## ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

**1)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}$.

**Λύση**:

- *Πεδίο ορισμού*: x+1≠0 ⇔ x≠-1 ................(1)

και $\frac{x^3}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 0$ .......(2)

| x | -∞ | -1 | | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | - | | - | 0 | + |
| x+1 | - | 0 | + | | + |
| $\frac{x^3}{x+1}$ | + | ‖ | - | 0 | + |

Από (1),(2) ⇔ $\boldsymbol{x\in(-\infty,-1)\cup[0.+\infty)}$.

- *Οριζόντιες ασύμπτωτες* δεν έχει γιατί

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{\cancelto{2}{3}}}{\cancel{x}}}=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}x^2}=+\infty.$$

- *Κατακόρυφες ασύμπτωτες* :

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1\\x+1<0}}\sqrt{x^3\frac{1}{x+1}}=\sqrt{(-1)\cdot(-\infty)}=\sqrt{(+\infty)}=+\infty.$$

Επομένως η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφος ασύμπτωτος από αριστερά.

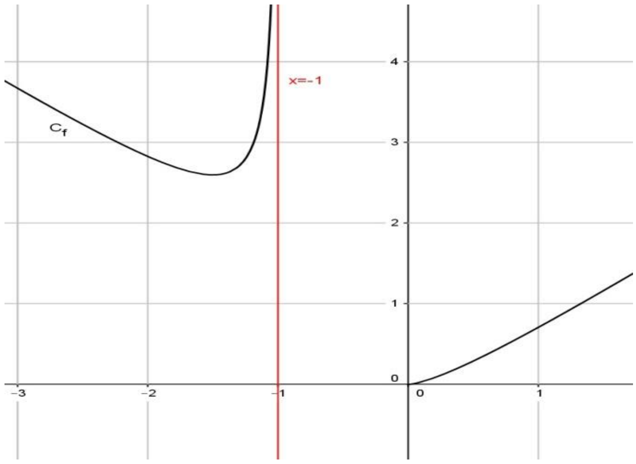
**Προσοχή**: Το $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ δεν έχει νόημα, γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται κοντά στο -1 από δεξιά.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}=\sqrt{\frac{0}{0+1}}=0.$$

Επομένως η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφος ασύμπτωτος από δεξιά.

**Προσοχή**: Το $\lim_{x\to0^-} f(x)$ δεν έχει νόημα, γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται κοντά στο 0 από αριστερά.

Τα παραπάνω φαίνονται στην γραφική παράσταση που επισυνάπτεται, χωρίς να είναι υποχρεωτική η κατασκευή από εσάς:




- *Πλάγιες ασύμπτωτες* :

☛ λ= $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>0\\|x|=x}}\frac{|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}=1.$

β= $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}-x\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>0\\|x|=x}}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)$

$$\overset{+\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{\substack{DLH\\\left(\frac{0}{0}\right)}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^{\cancelto{3}{4}}(\cancel{x+1})}{\cancel{x}(x+1)^{\cancelto{3}{4}}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{(x+1)^3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}} = -\frac{1}{2}.$$

Άρα η ευθεία $y = x - \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞.

☛ $\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x}$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<0 \\ |x|=-x}}\frac{|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}}$$

$$= -\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}} = -1.$$

$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x\right)$

$$\overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<0 \\ |x|=-x}}\left(-x\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x\right)$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right)$$

$$\overset{+\infty\cdot 0}{==} -\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\substack{DLH \\ \left(\frac{0}{0}\right)}}{=} -\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^{\cancelto{3}{4}}(\cancel{x+1})}{\cancel{x}(x+1)^{\cancelto{3}{4}}}}\right)$$

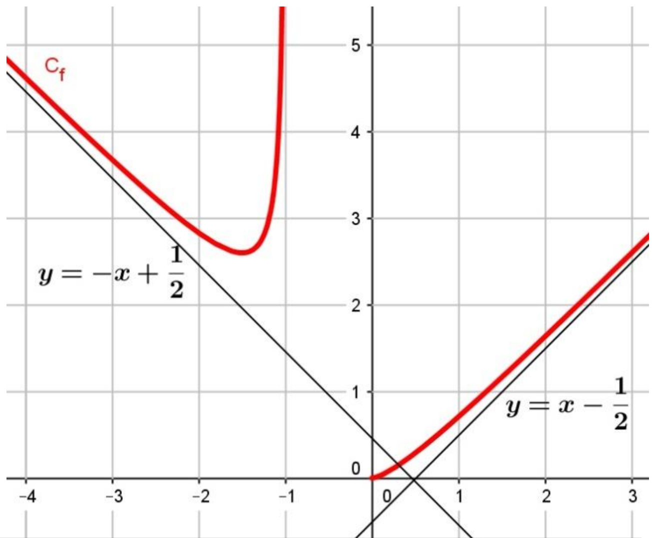
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{(x+1)^3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα η ευθεία $y = -x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτος στο -∞.




**2)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

- **i)** $h(x) = \frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$,
- **ii)** $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}-1}$,
- **iii)** $\sigma(x) = ln(x^3 - 3x^2 + 4)$
- **iv)** $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{3x^2+1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

**Λύση**:

**i)** Επειδή $x^2+1 \neq 0$, $D_f = R$.

- *Οριζόντιες ασύμπτωτες* δεν έχει γιατί

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{|x|^2}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{|x|}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \frac{|\pm\infty|\cdot(1+0+0)}{\sqrt{1+0}} = +\infty.$$

- *Οριζόντιες ασύμπτωτες* δεν έχει γιατί $D_f=\mathbb{R}$.
- *Πλάγιες ασύμπτωτες* :

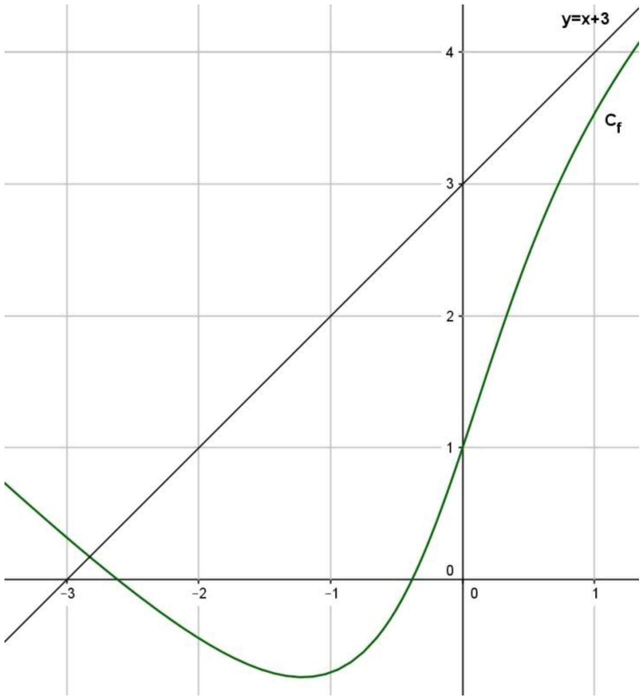
☛ $\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x\sqrt{x^2+1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \frac{1+0+0}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

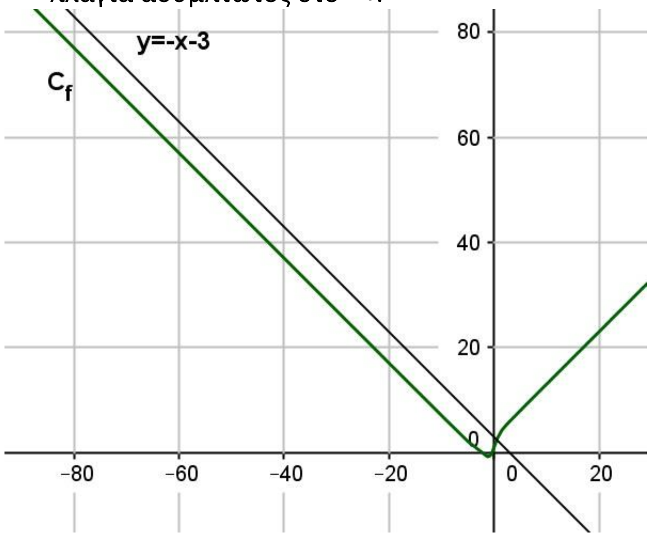
$\beta = \lim_{x\to+\infty}(h(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}} - x\right)$

$$\overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2+3x+1)^2-x^2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2+1})}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+9x^2+1+6x^3+2x^2+6x-x^4-x^2}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2+1})}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^3+10x^2+6x+1}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2+1})}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\cdot\left(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(x^2+3x+1+x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(x^2+3x+1+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$
$$= \frac{6+0+0+0}{\sqrt{1+0}\left(1+0+0+\sqrt{1+0}\right)}$$
$$= \frac{6}{2} = 3.$$

Άρα η ευθεία y=x+3 είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞.




☛ Ομοίως βρίσκουμε ότι η ευθεία y=-x-3 είναι πλάγια ασύμπτωτος στο -∞.




**ii)** • $D_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

- *Οριζόντιες ασύμπτωτες:*

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτος της φ στο +∞.

☛ Κοντά στο -∞ δεν ορίζεται η συνάρτηση, άρα δεν έχει νόημα το όριο στο -∞.

☛ Αφού έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο +∞, δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{0+2}{0-1} = -2.$

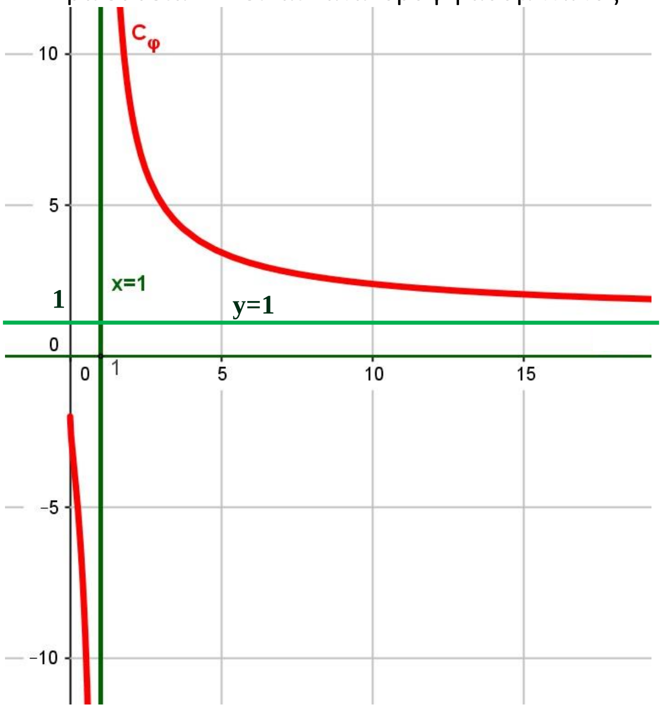
Άρα η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot \lim\limits_{\substack{x\to1^- \\ x<1 \\ \sqrt{x}<1 \\ \sqrt{x}-1<0}} \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$= 3\cdot(-\infty) = -\infty.$$

και $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)$ = … =3·(+∞)=+∞.

Άρα ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.




**iii)** • $x^3-3x^2+4>0$ ⇔ $(x+1)(x^2-4x+4)>0$ ⇔

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 0 | 4 | -1 |
| ↓ | -1 | 4 | -4 | |
| 1 | -4 | 4 | 0 | |

*Horner*

⇔ $(x+1)(x-2)^2>0$ ⇔ $\begin{cases} x+1>0 \\ και \\ x-2\neq 0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x>-1 \\ και \\ x\neq 2 \end{cases}$.

Άρα $D_f$=(-1,2)U(2,+∞).

• *Οριζόντιες ασύμπτωτες:*

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(x^3-3x^2+4)$ =+∞

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2+4) = +\infty.$

Άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim\limits_{x\to-1^+}\sigma(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} ln(x^3-3x^2+4)$ =-∞

γιατί $\lim\limits_{x\to-1^+}(x^3-3x^2+4) = 0.$

Άρα ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος από δεξιά.

☛ $\lim\limits_{x\to2}\sigma(x) = \lim\limits_{x\to2} ln(x^3-3x^2+4)$ =-∞

γιατί $\lim\limits_{x\to2}(x^3-3x^2+4) = 0.$

Άρα ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

• *Πλάγιες ασύμπτωτοι* :

☛ λ= $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x^3-3x^2+4)}{x}$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(ln(x^3-3x^2+4)\right)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3-3x^2+4}\cdot\left(x^3-3x^2+4\right)'\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3}$$

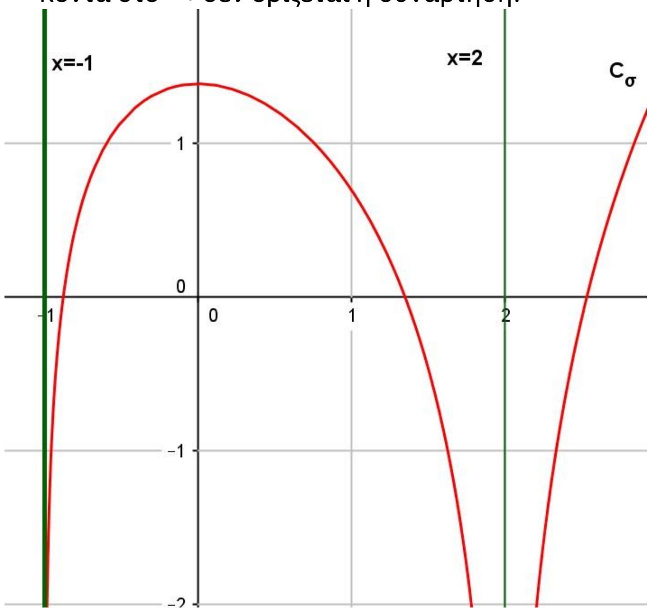
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0.$$

β= $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sigma(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(x^3-3x^2+4)$ =+∞

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2+4) = +\infty.$

Άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο +∞.

Κοντά στο -∞ δεν ορίζεται η συνάρτηση.




**iv)** Df=R*.

• *Οριζόντιες ασύμπτωτες:*

☛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty}3x = +\infty.$$

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο +∞.

☛ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2}$=0 γιατί:

-1≤ημx≤1 ⇔ $-\frac{1}{x^2} \le \frac{\eta\mu x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$……………….(1)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$…………………..(2)

Από (1),(2) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2} = 0.$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο -∞ τον άξονα των xOx΄(y=0).

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to0^-\\ x<0}} \frac{\eta\mu x}{x^2}$

$= \lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}$

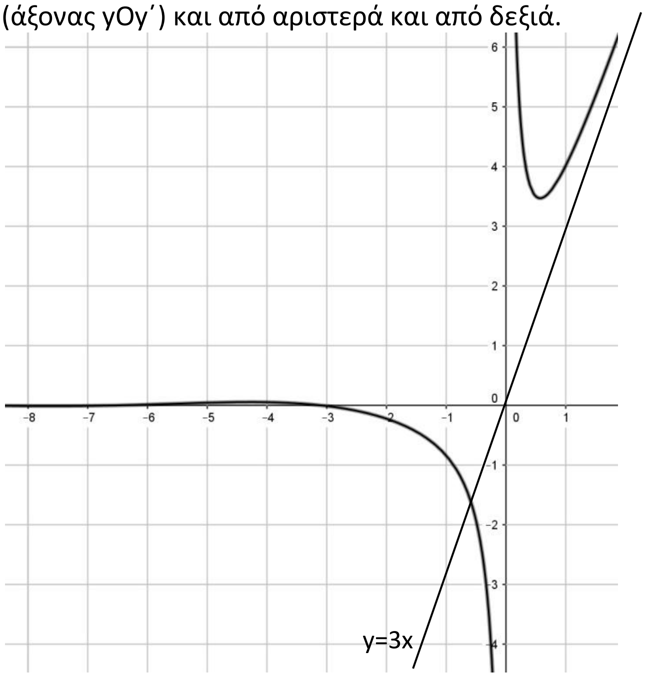
=1·(-∞)=-∞.

☛ $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to0^+\\ x>0}}\frac{3x^2+1}{x}$

$=\lim_{\substack{x\to0^+\\ x>0}}(3x^2+1)\cdot\lim_{\substack{x\to0^+\\ x>0}}\frac{1}{x}$

=1·(+∞)=+∞.

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την ευθεία x=0 (άξονας yOy΄) και από αριστερά και από δεξιά.




• *Πλάγιες ασύμπτωτοι* :

☛ λ= $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$=3.

β= $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x}-3x\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+1-3x^2}{x}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$=0.

Άρα η ευθεία y=3x είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞.

☛ Στο -∞ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο αφού έχει οριζόντια.

**3)** Να υπολογίσετε τα α, β∈R ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x+1}$, να έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞ την ευθεία y=x-2 . Στην συνέχεια να βρεθούν οι άλλες ασύμπτωτες.

**Λύση**: Πρέπει $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$=1 ............................(1)

και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$=-2.......................................(2)

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x^2+x} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2} = 1$

⇔ α=1,

γιατί η περίπτωση α=0 απορρίπτεται αφού αν α=0 τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x^2+x} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta x+1}{x^2+x} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta x}{x^2} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta}{x} = 1$

⇔ 0=1 άτοπο.

• $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = -2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\beta x+1}{x+1}-x\right) = -2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+\beta x+1-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right) = -2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\beta-1)x+1}{x+1}\right) = -2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\beta-1)x}{x}\right) = -2$

⇔ β-1=-2

⇔ β = -1,

γιατί αν β=1 τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\beta-1)x+1}{x+1}\right) = -2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right) = -2$

⇔ 0=-2 άτοπο.

Άρα $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x+1}$.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}(x^2-x+1)\cdot\lim_{\substack{x\to-1^-\\ x<-1\\ x+1<0}}\frac{1}{x+1}$

=3·(-∞)=-∞.

και $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}(x^2-x+1)\cdot\lim_{\substack{x\to-1^-\\ x>-1\\ x+1>0}}\frac{1}{x+1}$

=3·(+∞)=+∞.

Άρα η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από δεξιά και από αριστερά.

• *Πλάγιες ασύμπτωτοι* :

Στο +∞ έχει πλάγια ασύμπτωτο την ευθεία y=x-2 από υπόθεση.

λ= $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+x}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1.$

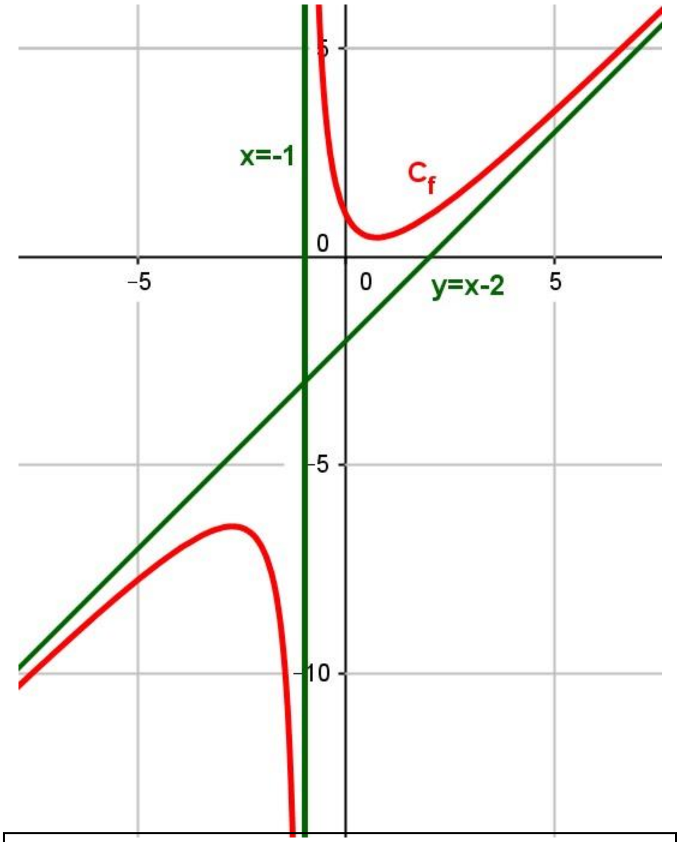
β= $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-x\right)$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-x+1-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right)$

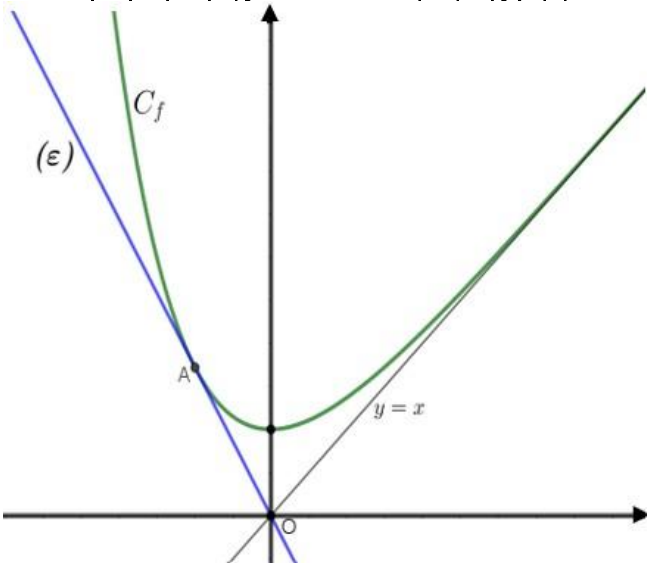
$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x+1}{x+1}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right)$=-2.

Άρα στο -∞ έχει πλάγια ασύμπτωτο την ίδια ευθεία y=x-2 .




**4)** **23530-2:** **(τράπεζα)** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο IR συνάρτησης $f(x)$




για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της $f$ έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία $(\varepsilon)$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία (δ): $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.

**α)** Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$.

(Μονάδες 9)

**β)** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$. (Μονάδες 8)

**γ)** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$.

(Μονάδες 8)

**Λύση:**

**α)** λε=f΄(-1) = $\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O} = \frac{f(-1)-0}{-1-0} = \frac{e-1}{-1} = 1 - e$.

Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η εξίσωση της θα είναι:

(ε): y = λε · x ⇔ y = (1-e)x.

**β)** Αφού η ευθεία y = 1 • x + 0 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (x) στο +∞, θα έχουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lambda_\delta = 1$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \beta = 0$

**γ)** Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

**5)** **25748-2:** Έστω $f$ συνάρτηση ορισμένη στο IR της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

**α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 3x)$.

(Μονάδες 8)

**β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

**γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$. (Μονάδες 9)

**Λύση:**

**α)** Αφού η γραφική παράσταση της f έχει την ευθεία (ε): y = 3x - 2 πλάγια ασύμπτωτη στο +∞, το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ θα είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε), δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ = 3 και το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 3x)$ θα είναι ο σταθερός όρος της ευθείας (ε), δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 3x)$ = β = -2.

**β)** Θέτω g(x) = $\frac{f(x)}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ = 3 και

f(x) = xg(x) ⇒ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}(xg(x))$

= +∞ · 3

= +∞.

**γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}-\frac{x}{x}}{\frac{xf(x)}{x}-\frac{3x^2}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}-1}{f(x)-3x}$

$=\frac{3\ -1}{-2}$

$= -1.$

**6)** END.