμούς. Δίνεται επίσης και η ευθεία (ε): x-2y+2=0.

i. Εάν η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο το σημείο Α(2,1), να υπολογίσετε τα α και β και να βρείτε το είδος του ακρότατου.

Για $\alpha=-{}^1/_4$ και β=1:

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) δεν τέμνει την γραφική παράσταση (C_f)της συνάρτησης f. Σημείο M(f, f(x)) κινείται στην C_f. Να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε) ως συνάρτηση της τετμημένης x του σημείου M.

iii. Εάν d(x)=$\frac{x^2-2x+4}{2\sqrt{5}}$ η απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε), να υπολογίσετε για ποια τιμή του x, η απόσταση d(x) γίνεται ελάχιστη και να βρείτε το σημείο Σ της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Σ, είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

iv. Να δείξετε ότι όταν το σημείο M διέρχεται από το σημείο Σ, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του, είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

Λύση:

i. Επειδή f πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο IR, με f΄(x)=2αx+β.

Από Θ. Fermat, $\left.\begin{matrix} f(2)=1 \\ f'(2)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 4\alpha+2\beta=1 \\ 4\alpha+\beta=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ α=-$^1/_4$ και β=1.

ii. f(x)=$-\frac{1}{4}x^2+x$, x∈R.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με την γραφική παράσταση (C_f)της συνάρτησης f, λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} y=-\frac{1}{4}x^2+x \\ x-2y+2=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x-2\left(-\frac{1}{4}x^2+x\right)+2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x+2=0.$$

Η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει Δ=-3<0, άρα αδύνατη και επομένως η ευθεία (ε) δεν τέμνει την γραφική παράσταση (C_f)της συνάρτησης f.

(ε): x-2y+2=0. Άρα A=1, B=-2, Γ=2.

Έστω M(x,f(x)). Τότε d(M,ε)=$\frac{|A\cdot x_M+B\cdot y_M+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $=\frac{|x-2f(x)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$$=\frac{\left|x-2\left(-\frac{1}{4}x^2+x\right)+2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left|x+\frac{1}{2}x^2-2x+2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}x^2-x+2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x^2-x+2}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{x^2-2x+4}{2\sqrt{5}}.$$

Γιατί Δ=-3<0, άρα $\frac{1}{2}x^2-x+2>0$

Άρα d(x)=$\frac{x^2-2x+4}{2\sqrt{5}}$, x∈IR.

iii. Η απόσταση d(x) γίνεται ελάχιστη, όταν η παράσταση g(x)=x^2-2x+4 γίνει ελάχιστη.

g΄(x)=2x-2.

g΄(x)=0 ⇔ x=1.

x	-∞	1	+∞
g΄(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗

O.E.

Η g(x) και επομένως και η απόσταση d(x) γίνεται ελάχιστη, όταν x=1.
Σ(1, f(1)) ή Σ(1, ¾).
Η εφαπτομένη (δ) της γραφικής παράστασης C_f στο x=1, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\delta = f'(1) = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.
Επίσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = \frac{-1}{-2} = =\frac{1}{2}$.
$\Leftrightarrow \lambda_\delta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow$ (δ) // (ε).

iv. $f(x(t))=-\frac{1}{4}x(t)^2+x(t) \Leftrightarrow y(t)=-\frac{1}{4}x(t)^2+x(t)$.

$y'(t)=-\frac{1}{2}x(t)^2 \cdot x'(t)+x'(t)$.....(1)

Η σχέση (1) για $x_0(t)=1$ δίνει $y_0'(t)=-\frac{1}{2}x_0'(t)+x_0'(t) \Leftrightarrow y_0'(t)=\frac{1}{2}x_0'(t)$
$\Leftrightarrow x_0'(t)=2y_0'(t)$.

20) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{e-1}{e}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=1+\frac{1}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}$, $x>-\sqrt{e}$.

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii. Να εξετάσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-f(x))$.
iv. Να υπολογίσετε τα $x>-\sqrt{e}$, έτσι ώστε $\frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}=\frac{3}{2e}$.

Λύση:

i. $f'(x)=\frac{(x+1)'e^{x+1}-(x+1)(e^{x+1})'}{(e^{x+1})^2}=\frac{e^{x+1}-(x+1)e^{x+1}}{(e^{x+1})^2}=\frac{-x}{e^{x+1}}$.

Είναι $f'(x)\begin{cases}>0, & x<0\\ =0, & x=0\\ <0, & x>0\end{cases}$, γιατί $e^{x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

x	-∞	0	+∞
f´(x)	+	0	-
f(x)	↗	O.M.	↘

Μονοτονία: Στο διάστημα (-∞, 0] η συνάρτηση f είναι ↗.
Στο διάστημα [0, +∞) η συνάρτηση f είναι ↘.

Ακρότατα: Στη θέση x=0, η συνάρτηση f παρουσιάζει Ο.Μ. το $f(0)=\frac{1}{e}+\frac{e-1}{e}=1$.

ii. $g'(x) = -\frac{(\ln(x+\sqrt{e}))'(x+\sqrt{e})^2-\ln(x+\sqrt{e})((x+\sqrt{e})^2)'}{(x+\sqrt{e})^4}$

$= -\frac{\frac{1}{(x+\sqrt{e})}(x+\sqrt{e})'(x+\sqrt{e})^2-2\ln(x+\sqrt{e})(x+\sqrt{e})'}{(x+\sqrt{e})^4}$

$= -\frac{(x+\sqrt{e})-2(x+\sqrt{e})\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^4}$.

$= \frac{2\ln(x+\sqrt{e})-1}{(x+\sqrt{e})^3}$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln(x+\sqrt{e})-1=0$
$\Leftrightarrow 2\ln(x+\sqrt{e})=1$

$\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{e}\right)=1/2$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{e}=e^{1/2}$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{e}=\sqrt{e}$

$\Leftrightarrow$ x=0.

x	$-\sqrt{e}$	0	$+\infty$
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘	O.E.	↗

Είναι $g(x)\begin{cases} > 0, & x > 0 \\ = 0, & x = 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$,

γιατί $e^{x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Μονοτονία</u>: Στο διάστημα $(-\sqrt{e}, 0]$ η συνάρτηση g είναι ↘.

Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η συνάρτηση g είναι ↗.

<u>Ακρότατα</u>: Στη θέση x=0, η συνάρτηση g παρουσιάζει Ο.Ε. το $g(0) = 1+\frac{1}{2e}-\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2}$

$= 1+\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e}$

$=1.$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}-\frac{x+1}{e^{x+1}}-\frac{e-1}{e}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}-\frac{x+1}{e^{x+1}}\right)$

$= \frac{3}{2e}-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{e^{x+1}}\right)$

Μορφές $+\infty/+\infty$ DLH

$= \frac{3}{2e}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(x+\sqrt{e})\right)'}{\left((x+\sqrt{e})^2\right)'}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(e^{x+1})'}$

$= \frac{3}{2e}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{e}}(x+\sqrt{e})'}{2(x+\sqrt{e})(x+\sqrt{e})'}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x+1}(x+1)'}$

$= \frac{3}{2e}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2(x+\sqrt{e})^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x+1}(x+1)'}$

$= \frac{3}{2e}-0-0$

$= \frac{3}{2e}.$

iv. $\frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}=\frac{3}{2e} \Leftrightarrow \frac{x+1}{e^{x+1}}=\frac{3}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}$

Προσθέτουμε $\frac{e-1}{e}$ και στα δυο μέλη.

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{e-1}{e}=\frac{3}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}+\frac{e-1}{e}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{e-1}{e}=\frac{3+2e-2}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{e-1}{e}=\frac{1+2e}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{e-1}{e}=1+\frac{1}{2e}-\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}$

$\Leftrightarrow$ f(x)=g(x)……(1)

- Επειδή η συνάρτηση f έχει Ο.Μ. στο x=0, το f(0)=1, έχουμε:

f(x)≤1 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ……(2).

με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0.

• Επειδή η συνάρτηση g έχει Ο.Ε. στο x=0, το g(0)=1, έχουμε:

$g(x)\geq 1$ για κάθε $x>-\sqrt{e}$ ……(3).

με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0.

Λόγω των (2) και (3) η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση x=0.

<u>Αντίστροφα</u>: Το x=0 επαληθεύει την δοθείσα εξίσωση, αφού:

$$\frac{x+1}{e^{x+1}}+\frac{\ln(x+\sqrt{e})}{(x+\sqrt{e})^2}=\frac{3}{2e} \underset{x=0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e}+\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2}=\frac{3}{2e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e}+\frac{1}{2e}=\frac{3}{2e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2e}=\frac{3}{2e} \text{ ……, αληθής.}$$

21) Για τις συναρτήσεις φ: $(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ και σ: $(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, ισχύουν:

• $\varphi(x)-x\varphi'(x)\ln x=0$….(1) για κάθε x>1.

• $\sigma(x)+x\sigma'(x)\ln x=0$….(2) για κάθε x>1.

• φ(e)=-2 και σ(e)=2.

i. Να δείξετε ότι $\varphi(x)=-2\ln x$ και $\sigma(x)=\frac{2}{\ln x}$, x>1.

ii. Για δυο συναρτήσεις f και g ισχύουν:

• $f(x) = -xg'(x)\ln x$…….(3) για κάθε x>1.

• $g(x) = -xf'(x)\ln x$…….(4) για κάθε x>1.

• f(e)=0 και g(e)=2.

Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\ln x}-\ln x$, x>1 και $g(x)=\frac{1}{\ln x}+\ln x$, x>1.

iii. Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και g και τα ακρότατα της συνάρτησης g.

iv. Να βρείτε σημείο Μ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της (ε) να είναι κάθετη στην ευθεία (δ): ex-2y+3=0.

<u>Λύση</u>:

i. (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}\varphi(x)-\varphi'(x)\ln x=0$……(διαιρούμε με x, x≠0 αφού x>1)

$\Leftrightarrow \varphi'(x)\ln x-\frac{1}{x}\varphi(x)=0$

$\Leftrightarrow \varphi'(x)\ln x-(\ln x)'\varphi(x)=0$

διαιρούμε με $\ln^2 x$.
• $\ln^2 x\neq 0$ αφού
x>1 ⇔ lnx>ln1=0

$\Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)\ln x-(\ln x)'\varphi(x)}{\ln^2 x}=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\varphi(x)}{\ln x}\right)'=0$

$\Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\ln x}=c_1$

$\Leftrightarrow \varphi(x)=c_1\cdot\ln x$, x>1……..(5)

(5) $\underset{x=e}{\Leftrightarrow} \varphi(e)=c_1 \Leftrightarrow c_1=-2$ και η (5) ⇔ φ(x)=-2lnx, x>1

(2) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}\sigma(x)+\sigma'(x)\ln x=0$……(διαιρούμε με x, x≠0 αφού x>1)

$\Leftrightarrow \sigma'(x)\ln x+\frac{1}{x}\sigma(x)=0$

$\Leftrightarrow \sigma'(x)\ln x+(\ln x)'\sigma(x)=0$

$\Leftrightarrow (\sigma(x)\cdot\ln x)'=0$

$\Leftrightarrow \sigma(x)\cdot\ln x=c_2$……(6)

$(6) \underset{x=e}{\Leftrightarrow} \sigma(e) = c_2 \Leftrightarrow c_2=2$ και η (6) $\Leftrightarrow \sigma(x)=\frac{2}{\ln x}$, x>1

ii. (3)-(4) $\Leftrightarrow$ f(x)-g(x)=-xg´(x)lnx+xf´(x)lnx

$\Leftrightarrow$ f(x)-g(x)+xg´(x)lnx-xf´(x)lnx=0

$\Leftrightarrow$ (f(x)-g(x))-x(f´(x)-g´(x))lnx=0……..(7)

Θέτω φ(x)=f(x)-g(x), x>1, οπότε η σχέση (7) γίνεται:

φ(x)-xφ´(x)lnx=0 και επειδή φ(e)=f(e)-g(e)=-2, λόγω του (i) ερωτήματος, είναι φ(x)=-2lnx $\Leftrightarrow$ f(x)-g(x)=-2lnx……(8)

(3)+(4) $\Leftrightarrow$ f(x)+g(x)=-xg´(x)lnx-xf´(x)lnx

$\Leftrightarrow$ f(x)+g(x)+xg´(x)lnx+xf´(x)lnx=0

$\Leftrightarrow$ (f(x)+g(x))+x(f´(x)+g´(x))lnx=0……(9)

Θέτω σ(x)=f(x)+g(x), x>1, οπότε η σχέση (9) γίνεται:

σ(x)+xσ´(x)lnx=0 και επειδή σ(e)=f(e)+g(e)=2, λόγω του (i) ερωτήματος, είναι

σ(x)=$\frac{2}{\ln x}$ $\Leftrightarrow$ f(x)+g(x)=$\frac{2}{\ln x}$……(10)

Λύνουμε το σύστημα των (8) και (10):

(8)+(10) $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ f(x)=$\frac{1}{\ln x} - \ln x$, x>1.

(10)-(8) $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ g(x)=$\frac{1}{\ln x} + \ln x$, x>1.

iii. f´(x)=$-\frac{1}{x\ln^2 x} - \frac{1}{x}$ <0, γιατί x>1. Άρα η συνάρτηση f είναι ↘ στο διάστημα (1,+∞).

g´(x)=$-\frac{1}{x\ln^2 x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\ln^2 x}\right)$.

$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x}$

$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{\ln^2 x}$

Επειδή x>1, lnx>0, οπότε πρόσ(g´(x))=προσ(lnx-1).

- lnx-1=0 $\Leftrightarrow$ lnx=1 $\Leftrightarrow$ x=e.
- lnx-1>0 $\Leftrightarrow$ lnx>1 $\Leftrightarrow$ x>e.
- lnx-1<0 $\Leftrightarrow$ lnx<1 $\Leftrightarrow$ x<e.

x	1	e	+∞
g´(x)	-	O	+
g(x)	↘	O.E.	↗

Άρα η συνάρτηση g είναι ↘ στο διάστημα (1, e] και ↗ στο διάστημα [e, +∞).

Στο x=e, έχει Ο.Ε. το g(e)=2.

iv. $\lambda_\delta = -\frac{A}{B} = \frac{e}{2}$ και επειδή (ε) ⊥ (δ) $\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{2}{e}$.

Εάν M(x_0,f(x_0)) το σημείο επαφής, τότε f´(x_0)=λ_ε $\Leftrightarrow -\frac{1}{x_0\ln^2 x_0} - \frac{1}{x_0} = -\frac{2}{e}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0\ln^2 x_0} + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{e}$ ……(11)

Θέτω h(x)=$\frac{1}{x\ln^2 x} + \frac{1}{x}$, x>1.

h´(x)=$\left(\frac{1}{x\ln^2 x} + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x\ln^2 x)'}{x^2\ln^4 x} - \frac{1}{x^2}$

$$= -\frac{\ln^2 x + x\left(\ln^2 x\right)'}{x^2\ln^4 x} - \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{\ln^2 x + x\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)'}{x^2\ln^4 x} - \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{\ln^2 x + x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{x^2\ln^4 x} - \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{\ln x+2}{x^2\ln^3 x} - \frac{1}{x^2} < 0,$$ αφού x>1 και lnx>ln1=0

Άρα h ↘ στο διάστημα (1,+∞), επομένως «1-1».

(11) ⇔ $h(x_0)=\frac{2}{e}$ ⇔ $h(x_0)=h(e)$ και επειδή η συνάρτηση h είναι «1-1» ⇔ $x_0=e$.

Άρα M(e,f(e)) ή M(e,0).-

22) Δίνεται συνάρτηση f : IR → IR, συνεχής και παραγωγίσιμη στο R, με $f^2(x)-x^2=4$ ..(1), για κάθε x∈IR.

i. Να βρείτε τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης f.

ii. Εάν επιπλέον ισχύει f(0)=-2:

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα Κ.Κ. στο IR.

γ) Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο -∞ και στο +∞.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$.

Λύση:

i. (1) ⇔ $f^2(x)=4+x^2$……..(2)

Εάν f(x)=0 τότε η σχέση (1) δίνει $-x^2=4$ που είναι αδύνατη.

Άρα f(x)≠0 για κάθε x∈IR και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR.

Άρα $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ ή $f(x)=-\sqrt{4+x^2}$, για κάθε x∈R.

ii. Εάν f(0)=-2<0, τότε f(x)<0 για κάθε x∈IR. Άρα $f(x)=-\sqrt{4+x^2}$, x∈IR.

α) $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{4+x^2}}\cdot(4+x^2)'=-\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

$$f'(x)\begin{cases} >0, & \alpha\nu\ x<0 \\ =0, & \alpha\nu\ x=0 \\ <0, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}.$$

x	-∞	0	+∞
f΄(x)	+	0	-
f(x)	↗	O.M.	↘

Μονοτονία: Στο διάστημα (-∞, 0] η συνάρτηση f είναι ↗.

Στο διάστημα [0, +∞) η συνάρτηση f είναι ↘.

Ακρότατα: Στη θέση x=0, η συνάρτηση g παρουσιάζει Ο.Μ. το f(0) =-2.

β) $f''(x)=\ldots=-\frac{4}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}<0$, για κάθε x∈IR.

Άρα η συνάρτηση f στρέφει τα Κ.Κ. στο IR.

γ) Στο -∞: $\lambda=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$

Όταν x→-∞
τότε x<0
και |x|=-x

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}}{x}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}=\sqrt{0+1}=1.$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+x^2}-x\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)}{\sqrt{4+x^2}-x}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{4+x^2-x^2}{\sqrt{4+x^2}-x}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{4+x^2}-x}$$

$$=-\frac{4}{+\infty}$$

$$=0.$$

Μορφή (+∞-∞) και επειδή τα P(x)= $\sqrt{4+x^2}$ και Q(x)=x έχουν ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο, πολ/ζουμε & διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση.

Άρα η ευθεία y=λx+β ⇔ y=x (διχοτόμος 1ου-3ου τεταρτημορίου) είναι πλάγια ασύμπτωτος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο -∞.

<u>Στο +∞</u>: Ομοίως βρίσκουμε λ=-1 και β=0 και η ευθεία y=-x (διχοτόμος 2ου-4ου τεταρτημορίου) είναι πλάγια ασύμπτωτος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο +∞.

δ) <u>1ος τρόπος</u>: Η συνάρτηση g(x)=xf(x)=-x$\sqrt{4+x^2}$, x∈R, είναι περιττή, αφού:

g(-x)=-(-x)$\sqrt{4+(-x)^2}$ =x$\sqrt{4+x^2}$ =-g(x).

Επομένως $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$=0.

<u>2ος τρόπος</u>: $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=-\int_{-1}^{1} x\sqrt{4+x^2}dx$

$$=\int_{1}^{-1} x\sqrt{4+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_{5}^{5}\sqrt{\omega}d\omega$$

$$=0.$$

Θέτω $4+x^2=\omega$.
- $(4+x^2)'dx=(\omega)'d\omega$ ⇔ $2xdx=d\omega$ ⇔ $xdx=\frac{1}{2}d\omega$
- Όταν x=1 τότε ω=5.
- Όταν x=-1 τότε ω=5.

23) Δίνεται συνάρτηση f : IR → IR, συνεχής και παραγωγίσιμη στο IR, με

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & \alpha\nu\ x\le 1\\ \frac{2}{x}, & \alpha\nu\ x>1\end{cases}$$ και f(-1)=2.

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Για τα επόμενα ερωτήματα, υποθέτουμε ότι $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \alpha\nu\ x\le 1\\ 2\ln x+2, & \alpha\nu\ x>1\end{cases}$.

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τα σημεία καμπής και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής της παράστασης στο σημείο Σ(1,f(1)).

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x), την ευθεία (ε) και τις ευθείες x=0 και x=2.

Λύση:

i. Έστω $f(x)=\begin{cases} x^2+c_1, & \text{αν } x\le 1 \\ 2\ln x+c_2, & \text{αν } x>1 \end{cases}$.

f(-1)=2 ⇔ $1+c_1=2$ ⇔ $c_1=1$.

f συνεχής στο ℝ, άρα συνεχής και στο 1.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2\ln x+c_2)=2 \Leftrightarrow c_2=2$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x\le 1 \\ 2\ln x+2, & \text{αν } x>1 \end{cases}$.

Παραγωγισιμότητα στο 1:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$.

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\ln x+2-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(2\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2}{x}=2$.

Μορφή $^0/_0$ DLH

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x=1.

ii. Πίνακας μεταβολών:

x	-∞	0		1	+∞
2x	-	0	+		
$^2/_x$					+
f΄(x)	-	0	+		+
f(x)	↘		↗		↗
		O.E.			

Μονοτονία: Στο διάστημα (-∞,0] η συνάρτηση f είναι ↘.

Στο διάστημα [0,+∞) η συνάρτηση f είναι ↗, γιατί είναι συνεχής στο x=0.

Ακρότατα: Στη θέση x=0 παρουσιάζει Ο.Ε. το f(0)=1.

iii.
- Για x<1, f΄΄(x)=2.
- Για x>1, $f''(x)=-\frac{2}{x^2}<0$.
- Για x=1: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{2}{x}-2}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2-2x}{x(x-1)}$$
$$= -\lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x(x-1)}$$
$$= -\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x}$$
$$= -2.$$

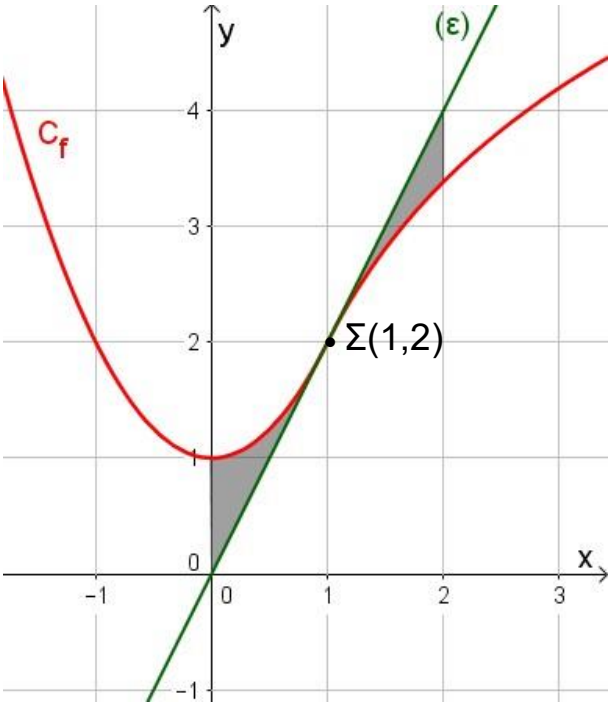
Άρα η συνάρτηση f δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο x=1.

Επομένως $f''(x)=\begin{cases} 2, & \alpha\nu\ x<1 \\ -\frac{2}{x^2}, & \alpha\nu\ x>1 \end{cases}$.

x	-∞	1	+∞
f´´(x)	+	0	-
f(x)	↗	Σ.Κ.	↘

<u>Κυρτότητα και Σ.Κ.</u>: Στο διάστημα (-∞,1] η συνάρτηση f είναι κυρτή.
Στο διάστημα [1,+∞) η συνάρτηση f είναι κοίλη.
Επειδή στο x=1 η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει εφαπτομένη, το σημείο Σ(1,f(1)) ή Σ(1,2) είναι Σ.Κ.

<u>Εξίσωση εφαπτομένης</u>: (ε): y-f(1)=f´(1)(x-1)
⇔ y-2=2(x-1)
⇔ y=2x.



Επειδή το Σ(1,2) είναι Σ.Κ., η εφαπτομένη (ε) διαπερνά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και επειδή στο διάστημα (-∞,1] η συνάρτηση f είναι κυρτή και στο διάστημα [1,+∞) η συνάρτηση f είναι κοίλη, η ευθεία (ε) είναι κάτω από τη C_f στο διάστημα [0,1) και πάνω από τη C_f στο διάστημα (1,2], όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα. Άρα:

$E(\Omega)=\int_0^2 |f(x)-2x|dx=$
$=\int_0^1 (x^2+1-2x)dx+\int_1^2 (2x-2lnx-2)dx$
$=\int_0^1 (x-1)^2dx+\int_1^2 (2x-2lnx-2)dx$
$=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1+[x^2-2(xlnx-x)-2x]_1^2=\frac{1}{3}+[x^2-2xlnx]_1^2$
$=\frac{1}{3}+4-4ln2-1$
$=\frac{10}{3}-4ln2.$

24) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+\ln(x^2-4x+6)$ με $x\in$ IR και η συνάρτηση f : IR → IR για την οποία ισχύει η σχέση $e^{f(x)-x}\cdot(f^2(x)-4f(x)+6)=1$, για κάθε $x\in$ IR …..(1)

i. Να αποδείξετε ότι $(g\circ f)(x)=x$, για κάθε $x\in R$.

ii. α) Να μελετηθεί η συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια ότι ισχύει $f^{-1}=g$.

iii. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1}, που απέχει ελάχιστα από την διχοτόμο της γωνίας 1ου-3ου τεταρτημορίου.

iv. Να δείξετε ότι $f(x)\le x-\ln 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

v. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

Λύση:

i. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)+\ln\left(f(x)^2-4f(x)+6\right)$

$$\underset{(1)}{=} f(x)+\ln\frac{1}{e^{f(x)-x}}$$

$$=f(x)+\underbrace{\ln 1}_{0}-\ln e^{f(x)-x}$$

$$=f(x)-\left(f(x)-x\right)=\ldots\ldots=x.$$

ii. **α)** $g'(x)=1+\frac{2x-4}{x^2-4x+6}=\frac{x^2-2x+2}{x^2-4x+6}>0$, γιατί $x^2-2x+2>0$ (αφού $\Delta=-4<0$) και $x^2-4x+6>0$ (αφού $\Delta=-8<0$). Άρα η συνάρτηση g είναι ↗ στο $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln(x^2-4x+6)\right)=$

Μορφή $-\infty+\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(1+\frac{\ln(x^2-4x+6)}{x}\right)\right)$$

$$=-\infty(1+0)$$

$$=-\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-4x+6)}{x}\underset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)\ DLH}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\ln(x^2-4x+6)\right)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{x^2-4x+6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ln(x^2-4x+6)\right)=$

$$=+\infty+\infty$$

$$=+\infty.$$

Άρα $g(\mathbb{R})\underset{g\ ↗}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

β) $(g\circ f)(x)=x$. Άρα η συνάρτηση $g\circ f$ είναι ↗, άρα «1-1».

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$

$\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$

$\underset{(gof)\ "1-1"}{\Leftrightarrow} x_1=x_2.$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως αντιστρέφεται.

$g(f(x))=x\Leftrightarrow g(f(f^{-1}(y)))=f^{-1}(y)$

$\Leftrightarrow g(y)=f^{-1}(y)$

και αν θέσουμε όπου y το x, παίρνουμε:

$g(x)=f^{-1}(x)$.

Αφού η f αντιστρέφεται, θέτω $x=f^{-1}(y)$. Άρα $y=f(x)$.

iii. Η διχοτόμος (ε) έχει εξίσωση $y=x\Leftrightarrow x-y+0=0$.

$(A=1,\ B=-1,\ \Gamma=0)$

Έστω $M(x,f^{-1}(x))$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

$x_0=x,\ y_0=f^{-1}(x)$

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|x-f^{-1}(x)\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|x-g(x)|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\left|-\ln\left(x^2-4x+6\right)\right|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\ln\left(x^2-4x+6\right)}{\sqrt{2}},$$

γιατί το τριώνυμο $u=x^2-4x+6$, με $\Delta=-8$, έχει ελάχιστη τιμή $u=-\frac{\Delta}{4\alpha}=\ldots=2$, όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\ldots=2$, οπότε $x^2-4x+6\geq 2 \Leftrightarrow \ln(x^2-4x+6)\geq \ln 2>\ln 1=0$.

Η απόσταση $d(M,\varepsilon)$ γίνεται ελάχιστη, όταν ο αριθμητής $\ln(x^2-4x+6)$ γίνει ελάχιστος και επειδή $\ln(y^2-4y+6)\geq \ln 2$, η ελάχιστη τιμή είναι το $\ln 2$, όταν $x=2$.

$f^{-1}(2)=2+\ln 2$.

Άρα $M(2,2+\ln 2)$.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$…..(2)

Θέτω $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=g(y)$ και η σχέση (2) γίνεται:

$h(g(y))=y-g(y)=\ldots=-\ln(y^2-4y+6)$.

$h'(y)=\frac{4-2y}{y^2-4y+6}$.

• $h'(y)=0 \Leftrightarrow y=2$ και $h'(y)>0 \Leftrightarrow y<2$, $h'(y)<0 \Leftrightarrow y>2$, γιατί $x^2-4x+6>0$, αφού $\Delta=-8<0$.

y	$-\infty$	2	$+\infty$
h´(y)	+	0	-
h(y)	↗		↘
		Ο.Μ.	

Άρα η συνάρτηση h έχει Ο.Μ. όταν $y=2$ το $h(g(2))=-\ln 2$.

Επομένως $h(x)\leq -\ln 2 \Leftrightarrow f(x)-x\leq -\ln 2$

$\Leftrightarrow f(x)\leq x-\ln 2$.

v. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, και η αντίστροφή της f, έχει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία $y=x$.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|f(x)|}\leq\frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|}\leq\frac{\eta\mu x}{f(x)}\leq\frac{1}{|f(x)|}.\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=0.\end{array}\right\} \underset{K.\Pi.}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0.$$

25) END.