Λύσεις ασκήσεων Θ. Rolle

1. Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ, και δυο φορές παραγωγίσιμη στο Δ. Αν $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ δυο ρίζες στο Δ.

Λύση: Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει τρείς ρίζες στο Δ, τις ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.
Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ γιατί ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. **Rolle** στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$.
Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=0$……………………….(1)
και $f'(\xi_2)=0$……………………….(2)
Επίσης από (1), (2) $\Rightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ και επειδή f΄ παραγωγίσιμη, εφαρμόζεται το Θ. **Rolle** για την f΄ στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$.
Άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ με $f''(\xi)=0$, άτοπο, γιατί $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$.
Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ δυο ρίζες στο Δ.
2ος τρόπος: Αφού η εξίσωση $f''(x)=0$ είναι αδύνατη, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δυο ρίζες (παρατήρηση 2).

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5+4x^3+2x+1=0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο IR.

Λύση: θεωρούμε τη συνάρτηση
$f(x)=x^5+4x^3+2x+1$, $x\in$IR.
Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει δυο ρίζες στο Δ, τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=5x^4+12x^2+2$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ γιατί ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. **Rolle** στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.
Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 5\xi^4+12\xi^2+2=0$, άτοπο, γιατί $5\xi^4+12\xi^2+ +2>0$, για κάθε $\xi\in$IR.
Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ μια ρίζα στο IR.
2ος τρόπος: Αφού η εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4+12x^2+2=0$ είναι (προφανώς) αδύνατη, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο IR (παρατήρηση 2).

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{10}-3x+8=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση: θεωρούμε τη συνάρτηση
$f(x)=x^{10}-3x+8$
Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει τρείς ρίζες στο Δ, τις ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=10x^9-3$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ γιατί ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. **Rolle** στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$.
Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=0$……………………….(1)
και $f'(\xi_2)=0$……………………….(2)
Άτοπο, γιατί η εξίσωση $f'(x)=0$, δεν έχει δυο ρίζες, αλλά μία την $x=\sqrt[9]{0,3}$.
Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ δυο ρίζες στο Δ.
2ος τρόπος: Αφού η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια ρίζα, την $x=\sqrt[9]{0,3}$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο R (παρατήρηση 2).

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2-x+2-e^{x+1}=0$, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

Λύση: θεωρούμε τη συνάρτηση
$f(x)=3x^2-x+2-e^{x+1}$, $x\in$IR.

Τότε $f'(x)=6x-1-e^{x+1}$
$f''(x)=6-e^{x+1}$
$f'''(x)=-e^{x+1}$.
Επειδή η εξίσωση $f'''(x)=0$ είναι αδύνατη, η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ δυο ρίζες, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ τρεις ρίζες. (παρατήρηση 2).

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-2x^2-4x+1=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα στο (0, 2).

Λύση: *Ύπαρξη ρίζας*:
θεωρούμε τη συνάρτηση
$f(x)=x^3-2x^2-4x+1$, $x\in$IR.
Η f είναι συνεχής στο [0,2] ως πολυωνυμική και $f(0)=1$, $f(2)=-7$, άρα $f(0)\cdot f(2)<0$.
Άρα (Θ. **Bolzano**) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).
Μοναδικότητα: Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει δυο ρίζες στο (0,2), τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=3x^2-4x-4$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ γιατί ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.
Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 3\xi^2-4\xi-4=0$……………………(1)
Άτοπο, γιατί η εξίσωση (1) έχει ρίζες ρ_1,ρ_2 $\xi_1=2\notin(0,2)$ και $\xi_2=-2/3\notin(0,2)$.
Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,2).

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5+10x-3=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

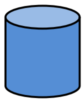
Λύση: *Ύπαρξη ρίζας*:
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x)=x^5+10x-3$, $x\in$ IR.

Επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ (περιττού) βαθμού και είναι συνεχής στο R, έχει **πεδίο τιμών** f(IR)= IR.

(γιατί $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

Επειδή $0\in$ f(IR)= IR, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R.



Μοναδικότητα:

• με μονοτονία:

Επειδή $f'(x)=5x^4+10>0$ για κάθε $x\in$ IR, η f είναι **γνησίως αύξουσα**, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

• με Rolle: Έστω ότι η εξίσωση f(x)=0, έχει δυο ρίζες στο R, τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=5x^4+10$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ γιατί ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0, προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 5\xi^4+10=0$ **άτοπο**, γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=x^5+10x-3=0$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο IR.

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3+3x+\alpha=0$, $\alpha\in$ IR, έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

Λύση: *Ύπαρξη ρίζας*:

θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x)=x^3+3x+\alpha$, $x\in$ IR.

Επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ (περιττού) βαθμού και είναι συνεχής στο IR, έχει **πεδίο τιμών** f(IR)= IR.

(γιατί $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

Επειδή $0\in$ f(IR)= IR, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR.

Μοναδικότητα:

• με μονοτονία:

Επειδή $f'(x)=3x^2+3>0$ για κάθε $x\in$ IR, η f είναι **γνησίως αύξουσα**, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

• με Rolle: Έστω ότι η εξίσωση f(x)=0, έχει δυο ρίζες στο R, τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=3x^2+3$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ γιατί ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0, προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 3\xi^2+3=0$ **άτοπο**, γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=x^3+3x+\alpha=0$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο IR.

8. Εάν $\beta^2-3\alpha\gamma<0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, $\alpha\neq0$, έχει μοναδική ρίζα στο IR.

Λύση: *Ύπαρξη ρίζας*:

θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $x\in$ IR.

Επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ (περιττού) βαθμού και είναι συνεχής στο IR, έχει **πεδίο τιμών** f(IR)= IR.

(γιατί $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

Επειδή $0\in$ f(IR)= IR, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR.

Μοναδικότητα:

• με μονοτονία:

Επειδή $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma>0$ αν $\alpha>0$ (**ή $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma<0$, αν $\alpha<0$**) για κάθε $x\in$ R, γιατί $\Delta=4\beta^2-12\alpha\gamma=4(\beta^2-3\alpha\gamma)<0$, η f είναι γνησίως αύξουσα αν $\alpha>0$ (**ή γνησίως φθίνουσα αν $\alpha<0$**) αντίστοιχα, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

• με Rolle: Έστω ότι η εξίσωση f(x)=0, έχει δυο ρίζες στο IR, τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ γιατί ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0, προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 3\alpha\xi^2+2\beta\xi+\gamma=0$ **άτοπο**, γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\Delta=4\beta^2-12\alpha\gamma=4(\beta^2-3\alpha\gamma)<0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο IR.

9. Να δείξετε ότι η εξίσωση ημ7x-11x+1=0, $\alpha\neq0$, έχει μοναδική ρίζα στο (0, π).

Λύση: *Ύπαρξη ρίζας*:

Η συνάρτηση f(x)=ημ7x-11x+1 είναι:

• συνεχής στο [0,π] ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

• $\left.\begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(\pi)=-11\pi+1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(\pi)<0.$

Άρα (**Bolzano**) η εξίσωση f(x)=ημ7x-11x+1=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,π).

Μοναδικότητα:

Επειδή η f΄(x)=7ημ7x-11=0 δεν έχει ρίζες (αφού η εξίσωση f΄(x)=7ημ7x-11=0 $\Leftrightarrow$ ημ7x=$^{11}/_{7}$>1 είναι αδύνατη), η f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα (παρατήρηση 2).

Επομένως η εξίσωση f(x)=ημ7x-11x+1=0, έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,π).

10. Εάν α+β=1, να δείξετε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2+2\beta x-1=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-x$ στο διάστημα [0,1].

• συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική,

• παραγωγίσιμη στο (0,1) με f΄(x)=3αx^2+ +2βx-1,

• $\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(1)=\alpha+\beta-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=f(1)$

γιατί α+β=1.

Άρα (Θ Rolle) η εξίσωση f΄(x)=0 ⇔ 3αx^2+ +2βx-1=0, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR.

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση 6αx^2+6βx-2α-3β=0, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση f(x)=2αx^3+3βx^2-2αx-3βx στο διάστημα [0,1].

• συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική,

• παραγωγίσιμη στο (0,1) με f΄(x)=6αx^2+ +6βx-2α-3β,

• $\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(1)=2\cancel{\alpha}+3\cancel{\beta}-2\cancel{\alpha}-3\cancel{\beta}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)=f(1)$.

Άρα (Θ Rolle) η εξίσωση f΄(x)=0 ⇔ 6αx^2+6βx-2α-3β=0, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR.

12. Να δείξετε ότι η εξίσωση x^2=xημx+συνx, έχει δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες, μια στο διάστημα (-π, 0) και μια στο (0, π).

Λύση: *Ύπαρξη ριζών*:

x^2=xημx+συνx ⇔ x^2-xημx-συνx=0.

Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση f(x)=x^2-xημx-συνx στα διαστήματα [-π,0] και [0,π].

• συνεχής στα [-π,0] και [0,π] ως διαφορά και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

• $\left.\begin{cases} f(-\pi)=\pi^2+1>0 \\ f(0)=-1<0 \\ f(\pi)=\pi^2+1>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f(-\pi)\cdot f(0)<0 \\ f(0)\cdot f(\pi)<0 \end{cases}$

Άρα η εξίσωση f(x)=0 ⇔ x^2-xημx-συνx=0, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-π,0) και μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,π).

Μοναδικότητα:

• με μονοτονία:

Επειδή f΄(x)=2x-~~ημx~~-xσυνx+~~ημx~~=2x-xσυνx= =x(2-συνx).

Επειδή 2-συνx>0 για κάθε x∈IR (γιατί -1≤συνx≤1), το πρόσημο του f΄(x) ισούται με το πρόσημο του x:

x	-∞	0	+∞
x	-	0	+
f΄	-	0	+
f	↘		↗

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [-π,0] και γνησίως αύξουσα στο [0,π] και οι παραπάνω ρίζες είναι μοναδικές.

• με Rolle: Επειδή η εξίσωση f΄(x)=0 ⇔ x(2-συνx)=0

έχει μοναδική ρίζα x=0, η εξίσωση f(x)=0, έχει το πολύ δύο ρίζες. Άρα οι ρίζες στα διαστήματα (-π,0) και (0,π) είναι μοναδικές.

13. Εάν η f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(x)>0, για κάθε x∈(α, β), να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}.$$

Λύση: Διαμορφώνουμε την προς απόδειξη σχέση, αφού πρώτα θέσουμε όπου ξ το x:

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\alpha-x}+\frac{1}{\beta-x}$ ⇔

f΄(x)(α-x)(β-x)=f(x)(β-x)+f(x)(α-x) ⇔

f΄(x)(α-x)(β-x)-f(x)(β-x)-f(x)(α-x)=0 ⇔

f΄(x)(α-x)(β-x)+f(x)(α-x)΄(β-x)+f(x)(α-x)(β-x)΄=0 ⇔

(f(x)(α-x)(β-x))΄=0.

Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση g(x)=f(x)(α-x)(β-x) στο διάστημα [α, β].

• συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,

• παραγωγίσιμη στο (α,β) με:

g΄(x)= (f(x)(α-x)(β-x))΄

=f΄(x)(α-x)(β-x)-f(x)(β-x)-f(x)(α-x),

• $\left.\begin{array}{l} g(\alpha)=f(\alpha)(\cancelto{0}{\alpha-\alpha})(\beta-\alpha)=0 \\ g(\beta)=f(\beta)(\alpha-\beta)(\cancelto{0}{\beta-\beta})=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$.

Άρα (Θ Rolle) υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε g΄(ξ)=0

⇔ f΄(ξ)(α-ξ)(β-ξ)-f(ξ)(β-ξ)-f(ξ)(α-ξ)=0

⇔ f΄(ξ)(α-ξ)(β-ξ)=f(ξ)(β-ξ)+f(ξ)(α-ξ)

⇔ $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}$.

(διαιρούμε και τα δυο μέλη με f(ξ)(α-ξ)(β-ξ)).

14. Έστω φ : IR→IR παραγωγίσιμη στο IR με φ(0)=0.

a) Να βρεθεί το φ(π/2), αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση g(x)=φ(x)-ημx ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,π/2],

b) να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0, π/2), τέτοιο ώστε φ΄(ξ)=συνξ.

Λύση:

a) Αφού η g ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Rolle στο διάστημα [0,π/2], θα είναι g(0)=g(π/2) ⇔

$\cancelto{0}{\varphi(0)}-\cancelto{0}{\eta\mu 0}=\varphi(\pi/2)-\cancelto{1}{\eta\mu(\pi/2)}$ ⇔ φ(π/2)=1.

b) Αφού η g ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Rolle στο διάστημα [0,π/2], υπάρχει ξ∈(0,π/2) με g΄(ξ)=0 ⇔ φ΄(ξ)-συνξ=0

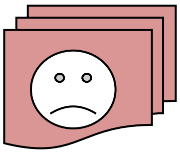
$\Leftrightarrow \varphi'(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi$.

15. Έστω f, g συνεχείς στο [α, β], παραγωγίσιμες στο (α, β) με g(x)≠0 και g΄(x)≠0 για κάθε x∈(α, β) και f(α)=g(β)=0. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β),

τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=0.$

Λύση: Διαμορφώνουμε την προς απόδειξη σχέση, αφού πρώτα θέσουμε όπου ξ το x:

$\frac{f'(x)}{g'(x)}+\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow$



f΄(x)g(x)+f(x)g΄(x)=0 ⇔

$(f(x)g(x))'=0$.

Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση g(x)=f(x)g(x) στο διάστημα [α, β].

• συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,

• παραγωγίσιμη στο (α,β) με:

$g'(x)=(f(x)g(x))'$

$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

• $\left\{\begin{aligned} g(\alpha)&=\cancelto{0}{f(\alpha)}g(\alpha)=0\\ g(\beta)&=f(\beta)\cancelto{0}{g(\beta)}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$

Άρα (Θ Rolle) υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε g΄(ξ)=0

⇔ f΄(ξ)g(ξ)+f(ξ)g΄(ξ)=0

$\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=0.$

(διαιρούμε και τα δυο μέλη με g(ξ)g΄(ξ)).

16. Έστω f συνεχής στο [0, α], παραγωγίσιμη στο (0, α) και f(0)=0. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0, α), τέτοιο ώστε f(ξ)=(α-ξ)f΄(ξ).

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση g(x)=f(x)(α-x) (παρατήρηση 5).

• συνεχής στο [α,β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,

• παραγωγίσιμη στο (α,β) με:

$g'(x)=(f(x)(\alpha-x))'$

$=f'(x)(\alpha-x)-f(x)$,

• $\left.\begin{aligned} g(0)&=\cancelto{0}{f(0)}(\alpha-0)=0\\ g(\alpha)&=f(\alpha)\cancelto{0}{(\alpha-\alpha)}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow g(0)=g(\alpha)$

Άρα (Θ Rolle) υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε g΄(ξ)=0 ⇔ (α-ξ)f΄(ξ)-f(ξ)=0

⇔ f(ξ)=(α-ξ)f΄(ξ).

17. Εάν f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f(α)=f(β)=0, τότε υπάρχει x_o∈(α, β), στο οποίο $f'(x_o)=2f(x_o)$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση $g(x)=e^{-2x}f(x)$ στο διάστημα [α, β] (παρατήρηση 5).

• συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,

• παραγωγίσιμη στο (α,β) με:

$g'(x)=(e^{-2x}f(x))'$

$=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)$

$=e^{-2x}(f'(x)-2f(x))$.

• $\left.\begin{aligned} g(\alpha)&=e^{-2\alpha}\cancelto{0}{f(\alpha)}=0\\ g(\beta)&=e^{-2\beta}\cancelto{0}{f(\beta)}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$

Άρα (Θ Rolle) υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε g΄(ξ)=0

⇔ $e^{-2\xi}(f'(\xi)-2f(\xi))=0$ και επειδή $e^{-2x}\neq 0$

⇔ f΄(ξ)-2f(ξ)=0

⇔ f΄(ξ)=2f(ξ).

18. Έστω f συνεχής στο [2,3], παραγωγίσιμη στο (2,3) και 3f(2)=2f(3). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(2,3), τέτοιο ώστε ξf΄(ξ)=f(ξ).

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο διάστημα [2,3] (παρατήρηση 5).

• συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,

• παραγωγίσιμη στο (α,β) με:

$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'$

$=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

3f(2)=2f(3) ⇔ $\frac{f(2)}{2}=\frac{f(3)}{3}$

• $\left.\begin{aligned} g(2)&=\frac{f(2)}{2}\\ g(3)&=\frac{f(3)}{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow g(2)=g(3).$

Άρα (Θ Rolle) υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε g΄(ξ)=0

$\Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$

⇔ ξf΄(ξ)-f(ξ)=0 ⇔ ξf΄(ξ)=f(ξ).

19. Έστω f, g ορισμένες και συνεχείς στο [α,β], και παραγωγίσιμες στο (α,β). Εάν g΄(x)≠0, για κάθε x∈(α, β), να δείξετε ότι:

i. g(α) ≠ g(β)

ii. υπάρχει ξ∈(α,β), τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Λύση:

Α. Εάν g(α)=g(β) τότε εφαρμόζεται το Θ.**Rolle** για την συνάρτηση στο [α,β] οπότε υπάρχει ξ∈(α,β) με g΄(ξ)=0, άτοπο γιατί g΄(x)≠0, για κάθε x∈(α, β).

Β. Εφαρμόζουμε το Θ.**Rolle** για την συνάρτηση h(x)=(g(β)-g(α))f(x)-(f(β)-f(α))g(x).

• συνεχής στο [α,β] διαφορά συνεχών συναρτήσεων,

• παραγωγίσιμη στο (α,β) με:

h΄(x)=(g(β)-g(α))f΄(x)-(f(β)-f(α))g΄(x).

•
$$\left.\begin{aligned} h(\alpha) &= (g(\beta)-g(\alpha))f(\alpha)-(f(\beta)-f(\alpha))g(\alpha)=0\\ h(\beta) &= (g(\beta)-g(\alpha))f(\beta)-(f(\beta)-f(\alpha))g(\beta)=0\end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} h(\alpha) &= f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)\\ h(\beta) &= f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)\end{aligned}\right\} \Rightarrow h(\alpha)=h(\beta)$$

Επομένως υπάρχει ξ∈(α,β) με h΄(ξ)=0 ⇔
(g(β)-g(α))f΄(ξ)-(f(β)-f(α))g΄(ξ)=0 ⇔
(g(β)-g(α))f΄(ξ)=(f(β)-f(α))g΄(ξ) ⇔
$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

20. Έστω f, g συνεχείς στο [α,β], παραγωγίσιμες στο (α, β) με f(x)g(x)≠0 για κάθε x∈[α,β] και $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α,β), τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}$.
20.

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την συνάρτηση F(x)=$\frac{f(x)}{g(x)}$ στο διάστημα [α,β].

• συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,

• παραγωγίσιμη στο (α,β) με:

$$F'(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

• $F(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta.}{=}\frac{f(\beta)}{g(\beta)}=F(\beta)$

Άρα (Θ Rolle) υπάρχει ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε F΄(ξ)=0

$\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0$

$\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$

⇔ f΄(ξ)g(ξ)=f(ξ)g΄(ξ)

$\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}.$

Λύσεις ασκήσεων ΘΜΤ

1. Έστω $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta, & x\geq 1\\ 4x+\beta, & x<1\end{cases}$. Να υπολογίσετε τα α,β∈IR, ώστε να εφαρμόζεται για την f το ΘΜΤ στο [0,2]. Στην συνέχεια να υπολογίσετε το ξ∈(0,2), για το οποίο ισχύει: f(2)-f(0)= =2f΄(ξ).

Λύση: Για να εφαρμόζεται για την f το **Θ.Μ.Τ.** στο [0,2] πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο x_0=1.

• συνέχεια: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x^2-\beta)=\lim\limits_{x\to 1^-}(4x+\beta)$

⇔ α-β=4+β

⇔ α=4+2β……………………………………(1)

• παραγωγισιμότητα:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4x+\beta-(\alpha-\beta)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\alpha x^2-\beta-(\alpha-\beta)}{x-1}$

(1)

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(4+2\beta)x^2-(4+2\beta)}{x-1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(4+2\beta)(x^2-1)}{x-1}$

$\Leftrightarrow 4=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(4+2\beta)\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$

⇔ 4=8+2β

⇔ β = -2.

(1) ⇔ α=0.

2. Έστω f συνεχής στο [α, β] και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν γ∈(α,β), τέτοιο ώστε τα α,γ,β και f(α),f(γ),f(β) να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικών προόδων, να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α,β), τέτοιο ώστε f΄΄(ξ)=0.

Λύση: Επειδή α, γ, β διαδοχικοί όροι α.π. ⇔ γ-α=β-γ ……………………………..…………….(1)

Ομοίως f(γ)-f(α)=f(β)-f(γ)…………………(2)

$\frac{(2)}{(1)}\Rightarrow \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$……….(3)

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f στα διαστήματα [α,γ] και [γ,β].

Προφανώς (?) ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, άρα υπάρχουν x_1∈(α,γ) και x_2∈(γ,β) τέτοια ώστε:

$f'(x_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$……………………….(4)

$f'(x_2)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$ ……………………(5)

Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την f΄(x) στο διάστημα [x_1,x_2].

• Συνεχής στο [x_1,x_2]⊆[α,β] από υπόθεση.

• παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) από υπόθεση.

• $f'(x_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}\overset{(3)}{=}\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=f'(x_2).$

Άρα υπάρχει ξ∈(x_1,x_2)⊆(α,β), τέτοιο ώστε f΄΄(ξ)=0.

3. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] και $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε f΄΄(ξ)=0.

Λύση: $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$

$f(\alpha)+f(\beta)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$

$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)$ ……..(1)

Επίσης $\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\frac{\beta-\alpha}{2}$……..(2)

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}$.....(3)

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$.

Προφανώς (?) ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, άρα υπάρχουν $x_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε:

$f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}$..................(4)

$f'(x_2) = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}$ ....(5)

Εφαρμόζουμε το Θ. **Rolle** για την f΄(x) στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

- Συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq[\alpha,\beta]$ από υπόθεση.
- παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) από υπόθεση.
- $f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \overset{(3)}{=} \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} = f'(x_2)$

Άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

4. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [1,5] με f(1)=2 και 3≤f΄(x)≤5 για κάθε x∈(1,5). Να δείξετε ότι 14≤f(5)≤22.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [1,5], παραγωγίσιμη στο (1,5) γιατί 3≤f΄(x)≤5 για κάθε x∈(1,5).
Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f στο διάστημα [1,5].
Υπάρχει ξ∈(1,5) με $f'(\xi) = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{f(5)-2}{4}$.

3≤f΄(x)≤5 ⇔ 3≤f΄(ξ)≤5
⇔ $3 \le \frac{f(5)-2}{4} \le 5$
⇔ 14≤f(5)≤22.

5. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [2,5] παραγωγίσιμη στο (2,5) με f(2)=2 και 5≤f(5)≤17 για κάθε x∈(2,5). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(2,5) με 1≤f΄(ξ)≤5.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [2,5] παραγωγίσιμη στο (2,5). Άρα (**Θ.Μ.Τ.**) υπάρχει ξ∈(2,5) με:
$f'(\xi) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{f(5)-2}{3} \Leftrightarrow$
f(5)=3f΄(ξ)+2.................................(1)
5≤f(5)≤17 ⇔ 5≤3f΄(ξ)+2≤17........λόγω (1)
⇔ 1≤f΄(ξ)≤5.

6. Εάν για την συνάρτηση f ισχύει f΄(x)≥M, για κάθε x∈[α,β], όπου M σταθερός πραγματικός, να δείξετε ότι f(β)≥f(α)+M(β-α).

Λύση: Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο [α,β] παραγωγίσιμη στο (α,β) από υπόθεση. Άρα (**Θ.Μ.Τ.**) υπάρχει ξ∈(α,β) με:
$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ....(1)
f΄(x)≥M, για κάθε x∈[α,β] ⇒ f΄(ξ)≥M η οποία λόγω της (1) γίνεται:
$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \ge M$ ⇒ f(β)≥f(α)+M(β-α).

7. Εάν για την συνάρτηση f ισχύει |f΄(x)|≤M, για κάθε x∈[α,β], όπου M σταθερός πραγματικός, να δείξετε ότι:
f(α)-M(β-α)≤f(β)≤f(α)+M(β-α).

Λύση: Όπως και στην προηγούμενη άσκηση:
|f΄(x)|≤M ⇔ -M≤f΄(x)≤M
⇔ -M≤f΄(ξ)≤M
⇔ -M≤$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$≤M
⇔ f(α)-M(β-α)≤f(β)≤f(α)+M(β-α).

8. Για την f: [0,3]→ IR ισχύει το Θ. Rolle στο [0,3]. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in$ [0,3], τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=0$.

Λύση: Αφού για την f: [0,3]→ IR ισχύει το Θ. Rolle στο [0,3] θα έχουμε ότι:
f(0)=f(3)...(1)
και ότι είναι συνεχής στο [0,3] και παραγωγίσιμη στο (0,3).
Επομένως εφαρμόζεται το **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα [0,1], [1,2] και [2,3] επομένως υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$, $\xi_2\in(1,2)$ και $\xi_3\in(2,3)$ τέτοια ώστε:

$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0)$. ....(2)

$f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1)$. ....(3)

$f'(\xi_3) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = f(3)-f(2)$. ....(4)

(2)+(3)+(4) ⇒ $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=\cancel{f(3)}-\cancel{f(0)}$
=0
λόγω της (1).

9. Εάν 0≤x≤1, να δείξετε ότι $\frac{x}{2} \le ln(x+1) \le x$

Λύση:
- Εάν x=0 η προς απόδειξη σχέση γίνεται 0≤0≤0 που ισχύει.
- 0<x≤1. Τότε η προς απόδειξη σχέση γίνεται $\frac{1}{2} \le \frac{ln(x+1)}{x} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{ln(x+1)-ln\,1}{x+1-1} \le 1$.

Άρα εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f(x)=lnx στο διάστημα [1,x+1].
- Συνεχής στο [1,x+1] ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Παραγωγίσιμη στο (1,x+1) με f΄(x)=$\frac{1}{x}$.

Επομένως υπάρχει ξ∈(1,x+1) με

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(1)}{x+1-1}=\frac{ln(x+1)-ln\,1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{ln(x+1)}{x}\text{..................................(1)}$$

ξ∈(1,x+1) ⇔ 1≤ξ≤x+1

⇔ $1\geq\frac{1}{\xi}\geq\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{2}$ ← Γιατί x≤1

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}\leq\frac{ln(x+1)}{x}\leq 1.$$

10. Εάν –π/4<α<β<π/4, να δείξετε ότι:
(β-α)ημ2α<ημ²β-ημ²α<(β-α)ημ2β.

Λύση: Η συνάρτηση f(x)=ημ²x είναι ορισμένη και συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) με f΄(x)=2ημxσυνx=ημ2x.
Άρα (**Θ.Μ.Τ.**) υπάρχει ξ∈(α,β) με:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 2\xi=\frac{\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\alpha}{\beta-\alpha}\text{.........................(1)}$$

ξ∈(α,β) ⇔ α<ξ<β

⇔ 2α<2ξ<2β

⇔ ημ2α<ημ2ξ<ημ2β ← Γιατί –π/4<α<β<π/4 ⇔ –π/2<2α<2β<π/2 και η f(x)=ημ2x είναι ↗

⇔ ημ2α<$\frac{\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\alpha}{\beta-\alpha}$<ημ2β

⇔ (β-α)ημ2α<ημ²β-ημ²α<(β-α)ημ2β.

11. Έστω f:[α,β]→ IR, με f([α,β])=(0,+∞), συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α,β), τέτοιο ώστε $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=e^{\lambda(\beta-\alpha)}$, όπου $\lambda=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$.

Λύση: Επειδή f(x)>0 για κάθε x, διαμορφώνουμε την αποδεικτέα σχέση λογαριθμίζοντας:

$$ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\lambda(\beta-\alpha)\Leftrightarrow$$

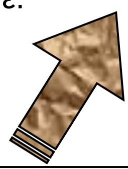
$$ln\,f(\beta)-ln\,f(\alpha)=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(\beta-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\frac{ln\,f(\beta)-ln\,f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}.$$

Η συνάρτηση F(x)=lnf(x) είναι ορισμένη και συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) με F΄(x)=$\frac{f'(x)}{f(x)}$.
Άρα (**Θ.Μ.Τ.**) υπάρχει ξ∈(α,β) με:

$$F'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{ln\,f(\beta)-ln\,f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



12. Έστω f: (0,+∞)→R, συνεχής, παραγωγίσιμη και f ΄ γνησίως αύξουσα στο (0,+∞). Εάν υπάρχουν α,β,γ,δ∈(0,+∞), με α<β<γ<δ και α+δ=β+γ, να δείξετε ότι f(β)+f(γ)<f(α)+f(δ).

Λύση: α+δ=β+γ ⇔ β-α=δ-γ..................(1)

f συνεχής στα [α,β], [γ,δ], παραγωγίσιμη στα (α,β), (γ,δ) από υπόθεση. Επομένως εφαρμόζεται το **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f στα διαστήματα [α,β] και [γ,δ].
Άρα υπάρχουν x_1∈(α,β) και x_2∈(γ,δ) με:

$$f'(x_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\text{.........................(2)}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}\text{.........................(3)}$$

α<x_1<β<γ<x_2<δ ⇔

x_1<x_2 ⇔ ← Γιατί f ΄ ↗

f΄(x_1)<f΄(x_2) $\overset{(2),(3)}{<=>}$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\cancel{\beta-\alpha}}<\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\cancel{\delta-\gamma}}\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

f(β)-f(α)<f(δ)-f(γ) ⇔

f(β)+f(γ)<f(α)+f(δ).

13. Εάν x∈(0,π/2), να δείξετε ότι:
Ι. εφx+2ημx>3x
ΙΙ. συνx+xημx>1.

Λύση:

Ι. Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f(x)=εφx+2ημx-3x στο διάστημα [0,x].
Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με f΄(x)=$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$+2συνx-3 οπότε υπάρχει ξ∈(0,x) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}+2\sigma\upsilon\nu\xi-3=\frac{\varepsilon\varphi x+2\eta\mu x-3x}{x}\text{.......(1)}$$

$$f''(x)=-\frac{2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^4x}-2\eta\mu x$$

$$=\frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3x}-2\eta\mu x$$

$$=\frac{2\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu^3x)}{\sigma\upsilon\nu^3x}>0 \text{ γιατί ημx>0,}$$

συνx>0 αφού x∈(0,π/2) και 1-συν³x>0.
Άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα...........(2)

ξ∈(0,x) ⇒ ξ>0

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$f΄(ξ)>f΄(0)

⇔ $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}+2\sigma\upsilon\nu\xi-3>0$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $\frac{\varepsilon\varphi x+2\eta\mu x-3x}{x}>0$

⇔ εφx+2ημx-3x>0.....γιατί x>0

⇔ εφx+2ημx>3x

ΙΙ. Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f(x)=συνx+xημx-1 στο διάστημα [0,x].
Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με f΄(x)= $\cancel{-\eta\mu x}\cancel{+\eta\mu x}$+xσυνx= =xσυνx οπότε υπάρχει ξ∈(0,x) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$\Leftrightarrow \xi\sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x - 1}{x}$ ....(1)

Επειδή ξ∈(0,x)⊆(0,$^{\pi}/_{2}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \xi > 0 \\ \sigma\upsilon\nu\xi > 0 \end{cases}$ άρα

ξσυνξ>0 $\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x - 1}{x} > 0$

$\underset{x>0}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x - 1 > 0$

⇒ συνx+xημx>1.

14. Εάν x≥0, να δείξετε ότι:

$1+\ln 2^x \le 2^x \le 1+2^x\ln 2^x$.

Λύση:

- για x=0 η σχέση γίνεται 1≤1≤1 που ισχύει.
- για x>0 εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση $f(x)=2^x$ στο διάστημα [0,x].

Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με $f'(x)=2^x\ln 2$ οπότε υπάρχει ξ∈(0,x) τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow 2^{\xi}\ln 2 = \frac{2^x - 2^0}{x-0}$

$\Leftrightarrow 2^{\xi}\ln 2 = \frac{2^x - 1}{x}$......(1)

Επειδή ξ∈(0,x) ⇔ 0<ξ<x

$\Leftrightarrow 2^0 < 2^{\xi} < 2^x$

$\overset{\ln 2 > \ln 1 = 0}{\Longleftrightarrow} \ln 2 < 2^{\xi}\ln 2 < 2^x\ln 2$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ln 2 < \frac{2^x - 1}{x} < 2^x\ln 2$

$\Leftrightarrow 1+x\ln 2 < 2^x < 1+x2^x\ln 2$

$\Leftrightarrow 1+\ln 2^x < 2^x < 1+2^x\ln 2^x$.

15. Για x>0, να δείξετε ότι xlnx ≥ x-1.

Λύση:

- Για x=1 η σχέση γίνεται 0≥0 που ισχύει.
- 0<x<1.

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f(x)=xlnx-x+1 στο διάστημα [x,1].

Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με f΄(x)=lnx οπότε υπάρχει ξ∈(x,1) τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \Leftrightarrow$

$\ln\xi = \frac{x\ln x - x + 1}{x-1}$ ....(1)

Επειδή ξ∈(x,1) ⇔ x<ξ<1

$\Leftrightarrow \ln x < \ln\xi < \cancel{\ln 1}^{\,0}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x\ln x - x + 1}{x-1} < 0 \\ x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

⇒ xlnx-x+1>0 ⇒ xlnx>x-1.

- x>1.

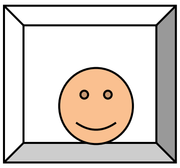
Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f(x)=xlnx-x+1 στο διάστημα [1,x].

Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με f΄(x)=lnx οπότε υπάρχει ξ∈(1,x) τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\ln\xi = \frac{x\ln x - x + 1}{x-1}$ ....(2)

Επειδή ξ∈(1,x) ⇔ 1<ξ<x



$\Leftrightarrow \cancel{\ln 1}^{\,0} < \ln\xi < \ln x$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x\ln x - x + 1}{x-1} > 0 \\ x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

⇒ xlnx-x+1>0 ⇒ xlnx>x-1.

16. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR, με f΄΄(x)≠0, για κάθε x∈IR. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης της f που να είναι συνευθειακά.

Λύση: Εάν υπήρχαν τρία σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ της γραφικής παράστασης της f συνευθειακά, τότε:

$\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$...(1)

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1<x_2<x_3$.

Η f ικανοποιεί τις συνθήκες του **Θ.Μ.Τ.** (?) στα διαστήματα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$.

Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ με:

$\left. \begin{array}{l} f'(\xi_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ f'(\xi_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{array} \right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ ...(2)

Από την (2) και επειδή f δυο φορές παραγωγίσιμη, εφαρμόζεται το Θ **Rolle** για την f΄ στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(\xi_1,\xi_2)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$, άτοπο γιατί f΄΄(x)≠0, για κάθε x∈R.

Άρα δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης της f που να είναι συνευθειακά.

17. Να δείξετε ότι για κάθε 0 < x < π/2, ισχύει:

$$1 < \frac{\varepsilon\varphi x}{x} < 1 + \varepsilon\varphi^2 x$$

Λύση: Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f(x)=εφx στο διάστημα [0,x].

Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ οπότε υπάρχει ξ∈(0,x) τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi} = \frac{\varepsilon\varphi x - \cancel{\varepsilon\varphi 0}^{\,0}}{x-0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi} = \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$......(1)

Επειδή ξ∈(0,x)⊆(0,$^{\pi}/_{2}$) θα έχουμε:

$0<\xi<x \overset{\sigma\tau o \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \; \sigma\upsilon\nu\chi \downarrow}{\Longleftrightarrow}$ συν0>συνξ>συνx

⇔ 1>συνξ>συνx

$\Leftrightarrow 1>συν^2ξ>συν^2x$

$\Leftrightarrow 1<\frac{1}{συν^2ξ}<\frac{1}{συν^2x}$

$\Leftrightarrow 1<\frac{1}{συν^2ξ}<1+εφ^2x$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1<\frac{εφx}{x}<1+εφ^2x$

18. Έστω f συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α)=2β και f(β)=2α. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α,β), τέτοιο ώστε η εφα-πτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M(ξ,f(ξ)), είναι κάθετη στην ευθεία (ε): –x+2y-1=0.

Λύση: $λ_ε=½$.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ξ∈(α,β), τέτοιο ώστε $f΄(ξ)\cdot\frac{1}{2}= -1 \Leftrightarrow f΄(ξ)= -2$……..(1)

Εφαρμόζουμε το **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f στο διάστημα [α,β].

Είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) από υπόθεση. Άρα υπάρχει ξ∈(α,β) με

$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$

$$f'(\xi)=\frac{2\alpha-2\beta}{\beta-\alpha}=-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=-2.$$

19. Να δείξετε ότι για κάθε x∈IR, $e^x \geq x+1$.

Λύση:

• για x=0 η σχέση γίνεται 1≥1 που ισχύει.

• x>0. Τότε εφαρμόζουμε το **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση $f(x)=e^x$ στο διάστημα [0,x].
Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με $f΄(x)=e^x$ οπότε υπάρχει ξ∈(0,x) τέτοιο ώστε:

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-e^0}{x}$

$\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-1}{x}$……(1)

Επειδή ξ∈(0,x) ⇔ $e^0<e^ξ<e^x$

⇔ $1<e^ξ<e^x$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1<\frac{e^x-1}{x}<e^x$

⇒ $e^x-1>x$………γιατί x>0

⇒ $e^x>x+1$.

• x<0. Τότε εφαρμόζουμε το **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση $f(x)=e^x$ στο διάστημα [x,0].
Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, με $f΄(x)=e^x$ οπότε υπάρχει ξ∈(x,0) τέτοιο ώστε:

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-e^0}{x}$

$\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-1}{x}$……(2)

Επειδή ξ∈(x,0) ⇔ $e^x<e^ξ<e^0$

⇔ $e^x<e^ξ<1$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} e^x<\frac{e^x-1}{x}<1$

⇒ $e^x-1>x$………γιατί x<0

⇒ $e^x>x+1$.

Άρα $e^x \geq x+1$ για κάθε x∈IR.

20. Έστω f: [0,+∞)→ IR, συνεχής στο [0,+∞), παραγωγίσιμη στο (0,+∞), f(0)=0 και f΄ γνησίως αύξουσα στο [0,+∞). Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

Λύση: $g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $xf΄(x)-f(x)>0$

ή $\frac{f(x)}{x}<f'(x)$ ή $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<f'(x)$.

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για την συνάρτηση f(x) στο διάστημα [0,x].
Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, οπότε υπάρχει ξ∈(0,x) τέτοιο ώστε:

$f'(\xi)=\frac{f(x)-\cancel{f(0)}^{\,0}}{x}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)}{x}$……(1)

Επειδή ξ∈(0,x) ⇒ ξ<x

$\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}$ f΄(ξ)<f΄(x)

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{x}<f'(x)$

⇒ xf΄(x)-f(x)>0

⇒ g΄(x)>0

Άρα η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

21. 24283-2 (τράπεζα): Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x\in[-1,2] \\ x-1, & \text{αν } x\in 2,5 \end{cases}.$$

1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$. (Μονάδες 09)

3) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$. (Μονάδες 06)

Λύση:

α) • Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα [1,2), (2,5] ως πολυωνυμική.

• Στο $x_0 = 2$ έχουμε:

$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2-3)=1.$

$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x-1)=1.$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, η f είναι συνεχής στο 2.
Επομένως, η f είναι συνεχής στο [1,5] .

β) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3-1}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} (x+2)$$
$$= 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1-1}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2}$$
$$= 1.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση 2.

γ) Η υπόθεση της συνέχειας στο [-1,5] ικανοποιείται λόγω του ερωτήματος (α) ενώ η υπόθεση της παραγωγισιμότητας στο (-1,5) δεν ικανοποιείται λόγω του ερωτήματος (β).
Άρα το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα [-1,5] δεν εφαρμόζεται.

22. END.