ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

1) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$.

Λύση:

- *Πεδίο ορισμού*: x+1≠0 ⇔ x≠-1 ....(1)

και $\dfrac{x^3}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1 \;\; ή \;\; x\geq 0$ .... (2)

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x^3	-		-	0	+
x+1	-	0	+		+
$\dfrac{x^3}{x+1}$	+		-	0	+

Από (1),(2) ⇔ $x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

- *Οριζόντιες ασύμπτωτες* δεν έχει γιατί

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x+1}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{\cancel{3}\to 2}}{\cancel{x}}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}x^2}=+\infty.$$

- *Κατακόρυφες ασύμπτωτες* :

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1\\ x+1<0}}\sqrt{x^3\frac{1}{x+1}}$$
$$=\sqrt{(-1)\cdot(-\infty)}$$
$$=\sqrt{(+\infty)}$$
$$=+\infty.$$

Επομένως η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφος ασύμπτωτος από αριστερά.

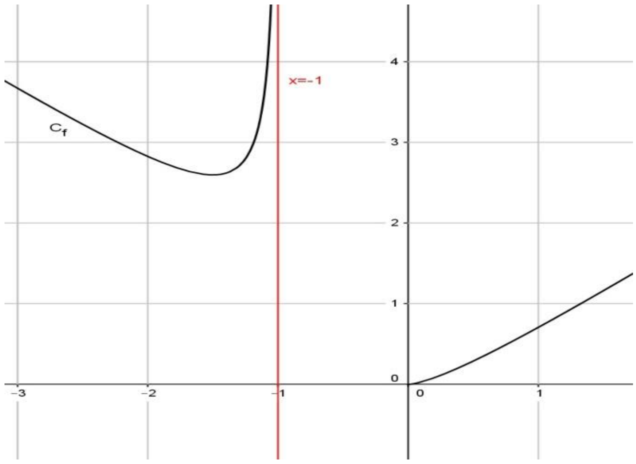
Προσοχή: Το $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ δεν έχει νόημα, γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται κοντά στο -1 από δεξιά.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$$
$$=\sqrt{\frac{0}{0+1}}=0.$$

Επομένως η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφος ασύμπτωτος από δεξιά.

Προσοχή: Το $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ δεν έχει νόημα, γιατί η συνάρτηση δεν ορίζεται κοντά στο 0 από αριστερά.

Τα παραπάνω φαίνονται στην γραφική παράσταση που επισυνάπτεται, χωρίς να είναι υποχρεωτική η κατασκευή από εσάς:



- *Πλάγιες ασύμπτωτες* :

☛ λ= $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x}$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\frac{|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{\cancel{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}=1.$$

β= $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}-x\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)$$
$$\overset{+\infty\cdot0}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}$$
$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{\cancelto{3}{x^4}(\cancel{x+1})}{\cancel{x}(x+1)^{\cancelto{3}{4}}}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{(x+1)^3}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}=-\frac{1}{2}.$$

Άρα η ευθεία $y=x-\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞.

☛ $\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x}$

$$=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}}\frac{|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$=-\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}}$$

$$=-\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}}=-1.$$

$\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right)$

$$\overset{+\infty-\infty}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}+x\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}}\left(-x\sqrt{\frac{x}{x+1}}+x\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)$$

$$\overset{+\infty\cdot 0}{=\!=}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=\!=}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{\cancelto{3}{x^4}(\cancel{x+1})}{\cancel{x}(x+1)^{\cancelto{3}{4}}}}\right)$$

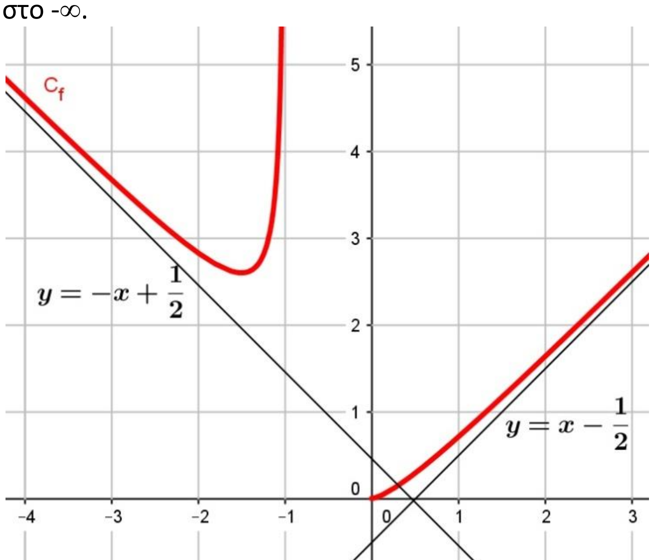
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{(x+1)^3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+3x^2+3x+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}=\frac{1}{2}.$$

Άρα η ευθεία $y=-x+\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτος στο -∞.



2) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

i) $h(x)=\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$,

ii) $\phi(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$,

iii) $\sigma(x)=\ln(x^3-3x^2+4)$

iv) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{3x^2+1}{x}, & x>0\end{cases}$

Λύση:

i) Επειδή $x^2+1\neq 0$, $D_f=R$.

- *Οριζόντιες ασύμπτωτες* δεν έχει γιατί

$$\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|^{\cancel{2}}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{|x|}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{|\pm\infty|\cdot(1+0+0)}{\sqrt{1+0}}=+\infty.$$

- *Οριζόντιες ασύμπτωτες* δεν έχει γιατί $D_f=R$.
- *Πλάγιες ασύμπτωτες* :

☛ $\lambda=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{x\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{1+0+0}{\sqrt{1+0}}=1.$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(h(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+1}}-x\right)$$

$$\overset{+\infty-\infty}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2+3x+1)^2-x^2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2+1}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+9x^2+1+6x^3+2x^2+6x-x^4-x^2}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2+1}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^3+10x^2+6x+1}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2+1}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\cdot\left(x^2+3x+1+x\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(x^2+3x+1+x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(x^2+3x+1+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$

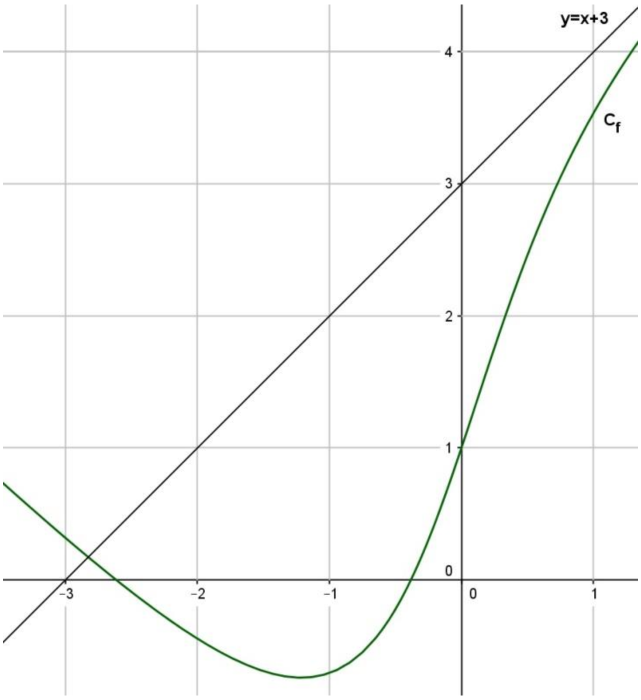
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^3}\left(6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6+\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right)$$

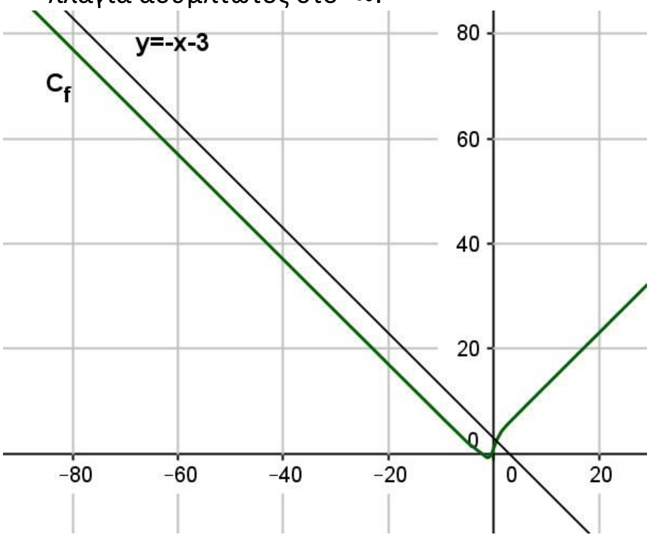
$$=\frac{6+0+0+0}{\sqrt{1+0}\left(1+0+0+\sqrt{1+0}\right)}$$

$$=\frac{6}{2}=3.$$

Άρα η ευθεία y=x+3 είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞.



☛ Ομοίως βρίσκουμε ότι η ευθεία y=-x-3 είναι πλάγια ασύμπτωτος στο -∞.



ii) • D_f=[0,1)U(1,+∞).

• *Οριζόν τιες ασύμπτωτες:*

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτος της φ στο +∞.

☛ Κοντά στο -∞ δεν ορίζεται η συνάρτηση, άρα δεν έχει νόημα το όριο στο -∞.

☛ Αφού έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο +∞, δεν θα έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim_{x\to0^+}\phi(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}=\frac{0+2}{0-1}=-2.$

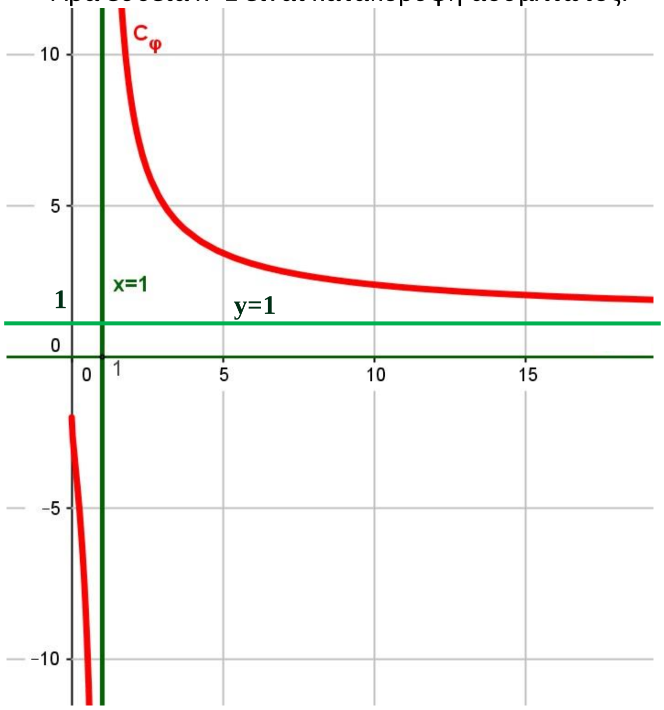
Άρα η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ $\lim_{x\to1^-}\phi(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\lim_{\substack{x\to1^-\\ x<1\\ \sqrt{x}<1\\ \sqrt{x}-1<0}}\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$=3\cdot(-\infty)=-\infty.$$

και $\lim_{x\to1^+}\phi(x)$ = ... =3·(+∞)=+∞.

Άρα ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.



iii) • $x^3-3x^2+4>0 \Leftrightarrow$ (x+1)(x^2-4x+4)>0 ⇔

1	-3	0	4	-1
↓	-1	4	-4	
1	-4	4	0	

Horner

⇔ (x+1)$(x-2)^2$>0 ⇔ $\begin{cases}x+1>0\\ \kappa\alpha\iota\\ x-2\neq0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\ \kappa\alpha\iota\\ x\neq2\end{cases}$.

Άρα D_f=(-1,2)U(2,+∞).

• *Οριζόντιες ασύμπτωτες:*

$\lim_{x\to+\infty}\sigma(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^3-3x^2+4)$=+∞

γιατί $\lim_{x\to+\infty}(x^3-3x^2+4)=+\infty$.

Άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim\limits_{x\to -1^+}\sigma(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x^3-3x^2+4)$=-∞

γιατί $\lim\limits_{x\to -1^+}(x^3-3x^2+4)=0$.

Άρα ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος από δεξιά.

☛ $\lim\limits_{x\to 2}\sigma(x)=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x^3-3x^2+4)$=-∞

γιατί $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x^2+4)=0$.

Άρα ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

• *Πλάγιες ασύμπτωτοι* :

☛ λ= $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3-3x^2+4)}{x}$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(x^3-3x^2+4)\right)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3-3x^2+4}\cdot(x^3-3x^2+4)'\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+4}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0.$$

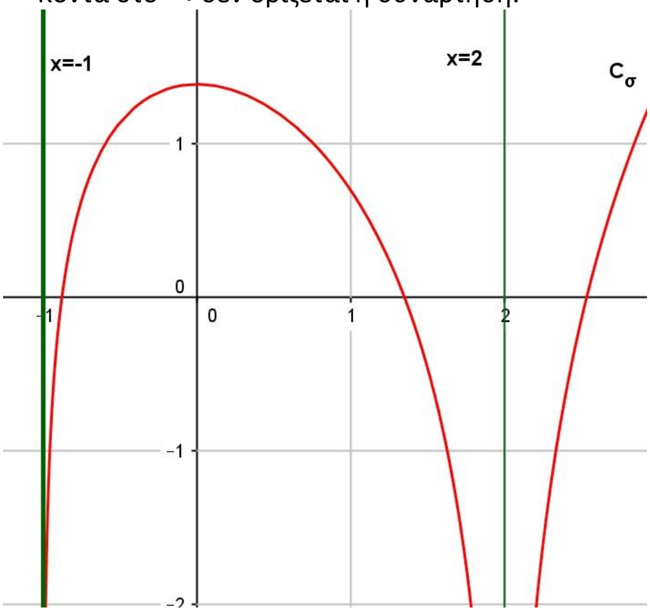
β= $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sigma(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^3-3x^2+4)$

=+∞

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2+4)=+\infty$.

Άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο +∞.

Κοντά στο -∞ δεν ορίζεται η συνάρτηση.



iv) Df=R*.

• *Οριζόντιες ασύμπτωτες:*

☛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}3x=+\infty.$$

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο +∞.

☛ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}$=0 γιατί:

-1≤ημx≤1 $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$ ....(1)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ ....(2)

Από (1),(2) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}=0$.

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο -∞ τον άξονα των xOx΄(y=0).

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$$

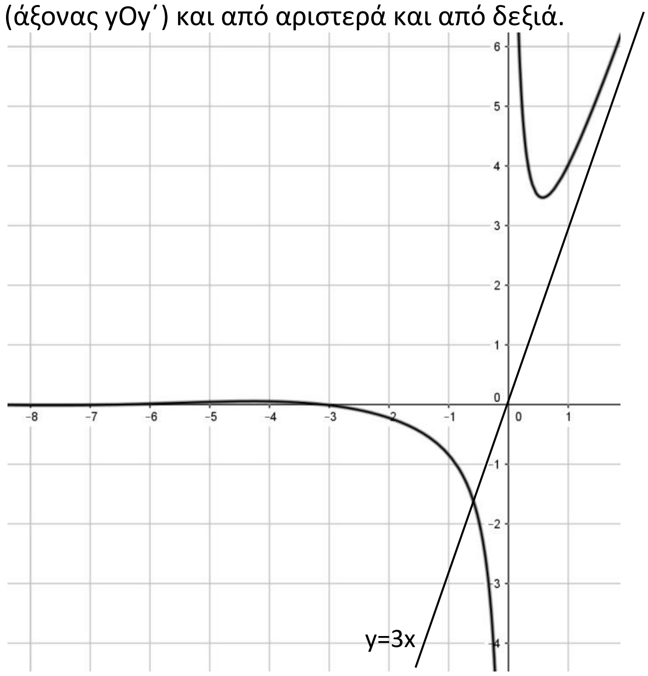
=1·(-∞)=-∞.

☛ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\dfrac{3x^2+1}{x}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\left(3x^2+1\right)\cdot\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\frac{1}{x}$$

=1·(+∞)=+∞.

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την ευθεία x=0 (άξονας yOy΄) και από αριστερά και από δεξιά.



• *Πλάγιες ασύμπτωτοι* :

☛ λ= $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=3.$$

β= $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{x}-3x\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+1-3x^2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Άρα η ευθεία y=3x είναι πλάγια ασύμπτωτος στο +∞.

☛ Στο -∞ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο αφού έχει οριζόντια.

3) Να υπολογίσετε τα α, β∈R ώστε η συνάρτηση $f(x)=\frac{ax^2+\beta x+1}{x+1}$, να έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞ την ευθεία y=x-2 . Στην συνέχεια να βρεθούν οι άλλες ασύμπτωτες.

Λύση: Πρέπει $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ ....(1)

και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-2$......................................(2)

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x^2+x}=1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2}=1$$

$\Leftrightarrow$ α=1,

γιατί η περίπτωση α=0 απορρίπτεται αφού αν α=0 τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x^2+x}=1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta x+1}{x^2+x}=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta x}{x^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta}{x}=1$$

$\Leftrightarrow$ 0=1 άτοπο.

• $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=-2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\beta x+1}{x+1}-x\right)=-2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+\beta x+1-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right)=-2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\beta-1)x+1}{x+1}\right)=-2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\beta-1)x}{x}\right)=-2$$

$\Leftrightarrow$ β-1=-2

$\Leftrightarrow$ β=-1,

γιατί αν β=1 τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\beta-1)x+1}{x+1}\right)=-2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-2$$

$\Leftrightarrow$ 0=-2 άτοπο.

Άρα $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x+1}$.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(x^2-x+1)\cdot\lim_{\substack{x\to-1^-\\x<-1\\x+1<0}}\frac{1}{x+1}$

=3·(-∞)=-∞.

και $\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x^2-x+1)\cdot\lim_{\substack{x\to-1^-\\x>-1\\x+1>0}}\frac{1}{x+1}$

=3·(+∞)=+∞.

Άρα η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από δεξιά και από αριστερά.

• *Πλάγιες ασύμπτωτοι* :

Στο +∞ έχει πλάγια ασύμπτωτο την ευθεία y=x-2 από υπόθεση.

λ= $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1\cdot$$

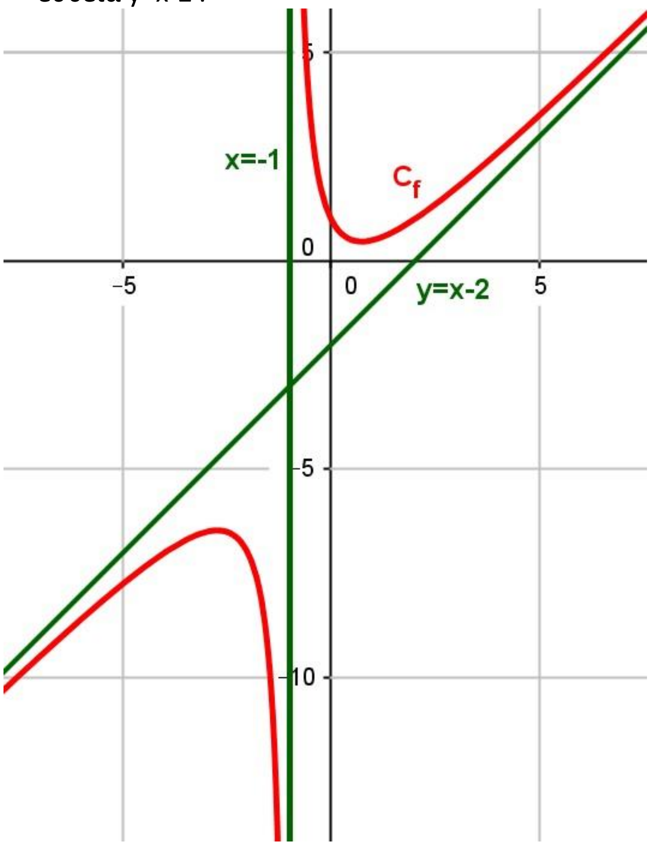
β= $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-x+1-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x+1}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right)=-2.$$

Άρα στο -∞ έχει πλάγια ασύμπτωτο την ίδια ευθεία y=x-2 .



4) sdfsdfaf