ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ X_0
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{|x|}\right)$ ix) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{3-x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)$ x) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x^2-5x+6}$

iii) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{3-x}{\eta\mu x}$ vii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)$ xi) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-x}{x^2+4x+4}$

iv) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ viii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)^3}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=-\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u^2}=-\infty$.

Θέτω u=x-1. Τότε $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$.

Θα βρούμε πλευρικά όρια.

- Όταν $x\to 1^-$ τότε $x<1 \Rightarrow x-1<0$ και $\frac{1}{x-1}<0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=2\cdot(-\infty)=-\infty$.......... (1)
- Όταν $x\to 1^+$ τότε $x>1 \Rightarrow x-1>0$ και $\frac{1}{x-1}>0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=2\cdot(+\infty)=+\infty$.......... (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

iii) Από το πρόσημο του ημιτόνου, βλέπουμε ότι εκατέρωθεν του π, το ημίτονο αλλάζει πρόσημο. Άρα θα βρούμε πλευρικά όρια.

x	0 π	2π
ημx	+	-

- Όταν $x\to \pi^-$ τότε $3<x<\pi \Rightarrow \eta\mu x>0$ και $3-x<0$ οπότε $\frac{3-x}{\eta\mu x}<0$ επομένως $\lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{3-x}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}-\infty$. (1)
- Όταν $x\to \pi^+$ τότε $\pi<x<2\pi \Rightarrow \eta\mu x<0$ και $3-x<0$ οπότε $\frac{3-x}{\eta\mu x}>0$ επομένως $\lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{3-x}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}+\infty$.(2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{3-x}{\eta\mu x}$.

iv) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to \pi}\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\left(1-\sqrt{\pi}\right)\cdot(+\infty)=-\infty$, γιατί $1-\sqrt{\pi}<0$ και 1+συνx > 0 αφού κοντά στο π είναι συνx > -1.

v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}+\infty+\infty=+\infty$.

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$ = απροσδιόριστη μορφή (+∞-∞).

Επειδή $|x|=\begin{cases}x, & \text{αν } x\geq 0\\ -x, & \text{αν } x<0\end{cases}$, θα βρούμε πλευρικά όρια.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^2}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=1\cdot(+\infty)=$ $+\infty$.................(1)

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=1\cdot(+\infty)=$ $+\infty$.................(2)

Από (1) και (2) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right)=+\infty$.

2^ος^ τρόπος: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{|x|}\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|^2}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-|x|}{|x|^2} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to0}(1-|x|)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{|x|^2}=1\cdot(+\infty)=+\infty$.

vii) Το πεδίο ορισμού είναι το (0, +∞), οπότε x>0…………………………………………………… (1)

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sqrt{x}-1}{x} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x} \overset{(1)}{=} -1(+\infty)=-\infty.$$

viii) Το πεδίο ορισμού είναι το (0, +∞), οπότε x>0……………………………………………………. (1)

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{\substack{x\to0\\x>0\\|x|=x}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-\sqrt{x}}{x} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x} \overset{(1)}{=} 1(+\infty)=+\infty.$$

ix) Επειδή εκατέρωθεν του 3, το 3-x αλλάζει πρόσημο, θα βρούμε πλευρικά όρια:

- x<3. Τότε επειδή το x είναι κοντά στο 3, 1<x<3, οπότε 3-x>0, x-1>0 άρα $\frac{x-1}{3-x}>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-1}{3-x}=+\infty$. ……………………………………………………………………………… (1)
- x>3. Τότε 3-x<0, x>3>1 ⇒ x-1>0 άρα $\frac{x-1}{3-x}<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-1}{3-x}=-\infty$.……………………………… (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-1}{3-x}$.

x) Το όριο είναι μορφής $\frac{a}{0}$ και όπως βλέπουμε στον πίνακα πρόσημου του x^2-5x+6 εκατέρωθεν του 2 αλλάζει πρόσημο, θα βρούμε πλευρικά όρια:

x	-∞ → 2 ←	3	+∞
x^2-5x+6	+	-	+

- όταν x<2, τότε κοντά στο 2 είναι 2<x<3 άρα x>0, x^2-5x+6>0 και επομένως $\frac{x}{x^2-5x+6}>0$ και $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x}{x^2-5x+6}=+\infty$…………………………………………………………………………………… (1)
- όταν x>2, τότε x>0, x^2-5x+6<0 και επομένως $\frac{x}{x^2-5x+6}<0$ και $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x}{x^2-5x+6}=-\infty$ …….. (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}\frac{x}{x^2-5x+6}$.

xi) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{1-x}{x^2+4x+4} \overset{\left(\frac{3}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-2}\frac{1-x}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to-2}(1-x)\cdot\lim\limits_{x\to-2}\frac{1}{(x+2)^2}=3\cdot(+\infty)=+\infty$.

2. Ομοίως:

i) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

Λύση: i) $\eta\mu\frac{1}{x}\le1\Leftrightarrow$

$-\eta\mu\frac{1}{x}\ge-1\Leftrightarrow$

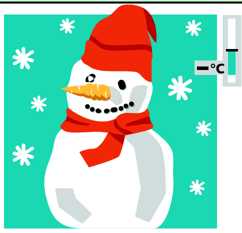
$$\&\ \text{επειδή}\ \left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\ge\frac{1}{x}-1\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)=+\infty\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{παρατήρηση}\quad 9}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

ii) Σκέψη: Το $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2} \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} +\infty$ και το $\lim\limits_{x\to0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$, ως γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη. Άρα $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$=+∞-0=+∞.

$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le1\Leftrightarrow$

$|x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow$

$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow$



$$\left.\begin{array}{l} -|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x| \\ \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}(|x|) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{κριτ. παρεμβ.}} \lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0. \ldots\ldots (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} +\infty \ldots\ldots (2)$$

Από (1) και (2) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$=+∞-0=+∞.

3. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i) $\lim\limits_{x\to -1}(xf(x)+2) = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{xf(x)} = \pm\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-2} = -\infty$

iv) $\lim\limits_{x\to -1}((x^2-2)f(x)) = +\infty$

Λύση: i) Θέτω g(x)=xf(x)+2.

Τότε $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = +\infty$……(1)

και αφού x→ -1, είναι x≠0 και $f(x) = \frac{g(x)-2}{x}$

οπότε $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)-2}{x} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to -1}(g(x)-2) \overset{(1)}{=}$ -1·(+∞-2)= -1·(+∞)= -∞.

ii) Θέτω $g(x) = \frac{2x+1}{xf(x)}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \pm\infty$……(1)

και αφού x→ -1, είναι x≠0, x≠ -1/2 ⇒ g(x) ≠0 και $f(x) = \frac{2x+1}{xg(x)}$

οπότε $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{xg(x)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{g(x)} = 1\cdot 0 = 0.$

iii) Θέτω $g(x) = \frac{f(x)}{x^2-2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty$……(1)

και f(x)=(x²-2)g(x)

οπότε $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}((x^2-2)g(x)) = \lim\limits_{x\to -1}(x^2-2)\cdot\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -1\cdot(-\infty) = +\infty.$

iv) Θέτω $g(x) = (x^2-2)f(x)$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = +\infty$……(1)

και αφού x→ -1 είναι x≠$\sqrt{2}$ και x²≠2 ⇒ x²-2≠0 ⇒$f(x) = \frac{g(x)}{x^2-2}$

οπότε $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x^2-2}\cdot\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -1\cdot(+\infty) = -\infty.$

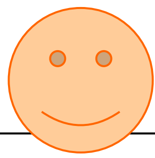
4. Για τις διάφορες τιμές των α, β∈IR, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-\alpha}{|x-4|}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to \alpha}\frac{x^2-\alpha x+\alpha}{|x-\alpha|}$

iv) $\lim\limits_{x\to \alpha}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-\alpha|}$



Λύση: i) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-\alpha}{|x-4|} = \frac{16-\alpha}{0}$.

- Εάν α=16 τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-16}{|x-4|} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\lim_{x\to 4^-}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}} = -\lim_{x\to 4^-}(x+4) = -8 \ldots\ldots (1)$$

όταν x→ 4⁻, τότε x<4 ⇔ x-4<0 ⇔ |x-4|=-(x-4)

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-16}{|x-4|} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4^+}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4^+}(x+4) = 8 \ldots\ldots (2)$$

όταν x→ 4⁺, τότε x>4 ⇔ x-4>0 ⇔ |x-4|=x-4

Από (1) και (2) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-\alpha}{|x-4|}$, όταν α=16.

- Εάν α≠16 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-\alpha}{|x-4|}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to4}(x^2-\alpha)\cdot\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{|x-4|}$ = (16-α)(+∞)= $\begin{cases}+\infty, & \text{εαν } \alpha<16\\ -\infty, & \text{εαν } \alpha>16\end{cases}$.

ii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}=\frac{-\beta}{0}$.

- Εάν **β=0** τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha x^2-4x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cancel{x}(\alpha x-4)}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to0}(\alpha x-4)=-4.$

- Εάν β≠0 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

  1) **β<0**. Τότε $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^-}(\alpha x^2-4x-\beta)\cdot\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}$ = -β(-∞)=-∞ .... (1)

  και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}(\alpha x^2-4x-\beta)\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}$ = -β(+∞)=+∞ .... (2)

  Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}$ όταν β<0.

  2) **β>0**. Τότε $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^-}(\alpha x^2-4x-\beta)\cdot\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}$ = -β(-∞)=+∞ .... (3)

  και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}(\alpha x^2-4x-\beta)\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}$ = -β(+∞)=-∞ .... (4)

Από (3) και (4) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha x^2-4x-\beta}{x}$ όταν β>0.

iii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha x+\alpha}{|x-\alpha|}=\frac{\alpha^2-\alpha^2+\alpha}{0}=\frac{\alpha}{0}$.

- Εάν α=0 τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha x+\alpha}{|x-\alpha|}\overset{(\alpha=0)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|^2}{|x|}=\lim\limits_{x\to0}|x|=|0|=0.$

- Εάν α≠0 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha x+\alpha}{|x-\alpha|}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}(x^2-\alpha x+\alpha)\cdot\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{|x-\alpha|}$ = α(+∞)= $\begin{cases}+\infty, & \text{εάν } \alpha>0\\ -\infty, & \text{εάν } \alpha<0\end{cases}$.

iv) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-\alpha|}=\frac{\alpha^2-\alpha^2+\beta}{0}=\frac{\beta}{0}$.

- Εάν **β=0** τότε το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{x\to\alpha^-}\frac{x^2-\alpha x}{|x-\alpha|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim\limits_{x\to\alpha^-}\frac{x\cancel{(x-\alpha)}}{\cancel{x-\alpha}}=-\lim\limits_{x\to\alpha^-}x=-\alpha.$ ....(1)

Όταν x→α⁻, τότε x<α ⇔ x-α<0 ⇔ |x-α|=-(x-α)

$\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{x^2-\alpha x}{|x-\alpha|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{x\cancel{(x-\alpha)}}{\cancel{x-\alpha}}=\lim\limits_{x\to\alpha^+}x=\alpha.$ ....(2)

Όταν x→α⁺, τότε x>α ⇔ x-α>0 ⇔ |x-α|=x-α

Από (1) και (2) έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-\alpha|}$ όταν β=0.

- Εάν **β≠0** τότε το παραπάνω όριο είναι μορφή α/0 και το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{|x-\alpha|}\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}(x^2-\alpha x+\beta)\cdot\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{|x-\alpha|}$ = β(+∞)= $\begin{cases}+\infty, & \text{εάν } \beta>0\\ -\infty, & \text{εάν } \beta<0\end{cases}$.

5. Υπολογίστε τα α, β∈IR, ώστε $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}=4.$

Λύση: **i)** Θέτω $f(x)=\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$. .... (1)

και $x^3+\alpha x+\beta=(x+1)f(x)$ οπότε $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+\alpha x+\beta)=\lim\limits_{x\to -1}[(x+1)f(x)] \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$-1-α+β=0·4 $\Leftrightarrow$

β=α+1 .... (2)

Τότε το δοθέν όριο γίνεται

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\alpha+1}{x+1}=4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)+\alpha(x+1)}{x+1}=4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1+\alpha)}{x+1}=4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}(x^2-x+1+\alpha)=4\Leftrightarrow$$

α+3=4 $\Leftrightarrow$

α=1.

(2) $\Leftrightarrow$ **β=2**.

2ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}=\frac{-1-\alpha+\beta}{0}$.

Εάν -1-α+β≠0, τότε το παραπάνω όριο είναι μορφής α/0 επομένως $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}\notin R$, που απορρίπτεται γιατί $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+\alpha x+\beta}{x+1}=4$.

Άρα -1-α+β=0 …….κλπ.

6. Υπολογίστε τα α, β∈IR, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}$f(x), της $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-x}, & x<0\\ \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}, & x>0\end{cases}$.

Λύση: Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ .... (1)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+4-4}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{4}=0.$$ .... (2)

$(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-x}=0$ .... (3)

Θέτω $g(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-x}$.

Τότε (3) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0$ .... (4)

και $x^2+\alpha x+\beta=(x^2-x)g(x)$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+\alpha x+\beta)=\lim\limits_{x\to 0^-}((x^2-x)g(x))\overset{(4)}{\Leftrightarrow}$**β=0**

(3) $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\alpha x}{x^2-x}=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+\alpha)}{x(x-1)}=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+\alpha}{x-1}=0\Leftrightarrow$$ **α=0**.

7. Υπολογίστε τα κ, λ∈IR, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-\kappa x-\lambda}$, να έχει μη πεπερασμένα πλευρικά όρια στα σημεία x_1=2 και x_2=- 3.

Λύση: Επειδή x^2+3≠0 για κάθε x∈R, για να είναι το όριο μη πεπερασμένο, θα πρέπει να είναι της μορφής α/0, δηλαδή ο παρονομαστής να έχει ρίζες τα 2 και -3.

Από τους τύπους **Vietá** πρέπει:

S=x_1+x_2=-β/α $\Leftrightarrow$ 2-3=κ $\Leftrightarrow$ **κ=-1**.

P= x_1x_2=γ/α $\Leftrightarrow$ 2(-3)=-λ $\Leftrightarrow$ **λ=6**.

Τότε $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+x-6}$ και ακολουθεί υπολογισμός πλευρικών ορίων στα 2 και -3 για επαλήθευση. (εδώ παραλείπεται ως εύκολη).

8. Υπολογίστε το α∈IR, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+\alpha x^2+5x-2}{(x-1)^2}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση: Θέτω $g(x)=\frac{x^3+\alpha x^2+5x-2}{(x-1)^2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+\alpha x^2+5x-2}{(x-1)^2}=l\in$ IR.. (1)

και $x^3+\alpha x^2+5x-2=(x-1)^2 g(x)$ οπότε $\lim\limits_{x\to1}(x^3+\alpha x^2+5x-2)=\lim\limits_{x\to1}[(x-1)^2 g(x)]\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$1+a+5-2=0\cdot l\Leftrightarrow$ **α=-4**.

9. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει λ∈IR, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda x^2+x-6}{|x-2|}$, να έχει όριο στο x_0=2 πραγματικό αριθμό.

Λύση: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{\lambda x^2+x-6}{|x-2|}=\frac{4\lambda-4}{0}$.
Εάν λ≠1 τότε το παραπάνω όριο είναι μορφής α/0 που δίνει μη πεπερασμένο όριο.
Άρα η μοναδική περίπτωση που μπορεί το όριο να είναι πεπερασμένο, είναι όταν λ=1.
Τότε $\lim\limits_{x\to2}f(x)\overset{\lambda=1}{=}\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{|x-2|}$.

Δ=25, x_1=2, x_2=-3

Επειδή $\lim\limits_{\substack{x\to2^-\\x<2}}\frac{(x-2)(x+3)}{|x-2|}=-\lim\limits_{\substack{x\to2^-\\x<2}}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=-\lim\limits_{x\to2^-}(x+3)$ = -5

και $\lim\limits_{\substack{x\to2^+\\x>2}}\frac{(x-2)(x+3)}{|x-2|}=\lim\limits_{\substack{x\to2^+\\x<2}}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}(x+3)$ = 5,

έπεται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ όταν λ=1.

Άρα δεν υπάρχει λ∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda x^2+x-6}{|x-2|}$, να έχει όριο στο x_0=2 πραγματικό αριθμό.

10. 23217-2 (τράπεζα θεμάτων): Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

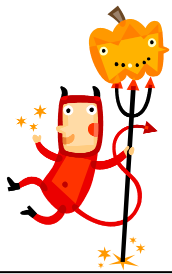
i. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ (Μονάδες 7)

ii. $\lim\limits_{x\to1}g(x)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f\cdot g$ (Μονάδες 4)

ii. το $\lim\limits_{x\to1}(f(x)\cdot g(x))$. (Μονάδες 6)



Λύση:

α) Για να ορίζεται η f(x)=ln(x-1), θα πρέπει x > 1, ενώ για να ορίζεται η $g(x)=\frac{1}{x-1}$ θα πρέπει x≠1. Συνεπώς D_f=(1,+∞) και D_g=(-∞,1)U(1,+∞).

Θέτω u = x-1
Όταν x→1⁺, τότε u→0⁺

i. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln(x-1)=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u$ = -∞.

ii. Η g δεν έχει όριο στο 1, γιατί $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1^-\\x<1\\x-1<0}}\frac{1}{x-1}$ = -∞, ενώ $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1^+\\x>1\\x-1>0}}\frac{1}{x-1}$ = +∞.

β)

i. $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$ = (1,+∞) ∩ (-∞,1)U(1,+∞) = (1,+∞). και D_g=(-∞,1)U(1,+∞).

ii. Η συνάρτηση f·g ορίζεται για x > 1, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(f\cdot g)(x)$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{x-1} =$$

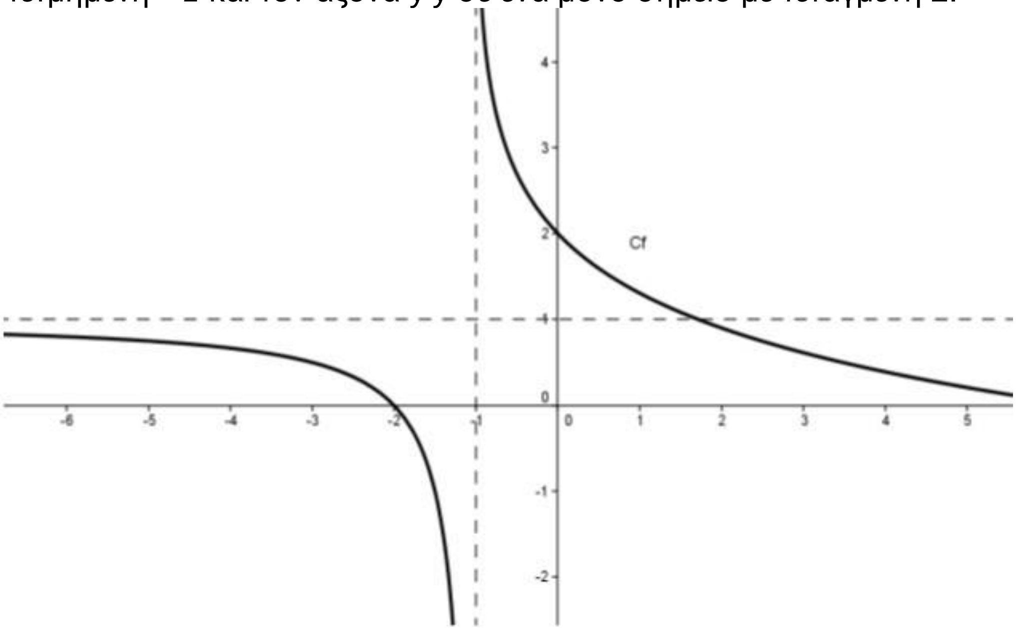
$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{u}$$

Είναι μορφή $\frac{-\infty}{0}$ που δεν εί-ναι απροσδιόριστη μορφή.

$$= \lim_{u\to 0^+}\left(\ln u\cdot\frac{1}{u}\right)$$

$$= (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

11. 23314-2 (τράπεζα θεμάτων): Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη −2 και τον άξονα y'y σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{f(x)}$. (Μονάδες 6)

ii) $\lim\limits_{x\to -2^-} ln(f(x))$. (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

α)

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

ii. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$.

iii. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0$.

β)

i. $\lim\limits_{\substack{x\to -2^+\\ x>-2\\ f(x)<0}}\dfrac{1}{f(x)} \overset{\text{μορφή}\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=\!=\!=} -\infty$.

Θέτω f(x)=u.

Όταν x → −2⁻, τότε u → 0⁺

ii. $\lim\limits_{\substack{x\to -2^-\\ x<-2\\ f(x)>0}} ln f(x) = \lim\limits_{u\to 0^+} ln u = -\infty$.

12. 23641-2: Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f: IR → IR.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$. (Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}([f(\alpha^2-\alpha)-f(0)]\,x) = -\infty$. (Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x-1) = f(0)$. (Μονάδες 08)

Λύση:

α) Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f(x^2) < f(x) \Leftrightarrow x^2 < x$

$\Leftrightarrow x^2 - x < 0$

$\Leftrightarrow x(x-1) < 0$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

β) $\alpha^2 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha < 0$

$\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2-\alpha) < f(0)$

$\Leftrightarrow f(\alpha^2-\alpha) - f(0) < 0$.

Επομένως, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}([f(\alpha^2-\alpha)-f(0)]\,x) = \overbrace{[f(\alpha^2-\alpha)-f(0)]}^{<0}\cdot(+\infty) = -\infty$.

γ) $f(e^x-1) = f(0) \overset{f\uparrow}{\underset{}{\overset{f\ "1-1"}{\Longleftrightarrow}}}$ $e^x-1=0$

$\Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow e^x = e^0$

$\Leftrightarrow x = 0$.

13. END.