ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ X_0
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{|x|}\right)$ ix) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{3-x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{|x|}\right)$ x) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

iii) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3-x}{\eta\mu x}$ vii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$ xi) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-x}{x^2+4x+4}$

iv) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ viii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)^3}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=-\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^2}=-\infty.$

Θέτω u=x-1. Τότε $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}.$

Θα βρούμε πλευρικά όρια.

- Όταν $x\to 1^-$ τότε $x<1 \Rightarrow x-1<0$ και $\dfrac{1}{x-1}<0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=2\cdot(-\infty)=-\infty.$ .... (1)
- Όταν $x\to 1^+$ τότε $x>1 \Rightarrow x-1>0$ και $\dfrac{1}{x-1}>0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=2\cdot(+\infty)=+\infty.$ .... (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

iii) Από το πρόσημο του ημιτόνου, βλέπουμε ότι εκατέρωθεν του π, το ημίτονο αλλάζει πρόσημο. Άρα θα βρούμε πλευρικά όρια.

x	0 π	2π
ημx	+	-

- Όταν $x\to\pi^-$ τότε $3<x<\pi \Rightarrow \eta\mu x>0$ και $3-x<0$ οπότε $\dfrac{3-x}{\eta\mu x}<0$ επομένως $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{3-x}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}-\infty.$(1)
- Όταν $x\to\pi^+$ τότε $\pi<x<2\pi\Rightarrow\eta\mu x<0$ και $3-x<0$ οπότε $\dfrac{3-x}{\eta\mu x}>0$ επομένως $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{3-x}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}+\infty.$(2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3-x}{\eta\mu x}$.

iv) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\left(1-\sqrt{\pi}\right)\cdot(+\infty)=-\infty$, γιατί $1-\sqrt{\pi}<0$ και 1+συνx > 0 αφού κοντά στο π είναι συνx > -1.

v) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{|x|}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}+\infty+\infty=+\infty.$

vi) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{|x|}$=απροσδιόριστη μορφή $(+\infty-\infty)$.

Επειδή $|x|=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0\\ -x, & \text{αν } x<0\end{cases}$, θα βρούμε πλευρικά όρια.

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x^2}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^-}(x+1)\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}=1\cdot(+\infty)=+\infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}(1-x)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=1\cdot(+\infty)=+\infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Από (1) και (2) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=+\infty.$

2^{ος} τρόπος: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-|x|}{|x|^2}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}(1-|x|)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{|x|^2}=1\cdot(+\infty)=+\infty$.

vii) Το πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$, οπότε $x>0$.. (1)

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sqrt{x}-1}{x}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(\sqrt{x}-1)\cdot\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\overset{(1)}{=}-1(+\infty)=-\infty.$$

viii) Το πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$, οπότε $x>0$.. (1)

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{\substack{x\to0\\x>0\\|x|=x}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-\sqrt{x}}{x}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(1-\sqrt{x})\cdot\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\overset{(1)}{=}1(+\infty)=+\infty.$$

ix) Επειδή εκατέρωθεν του 3, το 3-x αλλάζει πρόσημο, θα βρούμε πλευρικά όρια:

- $x<3$. Τότε επειδή το x είναι κοντά στο 3, $1<x<3$, οπότε $3-x>0$, $x-1>0$ άρα $\frac{x-1}{3-x}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-1}{3-x}=+\infty.$ .... (1)

- $x>3$. Τότε $3-x<0$, $x>3>1 \Rightarrow x-1>0$ άρα $\frac{x-1}{3-x}<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-1}{3-x}=-\infty.$ .... (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-1}{3-x}$.

x) Το όριο είναι μορφής $\frac{a}{0}$ και όπως βλέπουμε στον πίνακα πρόσημου του x^2-5x+6 εκατέρωθεν του 2 αλλάζει πρόσημο, θα βρούμε πλευρικά όρια:

x	-∞ ⟶ 2 ⟵	3	+∞
x^2-5x+6	+	-	+

- όταν $x<2$, τότε κοντά στο 2 είναι $2<x<3$ άρα $x>0$, $x^2-5x+6<0$ και επομένως $\frac{x}{x^2-5x+6}<0$

και $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x}{x^2-5x+6}=+\infty$ .... (1)

- όταν $x>2$, τότε $x>0$, $x^2-5x+6>0$ και επομένως $\frac{x}{x^2-5x+6}>0$ και $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x}{x^2-5x+6}=-\infty$ ... (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}\frac{x}{x^2-5x+6}$.

xi) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1-x}{x^2+4x+4}\overset{\left(\frac{3}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1-x}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to-2}(1-x)\cdot\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{(x+2)^2}=3\cdot(+\infty)=+\infty.$

2. *Ομοίως:*

i) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

Λύση: i) $\eta\mu\dfrac{1}{x}\le1\Leftrightarrow$

$-\eta\mu\dfrac{1}{x}\ge-1\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\ge\frac{1}{x}-1\\ \text{\& επειδή}\quad&\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)=+\infty\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{παρατήρηση 9}}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

ii) <u>*Σκέψη:*</u> Το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=}+\infty$ και το $\lim\limits_{x\to0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$, ως γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη. Άρα $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$=+∞-0=+∞.

$\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le1\Leftrightarrow$

$|x|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow$

$\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&-|x|\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|\\ &\lim_{x\to0}(-|x|)=0\\ &\lim_{x\to0}(|x|)=0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{κριτ. παρεμβ}}\lim_{x\to0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.\ \ldots\ldots\ (1)$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=}+\infty$ .... (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$=+∞-0=+∞.

3. *Βρείτε το* $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ ***στις παρακάτω περιπτώσεις :***

i) $\lim\limits_{x\to-1}(xf(x)+2)=+\infty$ iii) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x^2-2}=-\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{xf(x)}=\pm\infty$ iv) $\lim\limits_{x\to-1}((x^2-2)f(x))=+\infty$

Λύση: i) Θέτω g(x)=xf(x)+2.

Τότε $\lim\limits_{x\to-1}g(x)=+\infty$ ....(1)

και αφού x→ -1, είναι x≠0 και $f(x)=\dfrac{g(x)-2}{x}$

οπότε $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to-1}\big(g(x)-2\big)\overset{(1)}{=}$ -1·(+∞-2)= -1·(+∞)= -∞.

ii) Θέτω $g(x)=\dfrac{2x+1}{xf(x)}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=\pm\infty$ ....(1)

και αφού x→ -1, είναι x≠0, x≠ $-{}^{1}/_{2}$ ⇒ g(x) ≠0 και $f(x)=\dfrac{2x+1}{xg(x)}$

οπότε $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{xg(x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x+1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{g(x)}=1\cdot 0=0.$

iii) Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2-2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=-\infty$ ....(1)

και $f(x)=(x^2-2)g(x)$

οπότε $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\big((x^2-2)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to-1}(x^2-2)\cdot\lim\limits_{x\to-1} g(x)=-1\cdot(-\infty)=+\infty.$

iv) Θέτω $g(x)=(x^2-2)f(x)$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=+\infty$ ....(1)

και αφού x→ -1 είναι x≠ $\sqrt{2}$ και $x^2\neq 2$ ⇒ $x^2-2\neq 0$ ⇒ $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2-2}$

οπότε $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x^2-2}\cdot\lim\limits_{x\to-1} g(x)=-1\cdot(+\infty)=-\infty.$

4. ***Για τις διάφορες τιμές των α, β∈R, να υπολογίσετε τα όρια:***

i) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-\alpha}{|x-4|}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\alpha x+a}{|x-a|}$

ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-a|}$

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-\alpha}{|x-4|}=\dfrac{16-a}{0}$.

- Εάν α=16 τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to4^-}\frac{x^2-16}{|x-4|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to4^-}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=-\lim_{x\to4^-}(x+4)=-8 \quad\text{.. (1)}$$

όταν x→ 4^-, τότε x<4 ⇔ x-4<0 ⇔ |x-4|=-(x-4)

$$\lim_{x\to4^+}\frac{x^2-16}{|x-4|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to4^+}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=\lim_{x\to4^+}(x+4)=8 \quad\text{.. (2)}$$

όταν x→ 4^+, τότε x>4 ⇔ x-4>0 ⇔ |x-4|=x-4

Από (1) και (2) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-\alpha}{|x-4|}$, όταν α=16.

- Εάν α≠16 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-\alpha}{|x-4|}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{x\to4}(x^2-\alpha)\cdot\lim_{x\to4}\frac{1}{|x-4|}=(16-\alpha)(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \text{εαν } \alpha<16\\ -\infty, & \text{εαν } \alpha>16\end{cases}.$$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}=\dfrac{-\beta}{0}$.

- Εάν **β=0** τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^2-4x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(\alpha x-4)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}(\alpha x-4)=-4.$$

- Εάν β≠0 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

1) **β<0**. Τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-4x-\beta\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=$ -β(-∞)=-∞ .... (1)

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha x^2-4x-\beta\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=$ -β(+∞)=+∞........................ (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}$ όταν β<0.

2) **β>0**. Τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-4x-\beta\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=$ -β(-∞)=+∞ .... (3)

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha x^2-4x-\beta\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=$ -β(+∞)=-∞........................ (4)

Από (3) και (4) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}$ όταν β>0.

iii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\alpha x+a}{|x-a|}=\dfrac{a^2-a^2+a}{0}=\dfrac{a}{0}$.

- Εάν α=0 τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-\alpha x+a}{|x-a|}\overset{(a=0)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{|x|^2}{|x|}=\lim_{x\to 0}|x|=|0|=0.$$

- Εάν α≠0 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-\alpha x+a}{|x-a|}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{x\to a}\left(x^2-\alpha x+a\right)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}=\alpha(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \text{εαν } \alpha>0\\ -\infty, & \text{εαν } \alpha<0\end{cases}.$$

iv) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-a|}=\dfrac{a^2-a^2+\beta}{0}=\dfrac{\beta}{0}$.

- Εάν **β=0** τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x^2-ax}{|x-a|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}=-\lim\limits_{x\to a^-}x=-a.$ ....(1)

$\boxed{\text{Όταν } x\to a^-\text{, τότε } x<a \Leftrightarrow x-a<0 \Leftrightarrow |x-a|=-(x-a)}$

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2-ax}{|x-a|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}=\lim\limits_{x\to a^+}x=a.$ ....(2)

$\boxed{\text{Όταν } x\to a^+\text{, τότε } x>a \Leftrightarrow x-a>0 \Leftrightarrow |x-a|=x-a}$

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-a|}$ όταν β=0.

- Εάν **β≠0** τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-a|}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim_{x\to a}\left(x^2-\alpha x+\beta\right)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}=\beta(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \text{εαν } \beta>0\\ -\infty, & \text{εαν } \beta<0\end{cases}.$$

5. Υπολογίστε τα α, β∈R, ώστε $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}=4.$

Λύση: i) Θέτω $f(x)=\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}$.

Τότε $\lim_{x\to -1}f(x)=4.$ .... (1)

και $x^3+\alpha x+\beta=(x+1)f(x)$ οπότε $\lim_{x\to -1}\left(x^3+\alpha x+\beta\right)=\lim_{x\to -1}[(x+1)f(x)]\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ -1-α+β=0·4 ⇔

β=α+1 .... (2)

Τότε το δοθέν όριο γίνεται

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+a+1}{x+1}=4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)+a(x+1)}{x+1}=4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1+a)}{x+1}=4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}(x^2-x+1+a)=4\Leftrightarrow$$

α+3=4 ⇔

α=1.

(2) ⇔ **β=2**.

2ος τρόπος: $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}=\frac{-1-a+\beta}{0}$.

Εάν -1-α+β≠0, τότε το παραπάνω όριο είναι μορφής α/0 επομένως $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}\notin R$, που απορρίπτεται γιατί $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}=4.$

Άρα -1-α+β=0 …….κλπ.

6. Υπολογίστε τα α, β∈R, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0}f(x)$**, της** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+\beta}{x^2-x}, & x<0\\ \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}, & x>0\end{cases}.$

Λύση: Πρέπει $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$ .... (1)

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+4-4}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{4}=0.$ .... (2)

$(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to 0^-}f(x)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+ax+\beta}{x^2-x}=0$ .... (3)

Θέτω $g(x)=\frac{x^2+ax+\beta}{x^2-x}$.

Τότε (3) ⇔ $\lim_{x\to 0^-}g(x)=0$ .... (4)

και $x^2+ax+\beta=(x^2-x)g(x)$ οπότε $\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+ax+\beta\right)=\lim_{x\to 0^-}\left((x^2-x)g(x)\right)\overset{(4)}{\Leftrightarrow}$ **β=0**

(3) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+ax}{x^2-x}=0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+a)}{x(x-1)}=0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+a}{x-1}=0 \Leftrightarrow$ **α=0**.

7. Υπολογίστε τα κ, λ∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-\kappa x-\lambda}$, να έχει μη πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=-3$.

Λύση: Επειδή $x^2+3\neq 0$ για κάθε x∈R, για να είναι το όριο μη πεπερασμένο, θα πρέπει να είναι της μορφής α/0, δηλαδή ο παρονομαστής να έχει ρίζες τα 2 και -3.
Από τους τύπους **Vietá** πρέπει:
$S=x_1+x_2=-\beta/\alpha \Leftrightarrow 2-3=\kappa \Leftrightarrow$ **κ=-1**.
$P=x_1x_2=\gamma/\alpha \Leftrightarrow 2(-3)=-\lambda \Leftrightarrow$ **λ=6**.

Τότε $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+x-6}$ και ακολουθεί υπολογισμός πλευρικών ορίων στα 2 και -3 για επαλήθευση. (εδώ παραλείπεται ως εύκολη).

8. Υπολογίστε το α∈R, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+\alpha x^2+5x-2}{(x-1)^2}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση: Θέτω $g(x)=\dfrac{x^3+\alpha x^2+5x-2}{(x-1)^2}$

Τότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+\alpha x^2+5x-2}{(x-1)^2}=l\in R$ .... (1)

και $x^3+\alpha x^2+5x-2=(x-1)^2 g(x)$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+\alpha x^2+5x-2\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)^2 g(x)\right]\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$1+a+5-2=0\cdot l \Leftrightarrow$ **α=-4**.

9. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει λ∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda x^2+x-6}{|x-2|}$, να έχει όριο στο $x_0=2$ πραγματικό αριθμό.

Λύση: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\lambda x^2+x-6}{|x-2|}=\dfrac{4\lambda-4}{0}$.

Εάν λ≠1 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφής $^{\alpha}/_{0}$ που δίνει μη πεπερασμένο όριο.
Άρα η μοναδική περίπτωση που μπορεί το όριο να είναι πεπερασμένο, είναι όταν λ=1.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\overset{\lambda=1}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{|x-2|}$.

Δ=25, $x_1=2$, $x_2=-3$

Επειδή $\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}\dfrac{(x-2)(x+3)}{|x-2|}=-\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=-\lim\limits_{x\to 2^-}(x+3)=-5$

και $\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}}\dfrac{(x-2)(x+3)}{|x-2|}=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x<2}}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+3)=5$,

έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ όταν λ=1.

Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda x^2+x-6}{|x-2|}$, να έχει όριο στο $x_0=2$ πραγματικό αριθμό.