ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει f΄(x)=x³+ημx+συνx, με f(0)=0.

Λύση: f(x)=$\frac{x^4}{4}$-συνx+ημx+c…………..(1)

(1) $\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ f(0)=0-συν0+ημ0+c

$\Leftrightarrow$ 0=-1+c

$\Leftrightarrow$ c=1.

(1)$\Rightarrow$ f(x)=$\frac{x^4}{4}$-συνx+ημx+1.

2. Να βρεθεί συνάρτηση f :(0,+∞)→R, για την οποία ισχύει f΄(x)= $\frac{x^2+x+1}{x}$ και f(1)=2.

Λύση: f΄(x)=$\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}$

$=x+1+\frac{1}{x}$

$=\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln x\right)'$

Άρα f(x)=$\frac{x^2}{2}+x+\ln x$+c …………..(1)

(1)$\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ f(1)= $\frac{1}{2}+1+\ln 1+c$

$\Leftrightarrow$ 2=$\frac{3}{2}+c$

$\Leftrightarrow$ c=$\frac{1}{2}$.

(1) $\Rightarrow$ f(x)=$\frac{x^2}{2}+x+\ln x+\frac{1}{2}$.

3. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει f΄(x)=3x$\sqrt{x}$, για κάθε x≥0 και f(1)=1.

Λύση: f΄(x)=$3x\cdot x^{\frac{1}{2}}$= $3x^{\frac{3}{2}}$ $=\left(3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right)'$ =

$=\left(3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)'=\left(6\frac{\sqrt{x^5}}{5}\right)'$.

Άρα f(x)=$6\frac{\sqrt{x^5}}{5}$+c……………..……..(1)

(1)$\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ f(1)=$\frac{6}{5}$+c $\Leftrightarrow$ 1=$\frac{6}{5}$+c $\Leftrightarrow$ c=$-\frac{1}{5}$.

Άρα f(x)=$6\frac{\sqrt{x^5}}{5}-\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ f(x)= $\frac{6\sqrt{x^5}-1}{5}$.

4. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει f΄(x)= $\frac{x^3+8}{x+2}$, για κάθε x≠-2 και f(3)=12.

Λύση: f΄(x)= $\frac{x^3+2^3}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$

=x²-2x+4.

Άρα f(x)=$\frac{x^3}{3}$-x²+4x+c…………….…………(1)

(1)$\overset{x=3}{\Leftrightarrow}$ f(3)=12+c $\Leftrightarrow$ 12=12+c $\Leftrightarrow$ c=0.

Άρα $\Rightarrow$ f(x)=$\frac{x^3}{3}$-x²+4x, x≠-2.

5. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει x(f΄(x)-συν2x)=xe^x-3, για κάθε x∈(0,+∞) και f(π)=e^π-3·lnπ+1.

Λύση: Για κάθε x∈(0,+∞), έχουμε:

xf΄(x)-xσυν2x=xe^x-3 $\Leftrightarrow$ f΄(x)=e^x-$\frac{3}{x}$+συν2x

$\Leftrightarrow$ f(x)=e^x-3·lnx+$\frac{1}{2}$ημ2x+c………………...(1)

(1) $\overset{x=\pi}{\Leftrightarrow}$ f(π)= e^π-3·lnπ+1+c

$\Leftrightarrow$ e^π-3·lnπ+1=e^π-3·lnπ+c

$\Leftrightarrow$ c=1.

Άρα f(x)=e^x-3·lnx+$\frac{1}{2}$ημ2x+1.

6. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει f΄(x)ημ²2x = -4συν2x, με x≠κπ+π/2 και x≠κπ, κ∈Z και $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Λύση: f΄(x)ημ²2x = -4συν2x

$\Leftrightarrow$ f΄(x)4ημ²x·συν²x = -4(συν²x-ημ²x)

$\Leftrightarrow$ f΄(x)ημ²x·συν²x = ημ²x-συν²x

$\Leftrightarrow$ $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ αφού x≠κπ+π/2 και x≠κπ, κ∈Z.

Άρα f(x)=εφx+σφx+c……………………..(1)

(1) $\overset{x=-\frac{\pi}{4}}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow$ c=0.

(1) $\Rightarrow$ f(x)=εφx+σφx.

7. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει (x+2)f΄(x)=x+3, x>-2 και f(-1)=-1.

Λύση: (x+2)f΄(x)=x+3

$\Leftrightarrow$ f΄(x) $=\frac{x+3}{x+2}=\frac{x+2+1}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}+\frac{1}{x+2}$

$\Leftrightarrow$ f΄(x) $1+\dfrac{1}{x+2}$

Άρα f(x)=x+ln(x+2)+c……………………..(1)

$(1)\overset{x=-1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=0.

(1) $\Rightarrow$ f(x)=x+ln(x+2).

8. Δίνεται η συνάρτηση g(x)=e^{-2x}f(x) με f(x) παραγωγίσιμη στο R και f΄(x)=2f(x)……..(1) για κάθε x$\in$R.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

ii. Αν f(1)=1, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση:

i. g΄(x)=(e^{-2x})΄f(x)+e^{-2x}f΄(x)

=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f΄(x)

$\overset{(1)}{=}$ -2e^{-2x}f(x)+2e^{-2x}f(x)=0.

Άρα g(x)=c.

ii. g(x)=e^{-2x}f(x) $\Leftrightarrow$ c=e^{-2x}f(x)

$\Leftrightarrow$ f(x)=ce^{2x}…………….(2)

$(2)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=$\dfrac{1}{e^2}$.

(2) $\Rightarrow$ f(x)=ce^{2x-2}.

9. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. f΄(x)+xημx=συνx, x$\in$R και f(0)=2.

ii. xf΄(x)+f(x)=2x, x$\in$(0,+∞) και f(1)=2.

iii. f΄(x)συνx=2x+f(x)ημx, x$\neq$κπ+$\dfrac{\pi}{2}$, κ$\in$R και f(π)=-π^2.

iv. f: (0,+∞)$\to$ (0,+∞) με f(x)lnf(x)=f΄(x), για κάθε x$\in$(0,+∞) και f(1)=1.

v. f΄(x)=1+lnx, x>0 και f(e)=e.

vi. f΄(x)=$\dfrac{e^x}{x^2}$-$\dfrac{2}{x}$f(x), x$\in$(0,+∞) και f(1)=e.

vii. f΄(x)=$\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{1}{\ln x}$, x>1 και f(e)=0.

Λύση:

i. f΄(x)+xημx=συνx $\Leftrightarrow$ f΄(x)=συνx-xημx

$\Leftrightarrow$ f΄(x)=(x)΄συνx+x(συνx)΄

$\Leftrightarrow$ f΄(x)=(xσυνx)΄

$\Leftrightarrow$ f(x)=xσυνx+c…………………………(1)

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=2.

(1)$\Rightarrow$ f(x)=xσυνx+2.

ii. xf΄(x)+f(x)=2x $\Leftrightarrow$ xf΄(x)+1·f(x)=2x

$\Leftrightarrow$ xf΄(x)+(x)΄f(x)=2x

$\Leftrightarrow$ (xf(x))΄=(x^2)΄

$\Leftrightarrow$ xf(x)=x^2+c………(1)

$(1)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=1.

(1)$\Rightarrow$ xf(x)=x^2+1 $\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$ f(x)=$\dfrac{x^2+1}{x}$.

iii. f΄(x)συνx=2x+f(x)ημx

$\Leftrightarrow$ f΄(x)συνx-f(x)ημx=2x

$\Leftrightarrow$ (f(x)συνx)΄=(x^2)΄

$\Leftrightarrow$ f(x)συνx=x^2+c………………………(1)

$(1)\overset{x=\pi}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=0.

(1)$\Rightarrow$ f(x)συνx=x^2 $\Leftrightarrow$ f(x)=$\dfrac{x^2}{\sigma\upsilon\nu x}$.

iv. f(x)lnf(x)=f΄(x) $\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$ lnf(x)=$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\Leftrightarrow$

lnf(x)=(lnf(x))΄…………………………(1)

Από την (1) και την εφαρμογή σελ. 252 του σχολικού βιβλίου, lnf(x)=ce^x……(2)

$(2)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=0.

(2)$\Rightarrow$ lnf(x)=0 $\Leftrightarrow$ f(x)=1.

v. f΄(x)=1+lnx

$\Leftrightarrow$ f΄(x)=x·$\dfrac{1}{x}$ +1·lnx

$\Leftrightarrow$ f΄(x)=x·(lnx)΄ +(x)΄·lnx

$\Leftrightarrow$ f΄(x)=(x·lnx)΄

$\Leftrightarrow$ f(x)=x·lnx+c…………………………(1)

$(1)\overset{x=e}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=0.

(1) $\Rightarrow$ f(x)=xlnx.

vi. f΄(x)=$\dfrac{e^x}{x^2}$-$\dfrac{2}{x}$f(x) $\Leftrightarrow$ x^2f΄(x)=e^x-2xf(x)

$\Leftrightarrow$ x^2f΄(x)+2xf(x)=e^x

$\Leftrightarrow$ (x^2f(x))΄=(e^x)΄

$\Leftrightarrow$ x^2f(x)=e^x+c………(1)

$(1)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c=0.

(1) $\Rightarrow$ x^2f(x)=e^x $\Leftrightarrow$ f(x)=$\dfrac{e^x}{x^2}$.

vii. f΄(x)=$\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{1}{\ln x}$ $\Leftrightarrow$ f΄(x)-$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{\ln x}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x}=\dfrac{1}{\ln x}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x\ln x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln(\ln x))'$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln(\ln x) + c \ldots (1)$

$(1) \overset{x=e}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0.$

Άρα $(1) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln(\ln x) \Leftrightarrow f(x) = x\ln(\ln x).$

10. Να βρεθεί συνάρτηση για την οποία ισχύει:

i. f: $(0,\pi) \to R$ με $f'(x)=f(x)\sigma\varphi x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

ii. $x(x^2+1)f'(x) - 1 = -2x^2 f(x)$, $x>0$ και $f(1)=0$.

iii. $f'(x)=\frac{f(x)}{x-1}+e^x(x-1)$, $x\in(1,+\infty)$ και $f(2)=e^2$.

iv. $xf'(x)=(1-\sigma\upsilon\nu x)e^{-f(x)}-1$, $x\in R_+$ και $f(\pi)=0$.

v. $f'(x)-2xe^{-f(x)}=0$, $x\in R$ και $f(0)=0$.

vi. $f'(x)+2xf(x)=0$, $x\in R$ με $f(x)\neq 0$ και $f(0)=1$.

vii. $f'(x)+2xf^2(x)=0$, $x\in R$ με $f(x)\neq 0$ και $f(0)=1$.

Λύση:

i. $f'(x)=f(x)\sigma\varphi x \Leftrightarrow f'(x)=f(x)\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

$\Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x = f(x)\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$

$\Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x - f(x)(\eta\mu x)' = 0$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = c \Leftrightarrow f(x) = c\cdot\eta\mu x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$(1) \overset{x=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(1) \Rightarrow f(x)=\eta\mu x.$

ii. Επειδή $x>0$, διαιρούμε την (1) με x:

$(x^2+1)f'(x) - \frac{1}{x} = -2xf(x)$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+2xf(x)=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+(x^2+1)'f(x)=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \left((x^2+1)f(x)\right)' = (\ln x)'$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f(x)=\ln x + c \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$(2) \overset{x=1}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0.$

$(2) \Rightarrow (x^2+1)f(x)=\ln x \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}.$

iii. $f'(x)=\frac{f(x)}{x-1}+e^x(x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(x)=f(x)+e^x(x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(x)-f(x)=e^x(x-1)^2$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}=e^x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x-1}\right)' = (e^x)'$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1}=e^x+c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$(1) \overset{x=2}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0.$

$(1) \Rightarrow \frac{f(x)}{x-1}=e^x \Leftrightarrow f(x)=(x-1)e^x.$

iv. $xf'(x)=(1-\sigma\upsilon\nu x)e^{-f(x)}-1$

$\Leftrightarrow 1+xf'(x)=(1-\sigma\upsilon\nu x)e^{-f(x)}$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}\left(1+xf'(x)\right)=1-\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}=1-\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \left(xe^{f(x)}\right)'=(x-\eta\mu x)'$

$\Leftrightarrow xe^{f(x)}=x-\eta\mu x+c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$(1) \overset{x=\pi}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0.$

Άρα $(1) \Rightarrow xe^{f(x)}=x-\eta\mu x \Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{x-\eta\mu x}{x}$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{x-\eta\mu x}{x}.$

v. $f'(x)-2xe^{-f(x)}=0 \Leftrightarrow f'(x)=2xe^{-f(x)}$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=2x$

$\Leftrightarrow (e^{f(x)})'=(x^2)'$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=x^2+c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(1) \Rightarrow e^{f(x)}=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln(x^2+1).$

vi. Πολ/ζουμε την δοθείσα με e^{x^2}:

$e^{x^2}f'(x)+2xe^{x^2}f(x)=0 \Leftrightarrow$

$e^{x^2}f'(x)+(e^{x^2})'f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\left(e^{x^2}f(x)\right)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}f(x)=c$

$\Leftrightarrow f(x)=ce^{-x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(1) \Rightarrow f(x)=e^{-x^2}.$

vii. Επειδή $f(x)\neq 0$ η δοθείσα γίνεται:

$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=(x^2)'$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=x^2+c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(1) \Rightarrow \frac{1}{f(x)}=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

11. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. $e^{-2x}f'(x)f(x)-1=0$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$.

ii. $f'(x)=e^{-2x}f^3(x)$, $x\in R$ με $f(x)\neq 0$ και $f(0)= -1$.

Λύση:

i. $e^{-2x}f'(x)f(x)-1=0$

$\Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)f(x)=1$

$\Leftrightarrow f'(x)f(x)=e^{2x}$

$\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x}$

$\Leftrightarrow (f^2(x))'=(e^{2x})'$

$\Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c$……………………………(1)

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0$.

$(1) \Rightarrow f^2(x)=e^{2x}$……………………………(2)

Επειδή f παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής.

Από τη σχέση (2) επειδή $e^{2x}\neq 0$ θα είναι και $f(x)\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή $f(0)=1>0 \Rightarrow f(x)>0$ οπότε η (2) δίνει $f(x)=e^x$.

ii. Επειδή $f(x)\neq 0$ η δοθείσα γίνεται:

$$\frac{f'(x)}{f^3(x)}=e^{-2x} \Leftrightarrow -\frac{2f(x)f'(x)}{f^4(x)}=-2e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)}\right)'=(e^{-2x})'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)}=e^{-2x}+c \text{………..(1)}$$

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0$.

$(1) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)}=e^{-2x} \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}$ και όπως και στην προηγούμενη άσκηση είναι $f(x)=-e^x$.

12. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. $f: (0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, $xf'(x)+1=-2x^2\big(f(x)+\ln x\big)$ στο $(0,+\infty)$ και $f(1)=e^{-1}$.

ii. $f: R\to R$ παραγωγίσιμη στο R, $f(0)=1$, $f(x)\neq x$ και $(x^2+1)^2(f'(x)-1)-x(f(x)-x)^3=0$ για κάθε $x\in R$.

iii. $f'(x)-1=2xe^{x-f(x)}$, $x\in R$ και $f(0)=0$.

iv. $f'(x)-2x+2x(f(x)-x^2)=0$, $x\in R$, $f(0)=1$, $f(x)\neq x^2$ για κάθε $x\in R$.

v. $f'(x)=e^x+e^x(f(x)-e^x)^2$, $x\in R$, $f(0)=0$, $f(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in R$.

vi. $(f(x)+2x)(f'(x)+2)=4x$, $x\in R$ και $f(0)=1$.

vii. $(e^x+f(x)+xf'(x))(e^x+xf(x))=x$, $x>0$ και $f(1)=\sqrt{2}-e$.

viii. $f: R\to R$, $f(0)=0$, $e^{f(x)}\neq -x$ και $f'(x)e^{f(x)}+1=\frac{x}{x+e^{f(x)}}$ για κάθε $x\in R$

ix. $f: R\to R$ παραγωγίσιμη στο R, $f(0)=2$, $f(x)\neq e^x$ και $f'(x)+e^{2x}(f(x)-e^x)^3=e^x$ για κάθε $x\in R$.

Λύση:

i. Επειδή $x>0$ η δοθείσα γίνεται:

$$f'(x)+\frac{1}{x}=-2x\big(f(x)+\ln x\big)$$

$$\Leftrightarrow \big(f(x)+\ln x\big)'=-2x\big(f(x)+\ln x\big) \text{…………(1)}$$

Θέτω $g(x)=f(x)+\ln x$, $x>0$.

$g(1)=f(1)+\ln 1=e^{-1}+0= e^{-1}$.

Η σχέση (1) γίνεται:

$g'(x)=-2xg(x) \Leftrightarrow g'(x)+2xg(x)=0$

$\overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow} e^{x^2}g'(x)+2xe^{x^2}g(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2}g'(x)+(e^{x^2})'g(x)=0$

$\Leftrightarrow \big(e^{x^2}g(x)\big)'=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2}g(x)=c$……………(2)

$(2) \overset{x=1}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1$.

$(2) \Rightarrow e^{x^2}g(x)=1 \Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow f(x)+\ln x=e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}-\ln x$, $x>0$.

ii. $(x^2+1)^2(f'(x)-1)-x(f(x)-x)^3=0$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^2\big(f(x)-x\big)'-x(f(x)-x)^3$……….(1)

Θέτω $g(x)=f(x)-x$, $x\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δεν μηδενίζεται, γιατί $f(x)\neq x$.

Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $g(0)=f(0)-0=1>0$, θα είναι $g(x)>0$ στο R.

Η σχέση (1) γίνεται:

$$(x^2+1)^2g'(x)-xg^3(x)=0 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g^3(x)}=\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2g(x)g'(x)}{g^4(x)}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{g^2(x)}\right)'=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g^2(x)}=\frac{1}{x^2+1}+c\text{……(2)}$$

$(2) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0.$

$(2) \Rightarrow \dfrac{1}{g^2(x)}=\dfrac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow g^2(x)=x^2+1$

και επειδή $g(x)>0 \Leftrightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

iii. Θέτω $g(x)=x-f(x)$.

$g(0)=0$ και η δοθείσα γίνεται:

$g΄(x)=2xe^{-g(x)} \Leftrightarrow e^{g(x)}g΄(x)=2x$

$\Leftrightarrow (e^{g(x)})΄=(x^2)΄$

$\Leftrightarrow e^{g(x)}=x^2+c$……………(1)

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(1) \Rightarrow e^{g(x)}=x^2+1 \Leftrightarrow g(x)=\ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow f(x)-x=\ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow f(x)=x+\ln(x^2+1),\ x\in R$.

iv. $f΄(x)-2x+2x(f(x)-x^2)=0$

$\Leftrightarrow \big(f(x)-x^2\big)΄+2x(f(x)-x^2)=0$…………..(1)

Θέτω $g(x)=f(x)-x^2,\ x\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δεν μηδενίζεται, γιατί $f(x)\neq x^2$.

Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $g(0)=f(0)-0=1>0$, θα είναι $g(x)>0$ στο R.

Η σχέση (1) γίνεται $g΄(x)+2xg(x)=0$

$\overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow} e^{x^2}g΄(x)+2xe^{x^2}g(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2}g΄(x)+(e^{x^2})΄g(x)=0$

$\Leftrightarrow \big(e^{x^2}g(x)\big)΄=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2}g(x)=c$……………(2)

$(2) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(2) \Rightarrow e^{x^2}g(x)=1 \Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow f(x)-x^2=e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow f(x)=x^2+e^{-x^2},\ x\in R$.

v. $f΄(x)=e^x+e^x(f(x)-e^x)^2$

$\Leftrightarrow f΄(x)-e^x=e^x(f(x)-e^x)^2$…………………..(1)

Θέτω $g(x)=f(x)-e^x,\ x\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δεν μηδενίζεται, γιατί $f(x)\neq e^x$.

Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $g(0)=f(0)-e^0=-1<0$, θα είναι $g(x)<0$ στο R.

Η σχέση (1) γίνεται

$g΄(x)=e^x g^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g^2(x)}=e^x$

g(x)<0

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{g(x)}\right)'=(e^x)΄$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{g(x)}=e^x+c$…………(2)

$(2) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=0.$

$(2) \Rightarrow -\dfrac{1}{g(x)}=e^x \Leftrightarrow g(x)=-e^{-x}$

$\Leftrightarrow f(x)-e^x=-e^{-x}$

$\Leftrightarrow f(x)=e^x-e^{-x},\ x\in R$.

vi. Θέτω $g(x)=f(x)+2x,\ x\in R$.

$g(0)=f(0)=1$ και η δοθείσα γίνεται:

$g(x)g΄(x)=4x \Leftrightarrow 2g(x)g΄(x)=8x$

$\Leftrightarrow (g^2(x))΄=(4x^2)΄$

$\Leftrightarrow g^2(x)=4x^2+c$……………(1)

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(1) \Rightarrow g^2(x)=4x^2+1$………………………..(2)

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και δεν μηδενίζεται, γιατί αν $g(x)=0$ τότε από τη σχέση $g(x)g΄(x)=4x$ προκύπτει $4x=0 \Leftrightarrow x=0$ οπότε $g(0)=0$ άτοπο, γιατί $g(0)=1$.

Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $g(0)=1>0$, θα είναι $g(x)>0$ στο R.

$(2) \Leftrightarrow g(x)=\sqrt{4x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)+2x=\sqrt{4x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x,\ x\in R$.

vii. Θέτω $g(x)=e^x+xf(x),\ x>0$.

Η δοθείσα γίνεται:

$g΄(x)g(x)=x \Leftrightarrow 2g΄(x)g(x)=2x$

$\Leftrightarrow (g^2(x))΄=(x^2)΄$

$\Leftrightarrow g^2(x)=x^2+c$ ……………(1)

$(1) \overset{x=1}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c=1.$

$(1) \Rightarrow g^2(x)=x^2+1$…....................(2)

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και δεν μηδενίζεται, γιατί αν $g(x)=0$ τότε $x^2+1=0$ άτοπο.

Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $g(1)=\sqrt{2}>0$, θα είναι $g(x)>0$.

$(2) \Leftrightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow$ $e^x+xf(x)=\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-e^x}{x}$, $x>0$.

viii. Θέτω $g(x)=x+e^{f(x)}$, $x\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και δεν μηδενίζεται, γιατί $e^{f(x)}\neq -x$.

Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $g(0)=0+e^0=1>0$, θα είναι $g(x)>0$ στο R.

Η δοθείσα γίνεται:

$g'(x)=\dfrac{x}{g(x)}$ $\Leftrightarrow$ $g'(x)g(x)=x$

$\Leftrightarrow$ $2g'(x)g(x)=2x$

$\Leftrightarrow$ $(g^2(x))'=(x^2)'$

$\Leftrightarrow$ $g^2(x)=x^2+c_1$ ……………(1)

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ $c_1=1$.

(1) $\Rightarrow$ $g^2(x)=x^2+1$ και επειδή $g(x)>0$

$\Leftrightarrow$ $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow$ $x+e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=\ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=x+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in R$.

ix. Θέτω $g(x)=f(x)-e^x$, $x\in R$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δεν μηδενίζεται, γιατί $f(x)\neq e^x$.

Επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $g(0)=f(0)-e^0=1>0$, θα είναι $g(x)>0$ στο R.

Η δοθείσα σχέση γίνεται:

$g'(x)+e^{2x}g^3(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $-\dfrac{g'(x)}{g^3(x)}=e^{2x}$

g(x)>0

$\Leftrightarrow$ $-\dfrac{2g(x)g'(x)}{g^4(x)}=2e^{2x}$

$\Leftrightarrow$ $\left(\dfrac{1}{g^2(x)}\right)'=(e^{2x})'$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{g^2(x)}=e^{2x}+c$…..(1)

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ $c=0$.

(1) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{g^2(x)}=e^{2x}$ και επειδή $g(x)>0$

$\Leftrightarrow$ $g(x)=e^{-x}$

$\Leftrightarrow$ $f(x)-e^x=e^{-x}$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=e^x+e^{-x}$, $x\in R$.

13. Δίνεται συνάρτηση $f: R\to R$ παραγωγίσιμη στο R, $f(0)=2$ και $(x-1)f'(x)=2x^2-x-1$, για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση:

☛ για $x\neq 1$ έχουμε $f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=$

$=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$

$=2x+1$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} x^2+x+c_1, & x<1 \\ x^2+x+c_2, & x>1 \end{cases}$.

$f(0)=2 \Leftrightarrow c_1=2$.

☛ Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο R, θα είναι και συνεχής στο R, άρα και στο 1. Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow c_2=2$.

$f(1)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=4$.

Ο ζητούμενος τύπος είναι:

$f(x)=\begin{cases} x^2+x+c_1, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ x^2+x+c_2, & x>1 \end{cases}$.

14. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. $f: R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, $f(0)=f'(0)=0$ και $(x^2+1)f''(x)=2(1-xf'(x))$ για κάθε $x\in R$.

ii. $f: R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(x)\big(f''(x)+2f(x)\big)=(f'(x))^2$ για κάθε $x\in R$.

iii. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, $f(0)=f'(0)=1$ και $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

iv. $f: R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, $f(2)=e$, $f'(0)=0$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R$.

v. $f: (0,+\infty)\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, $f(x)+(x-2)f'(x)=xf''(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=e$, $f'(1)=0$.

vi. : $R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, $2f'(0)=f(0)=1$ και $f''(x)f(x)+(f'(x))^2=f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in R$.

vii. $f: R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, $f'(0)=f(0)=e$, $f''(x)f(x)-f(x)f'(x)=(f'(x))^2$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

viii. $f: (0,+\infty)\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, $2xf'(x)+x^2f''(x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=-2f'(1)=2$.

ix. f: $(0,+\infty)\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, $f'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$…(1) για κάθε x>0 και f(1)=1.

x. f: $R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, $f'(0)=0$, $f(0)=1$ και $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Λύση:

i. $(x^2+1)f''(x)=2(1-xf'(x))$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f''(x)=2-2xf'(x)$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f''(x)+2xf'(x)=2$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f''(x)+(x^2+1)'f'(x)=2$

$\Leftrightarrow \left((x^2+1)f'(x)\right)'=(2x)'$

$\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)=2x+c_1$……………………(1)

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_1=0$.

$(1)\Rightarrow (x^2+1)f'(x)=2x$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln(x^2+1)+c_2$………………(2)

$(2)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_2=0$.

$(2)\Rightarrow f(x)=\ln(x^2+1)$, $x\in R$.

ii. $f(x)\left(f''(x)+2f(x)\right)=(f'(x))^2$

$\Leftrightarrow f(x)f''(x)+2f^2(x)=(f'(x))^2$

$\Leftrightarrow f(x)f''(x)-(f'(x))^2=-2f^2(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}=-2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'=(-2x)'$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2x+c_1$……………………(1)

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_1=0$.

$(1)\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2x$

$\Leftrightarrow \left(\ln f(x)\right)'=(-x^2)'$

$\Leftrightarrow \ln f(x)=-x^2+c_2$………………(2)

$(2)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_2=0$.

$(2)\Rightarrow \ln f(x)=-x^2$

$\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}$, $x\in R$.

iii. $f''(x)=f(x) \Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow (f'(x)+f(x))'=f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=c_1e^x$…………(1)

λόγω της εφαρμογής του σχολικού βιβλίου σελ. 252.

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_1=2$.

$(1)\Rightarrow f'(x)+f(x)=2e^x$

$\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^xf'(x)+e^xf(x)=2e^{2x}$

$\Leftrightarrow (e^xf(x))'=(e^{2x})'$

$\Leftrightarrow e^xf(x)=e^{2x}+c_2$……………………(2)

$(2)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_2=0$.

$(2)\Rightarrow e^xf(x)=e^{2x} \Leftrightarrow f(x)=e^x$, $x\in R$.

iv. $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$

$\Leftrightarrow f''(x)=(2xf(x))'$

$\Leftrightarrow f'(x)=2xf(x)+c_1$………………………(1)

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_1=0$.

$(1)\Rightarrow f'(x)=2xf(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x$

$\Leftrightarrow (\ln f(x))'=(x^2)'$

$\Leftrightarrow \ln f(x)=x^2+c_2$…………………………(2)

$(2)\overset{x=2}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_2=-3$.

$(2)\Rightarrow \ln f(x)=x^2-3$

$\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2-3}$, $x\in R$.

v. $f(x)+(x-2)f'(x)=xf''(x)$

$\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=xf''(x)+2f'(x)$

$\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=xf''(x)+f'(x)+f'(x)$

$\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)-f'(x)=xf''(x)+f'(x)$

$\Leftrightarrow f(x)+(x-1)f'(x)=xf''(x)+f'(x)$

$\Leftrightarrow \left((x-1)f(x)\right)'=\left(xf'(x)\right)'$

$\Leftrightarrow (x-1)f(x)=xf'(x)+c_1$……………………(1)

$(1)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_1=0$.

$(1)\Rightarrow (x-1)f(x)=xf'(x)$

$\Leftrightarrow xf(x)-f(x)=xf'(x)$

$\Leftrightarrow xf(x)=f(x)+xf'(x)$

$\Leftrightarrow xf(x)=(xf(x))'$

$\Leftrightarrow xf(x)=c_2e^x$…………………………(2)

Εφαρμογή σελ. 252

$(2)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_2=1$.

$(2)\Rightarrow xf(x)=e^x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

vi. $f''(x)f(x)+(f'(x))^2=f(x)f'(x)$

$\Leftrightarrow (f(x)f'(x))'=f(x)f'(x)$

$\Leftrightarrow f(x)f'(x)=c_1e^x$……………………(1)

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_1=\dfrac{1}{2}$.

$(1)\Rightarrow f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x$

$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=e^x$

$\Leftrightarrow (f^2(x))'=(e^x)'$

$\Leftrightarrow f^2(x)' = e^x + c_2$ ……………………(2)

$(2) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c_2 = 0.$

$(2) \Rightarrow f^2(x) = e^x$ ……………………(3)

Επειδή $e^x \neq 0$, από την (3) $\Rightarrow f(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής ως παραγωγισιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Επειδή $f(0)=1>0 \Rightarrow f(x)>0$.

$(3) \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^x}$, $x \in R$.

vii. $f''(x)f(x) - f(x)f'(x) = \big(f'(x)\big)^2$

f(x)≠0

$\Leftrightarrow f''(x)f(x) - \big(f'(x)\big)^2 = f(x)f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - \big(f'(x)\big)^2}{f^2(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Εφαρμογή σελ. 252

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = c_1 e^x \quad \text{……………………(1)}$$

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c_1 = 1.$

$$(1) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = e^x \quad \text{……………………(2)}$$

Επειδή $f(x) \neq 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής ως παραγωγισιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Επειδή $f(0)=e>0 \Rightarrow f(x)>0$.

f(x)>0

$(2) \Leftrightarrow \big(\ln f(x)\big)' = (e^x)'$

$\Leftrightarrow \ln f(x) = e^x + c_2$ ……………………(3)

$(3) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c_2 = 0.$

$(3) \Rightarrow \ln f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{e^x}$, $x \in R$.

viii. $f(1) = -2f'(1) = 2 \Leftrightarrow f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$.

$2xf'(x) + x^2 f''(x) = -f'(x)$

$\Leftrightarrow \big(x^2 f'(x)\big)' = \big(-f(x)\big)'$

$\Leftrightarrow x^2 f'(x) = -f(x) + c_1$ ……………………(1)

$(1) \overset{x=1}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c_1 = 1.$

$(1) \Rightarrow x^2 f'(x) = -f(x) + 1$

$\Leftrightarrow x^2 f'(x) + f(x) = 1$

$\cdot e^{\frac{1}{x}}$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} f'(x) + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} f'(x) - \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' f(x) = -\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}} f'(x) - \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' f(x)}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = -\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^{\frac{1}{x}}}\right)' = \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} + c_2 \quad \text{……………………(2)}$$

$(2) \overset{x=1}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{e}.$

$$(2) \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{e}$$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{\frac{1}{x} - 1}$, $x>0$.

ix. $(1) \overset{x=1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 1.$

$(1) \overset{x=\frac{1}{x}}{\Leftrightarrow} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f(x) \Leftrightarrow f(x) = xf'\left(\frac{1}{x}\right)$ ……(2)

$$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(xf'\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right) + xf''\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f''\left(\frac{1}{x}\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ ……………(3)

$(3) \overset{x=\frac{1}{x}}{\Leftrightarrow} f'(x) - xf''(x) = \frac{1}{x} f(x)$

$\Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^2 f''(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(x) + c_1 \quad \text{……………………(4)}$$

$(4) \overset{x=1}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow c_1 = 0.$

$$(4) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(x)$$

$\Leftrightarrow f(x) = xf'(x)$

$\Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0$$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=c_2$

$\Leftrightarrow f(x)=c_2x$……..…………….(5)

(5) $\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_2=1$.

(5) $\Leftrightarrow f(x)=x,\ x>0$.

Εφαρμογή σελ. 252

x. $f''(x)=f(x)$ $\Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow (f'(x)+f(x))'=f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=c_1e^x$………….(1)

(1) $\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_1=1$.

(1) $\Rightarrow f'(x)+f(x)=e^x$

$\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}$ $e^xf'(x)+e^xf(x)=e^{2x}$

$\Leftrightarrow (e^xf(x))'=\frac{1}{2}(e^{2x})'$

$\Leftrightarrow e^xf(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c_2$……………….(2)

(2) $\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_2=\frac{1}{2}$.

(2) $\Rightarrow e^xf(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x},\ x\in R$.

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ x\in R$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^x$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=\frac{e}{2}$, $f'(1)=\frac{3e}{2}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x-\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$, $x\in R$, είναι σταθερή.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση:

i. $g'(x)=1-\dfrac{(f''(x)-f'(x))e^x-(f'(x)-f(x))e^x}{e^{2x}}$

$=1-\dfrac{(f''(x)-f'(x)-f'(x)+f(x))e^x}{e^{2x}}$

$=1-\dfrac{f''(x)-2f'(x)+f(x)}{e^x}$

$=1-\dfrac{e^x}{e^x}=1-1=0$.

Άρα $g(x)=g(1)=1-\dfrac{f'(1)-f(1)}{e}$

$=1-\dfrac{\frac{3e}{2}-\frac{e}{2}}{e}$

$=1-\dfrac{e}{e}=1-1=0$.

ii. $x-\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}=g(x)=0$

$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=xe^x$……$(\cdot e^x)$

$\Leftrightarrow e^xf'(x)-e^xf(x)=xe^{2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}=x$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)'=\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}=\dfrac{x^2}{2}+c_1$…………………….(1)

(1) $\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_1=0$.

(1) $\Rightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}=\dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}e^x,\ x\in R$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f: (0,π)→R δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και $f(\pi/2)=f'(\pi/2)=1$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f'(x)ημx-f(x)συνx$, $x\in(0,\pi)$, είναι σταθερή.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

Λύση:

i. $g'(x)=f''(x)ημx+\cancel{f'(x)συνx}-$

$-\cancel{f'(x)συνx}+f(x)ημx$

$=f''(x)ημx+f(x)ημx$

$=\big(f''(x)+f(x)\big)ημx=0$

Άρα $g(x)=g(\pi/2)=$**…**$=1$.

ii. $f'(x)ημx-f(x)συνx=1$ ….(από **i**)

$\Leftrightarrow f'(x)ημx-f(x)(ημx)'=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)ημx-f(x)(ημx)'}{ημ^2x}=\dfrac{1}{ημ^2x}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{ημx}\right)'=(-σφx)'$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{ημx}=-σφx+c_1$……………………..(1)

(1) $\overset{x=\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_1=1$.

(1) $\Rightarrow \dfrac{f(x)}{ημx}=-σφx+1 \Leftrightarrow f(x)=ημx-συνx$, $x\in(0,\pi)$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $xf'(x)=e^{\frac{1}{x}}(x-1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=e$. Να δείξετε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-xe^{\frac{1}{x}}$.

$$g'(x)=f'(x)-e^{\frac{1}{x}}-\cancel{x}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$$

$$=f'(x)-e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{xf'(x)-xe^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\frac{xf'(x)-(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Λόγω της δοθείσης σχέσης.

$$=\frac{\cancel{xf'(x)}-\cancel{xf'(x)}}{x}=0.$$

Άρα $g(x)=c \Leftrightarrow f(x)-xe^{\frac{1}{x}}=c$……………..(1)

(1) $\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c=0$.

(1) $\Rightarrow f(x)-xe^{\frac{1}{x}}=0 \Leftrightarrow f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=0$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ για κάθε $x>0$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$g'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Λόγω της δοθείσης σχέσης.

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{\cancel{x^2}}{1+x^2}$$

$$=\cancel{\frac{1}{1+x^2}}-\cancel{\frac{1}{1+x^2}}=0.$$

Άρα $g(x)=c \Leftrightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=c$……………..(1)

(1) $\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c=0$.

(1) $\Rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$, $x>0$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f: $R\to R$ παραγωγίσιμη στο R, με $f'(-x)f(x)=1$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)>0$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση:

i. Από τη σχέση $f'(-x)f(x)=1$ προκύπτει ότι $f(x)\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή $f(0)=1>0 \Rightarrow f(x)>0$.

ii. Στη σχέση $f'(-x)f(x)=1$ …………………(1) θέτω όπου x το –x:

$f'(x)f(-x)=1$……………………………..(2)

Από (1) και (2) έχουμε:

$f'(-x)f(x)=f'(x)f(-x)$

$\Leftrightarrow f'(x)f(-x)-f'(-x)f(x)=0$

$\Leftrightarrow f'(x)f(-x)+\big(f(-x)\big)'f(x)=0$

$\Leftrightarrow \big(f(x)f(-x)\big)'=0$

$\Leftrightarrow f(x)f(-x)=c_1$…………………………..(3)

(3) $\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c=1$.

(3)$\Rightarrow f(x)f(-x)=1$………………………..(4)

Από (2) και (4) απαλείφουμε το f(-x):

$\frac{f'(x)}{f(x)}=1 \Leftrightarrow (\ln f(x))'=(x)'$

$\Leftrightarrow \ln f(x)=x+c_2$……………….(5)

(5) $\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow c_2=0$.

(5)$\Rightarrow \ln f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=e^x$, $x\in R$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f: $R\to R$ παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$ (1) για κάθε $x,y\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ (2). Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση: (1) $\overset{x=y=0}{\Rightarrow}$ $f(0)=0$.

(2) $\Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\cancelto{0}{f(0)}}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

☛ Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x:

$f'(x+y)=f'(x)+2xy+y^2$……………………(3)

☛ Παραγωγίζουμε την (1) ως προς y:

$f'(x+y)=f'(y)+x^2+2xy$ ……………………(4)

Από (3) και (4) $\Rightarrow$ $f'(x)+2xy+y^2= f'(y)+x^2+2xy$.

$\Rightarrow$ $f'(x)+y^2= f'(y)+x^2$……..(5)

☛ Παραγωγίζουμε την (5) ως προς x:

$f''(x)=2x \Leftrightarrow f'(x)=x^2+c_1$…………………(6)

$(6) \overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_1=1$.

(6) $\Leftrightarrow f'(x)=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x+c_2$……(7)

$(7) \overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_2=0$.

(7) $\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x$, $x\in R$.

21. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει η σχέση

$f(x+y)=f(x)f(y)$……….(1)

για κάθε $x,y\in R$. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=e$, να δείξετε ότι $f(x)=e^x$.

Λύση: $(1) \overset{y=0}{\Leftrightarrow} \cancel{f(x)}=f(0)\cancel{f(x)}$ & αφού $f(x)\neq 0$

$\Leftrightarrow f(0)=1$……………………..(2)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x:

$f'(x+y)=f'(x)f(y)$ η οποία για x=0 δίνει

$f'(y)=f'(0)f(y)$……………………………(3)

γιατί η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο 0.

Θέτω $f'(0)=c_1$ οπότε η (3) γίνεται

$\cdot e^{c_1x}$

$f'(y)=c_1f(y) \overset{y=x}{\Leftrightarrow} f'(x)=c_1f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)-c_1f(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{c_1x}f'(x)-c_1e^{c_1x}f(x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)e^{c_1x}-c_1e^{c_1x}f(x)}{\left(e^{c_1x}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^{c_1x}}\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{c_1x}}=c_2$$

$\Leftrightarrow f(x)=c_2e^{c_1x}$……………….(4)

$(4) \overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_2=1$.

Άρα $f(x)=e^{c_1x}$……………………………(5)

$(5) \overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c_1=1$.

Άρα $f(x)=e^x$, $x\in R$.

Η σχέση (3) μπορεί να δειχθεί και ως εξής:
Εάν x_0 τυχαίο, τότε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f(x_0)f'(0).$$

Επειδή x_0 τυχαίο, θέτω $x_0=x$:
$f'(x)=f'(0)f(x)$.

22. Να βρεθεί συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}=f(x)+1$ για κάθε $x\in R$.

Λύση: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}=f(x)+1$……..(1)

Θέτω u=-h.

$\lim\limits_{h\to 0}u=\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$.

οπότε (1) $\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x)-f(x+u)}{-u}=f(x)+1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}=f(x)+1$

$\cdot e^x$

$\Leftrightarrow f'(x)=f(x)+1$

$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=1$

$\Leftrightarrow e^xf'(x)-e^xf(x)=e^x$

$$\Leftrightarrow \frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{(e^x)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=(-e^{-x})'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x}=-e^{-x}+c$$

$\Leftrightarrow f(x)=ce^x-1$……………………..(2)

$(2) \overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f(x)=2e^x-1$, $x\in R$.

23. Να βρεθεί συνάρτηση f: R→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει $2f(0)=f'(0)=2$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(x-2h)}{h}=2f'(x)$ για κάθε $x\in R$.

Λύση: $2f(0)=f'(0)=2 \Leftrightarrow f(0)=1$ και $f'(0)=2$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(x-2h)}{h}=2f'(x)$………...(1)

Θέτω u=-2h $\Leftrightarrow$ h=$-\dfrac{u}{2}$.

$\lim\limits_{h\to0} u = \lim\limits_{h\to0}(-2h)$=0.

οπότε (1) $\Leftrightarrow \cancel{2}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f'(x)-f'(x+u)}{-u}=\cancel{2}f'(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to0}\dfrac{f'(x+u)-f'(x)}{u}$=f΄(x)

$\Leftrightarrow$ f΄΄(x)=f΄(x)

$\Leftrightarrow$ f΄(x)=f(x)+c_1……………….(2)

$(2)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c_1=1.

Άρα f΄(x)=f(x)+1.

οπότε όπως και στην άσκηση 22 βρίσκουμε f(x)=$2e^{-x}$-1, x∈R.

24. Δίνεται συνάρτηση f: (0,+∞)→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει f(1)=1 και f(x) $f'\left(\frac{1}{x}\right)$=x (1) για κάθε x>0. Να δείξετε ότι f(x)=x, x>0.

Λύση: Από τη σχέση f(x) $f'\left(\frac{1}{x}\right)$=x, x>0 προκύπτει ότι f(x)≠0 και $f'\left(\frac{1}{x}\right)$≠0 $\Leftrightarrow$ f΄(x)≠0.

$(1)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ f΄(1)=1.

Στην (1) θέτω όπου x το –x:

f΄(x) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$ ……………………………….(2)

$(2)\overset{f'(x)\neq0}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{xf'(x)}$

$\Leftrightarrow \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=-\dfrac{(xf'(x))'}{(xf'(x))^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\dfrac{f'(x)+xf''(x)}{x^2(f'(x))^2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\dfrac{f'(x)+xf''(x)}{x^2(f'(x))^2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{\cancel{x^2}} f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\dfrac{f'(x)+xf''(x)}{\cancel{x^2}(f'(x))^2}$

$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{f'(x)+xf''(x)}{(f'(x))^2}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{f'(x)+xf''(x)}{(f'(x))^2}$

$\Leftrightarrow$ f(x)f΄(x)+xf(x)f΄΄(x)=x$(f'(x))^2$

$\Leftrightarrow$ xf(x)f΄΄(x) - x$(f'(x))^2$= -f(x)f΄(x)

$\Leftrightarrow x\dfrac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}=-\dfrac{\cancel{f(x)}f'(x)}{(f(x))^{\cancel{2}}}$

$\Leftrightarrow x\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ …………………..(3)

Θέτω g(x)=$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ με g(0)=$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$=1.

(3) $\Leftrightarrow$ xg΄(x)=-g(x)

$\Leftrightarrow$ xg΄(x)+g(x)=0

$\Leftrightarrow$ (xg(x))΄=0

$\Leftrightarrow$ xg(x)=c_1…………………………… (4)

$(4)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c_1=1.

Άρα xg(x)=1 $\Leftrightarrow$ x$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$=1

$\Leftrightarrow$ xf΄(x)=f(x)

$\Leftrightarrow$ xf΄(x)-f(x)=0

$\Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=c_2$

$\Leftrightarrow$ f(x)=c_2x ………………….(5)

$(5)\overset{x=1}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ c_2=1. Άρα f(x)=x, x>0.

25. Δίνεται συνάρτηση f: R→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει f(0)=1 και f(x)f΄(-x)=2 (1) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(x)=e^{2x}, x∈R.

Λύση: Από τη σχέση f(x)f΄(-x)=2, x∈R προκύπτει ότι f(x)≠0 και f΄(-x)≠0 $\Leftrightarrow$ f΄(x)≠0.

$(1)\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ … $\Leftrightarrow$ f΄(0)=2.

Στην (1) θέτω όπου x το –x:

f(-x)f΄(x)=2…………………………………..(2)

$(2)\overset{f'(x)\neq0}{\Leftrightarrow} f(-x)=\dfrac{2}{f'(x)}$

$\Leftrightarrow [f(-x)]'=-\dfrac{2f''(x)}{(f'(x))^2}$

$\Leftrightarrow (-x)'f'(-x)=-\dfrac{2f''(x)}{(f'(x))^2}$

$\Leftrightarrow -f'(-x)=-\dfrac{2f''(x)}{(f'(x))^2}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\frac{\cancel{2}}{f(x)} = -\frac{\cancel{2}f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$\Leftrightarrow$ f(x)f´´(x)=$(f'(x))^2$

$\Leftrightarrow$ f(x)f´´(x) - $(f'(x))^2$=0

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=c_1$$

$\Leftrightarrow$ f´(x)=c_1f(x) ……………………… (3)

(3) $\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow$ c_1=2.

Άρα f´(x)=2f(x) $\Leftrightarrow$ f´(x)-2f(x)=0

$\Leftrightarrow$ e^{2x}f´(x)-2e^{2x} f(x)=0

$\cdot e^{2x}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}f'(x)-(e^{2x})'f(x)}{(e^{2x})^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}}=c_2$$

$\Leftrightarrow$ f(x)=c_2e^{2x} ……………….(4)

(4) $\overset{x=0}{\Leftrightarrow}$ **…** $\Leftrightarrow$ c_2=1. Άρα f(x)=e^{2x}, x$\in$R.

26. Έστω F μια αρχική της f(x)=$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x+1)-F(x))$.

Λύση: Εφαρμόζουμε **ΘΜΤ** για τη συνάρτηση F στο διάστημα [x,x+1].

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο [x, x+1] και παραγωγίσιμη στο (x, x+1) επειδή είναι παραγωγίσιμη στο R.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$(x, x+1) με F´(ξ)=$\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}$ $\Leftrightarrow$

f(ξ)=F(x+1)-F(x)……………………………(1)

f´(x)=$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$= **…** =$\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Όταν x$\to$+∞, τότε x>1 και f´(x)<0 άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [x, x+1].

x<ξ<x+1 $\underset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$ $f(x)>f(\xi)>f(x+1)$ και λόγω της (1) $\Leftrightarrow$ f(x)>F(x+1)-F(x)>f(x+1).

$\Leftrightarrow$ $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$>F(x+1)-F(x)>$\frac{(x+1)+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$.

$\Leftrightarrow$ $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$>F(x+1)-F(x)>$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\ldots=1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\ldots=1.$$

Άρα από το **κριτήριο παρεμβολής** θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x+1)-F(x))$=1.

27. END