ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ De 'l Hospital

1) Υπολογίστε τα όρια:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2+3x-4}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x^2}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}$.

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3-5e^{x-1}}{x^3+x^2+x-3}$.

g. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

h. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$.

i. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$.

j. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$.

k. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 7x}$.

l. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$.

m. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{2x-\pi}$.

n. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}$.

o. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$.

p. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln^2x}{x}$.

q. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1+lnx}$.

r. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

s. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx}{x^3}$.

Λύση:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2+3x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3+3x^2-2x-2)'}{(x^2+3x-4)'}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+6x-2}{2x+3}=\ldots=\frac{7}{5}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)'}{(x)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1}=$συν$0^0$=1.

c. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\varepsilon\varphi x)'}{(x^2)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{2x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2x\sigma\upsilon\nu^2 x}=\left(\frac{1}{0}\right)=+\infty,$
γιατί 2xσυν^{2}x>0 όταν x→0^+.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}{(x^2)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=$
$=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}=-\frac{1}{2}$.

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$.

f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3-5e^{x-1}}{x^3+x^2+x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2+3-5e^{x-1})'}{(x^3+x^2+x-3)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-5e^{x-1}}{3x^2+2x+1}=$
$=-\frac{1}{6}$.

g. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}=$
$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left[ln\left(1-\frac{3}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$
$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\left(1-\frac{3}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} =$$

$$= - \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1-\frac{3}{x}} = - 3.$$

h. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{[\ln(1+x)]'}{(3x)'} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3}.$$

i. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x^2-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(\ln x)'}{(x^2-1)'} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

j. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right)'}{(\eta\mu x)'} =$$

$$-\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{3x^2\eta\mu\frac{1}{x} + x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\cdot\cancel{\left(\frac{1}{x}\right)'}}{\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{3x^2\eta\mu\frac{1}{x} - x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{0-0}{1} = 0.$$

(Τα όρια $x^3\eta\mu\frac{1}{x}$, $3x^2\eta\mu\frac{1}{x}$ και $x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ βρίσκονται με κριτήριο παρεμβολής).

k. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\varepsilon\varphi4x}{\eta\mu7x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{(\varepsilon\varphi4x)'}{(\eta\mu7x)'} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 4x}\cdot(4x)'}{\sigma\upsilon\nu7x\cdot(7x)'} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{4}{7\sigma\upsilon\nu7x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 4x} = \frac{4}{7}.$$

l. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(\eta\mu(x-2))'}{(x^2-4)'} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)\cdot(x-2)'}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

m. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu x}{2x-\pi} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\eta\mu x)'}{(2x-\pi)'} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{2} = -\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

n. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{[\ln(1+x)-e^x+1]'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'-e^x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\left(\frac{1}{1+x}-e^x\right)'}{(2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{-\frac{(1+x)'}{(1+x)^2}-e^x}{2} =$$

$$= -\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}+e^x}{2} = -\frac{1+1}{2} = -1.$$

o. $\lim\limits_{x\to0} \frac{2^x-3^x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{(2^x-3^x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2^x\ln2-3^x\ln3}{1} =$$

$$= \ln2-\ln3 = \ln\frac{2}{3}.$$

p. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln^2x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x\cdot(\ln x)'}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2\ln x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

q. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+\ln x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(1+\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (xe^x) = +\infty.$$

r. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(1+e^x)]'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x}\cdot(1+e^x)'}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(1+e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

s. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3x^3}\right) = 0.$$

2) Υπολογίστε τα όρια:

a) $\lim_{x\to0^+} (x\ln x)$,

b) $\lim_{x\to+\infty} (x-\ln x)$,

c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$,

d) $\lim_{x\to0^+} x^x$,

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$,

f) $\lim_{x\to+\infty} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

Λύση:

a) $$\lim_{x\to0^+} (x\ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{==} \lim_{x\to0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} = -\lim_{x\to0^+} x = 0.;$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} (x-\ln x) \overset{+\infty-\infty}{=} \cancel{\lim_{x\to+\infty}} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty\cdot(1-0) = +\infty.$$

γιατί $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1\right).$$

Επειδή $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1+0} = 1,$$

το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $+\infty\cdot0$ οπότε γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1}{\frac{1}{x}} \overset{DLH\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$$

d) $\lim_{x\to0^+} x^x \overset{(0^0)}{=} \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$, λόγω του (a) ερωτήματος.

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x \overset{(1^{+\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^2$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \overset{+\infty\cdot0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \overset{+\infty\cdot0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{2+x}\left(-\frac{2}{\cancel{x^2}}\right)}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2.$$

f) $$\lim_{x\to+\infty} (1+3x)^{\frac{1}{x}} \overset{(+\infty^0)}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+3x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+3x)}{x}} = e^0 = 1,$$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x} \overset{DLH\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+3x))'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+3x}(1+3x)'\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{1+3x}\right) = 0.$$

3) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, x>0.

Λύση: • *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) \overset{(0^{+\infty})}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)=0$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln x$=+∞·(-∞)=-∞

και $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.

Άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• *πλάγιες ασύμπτωτες:*

$$\lambda = \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}-1}$$
$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}=0,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1 - 0 = 1$,

επομένως $= \lim\limits_{x\to +\infty} x^{1-\frac{1}{x}} = +\infty$

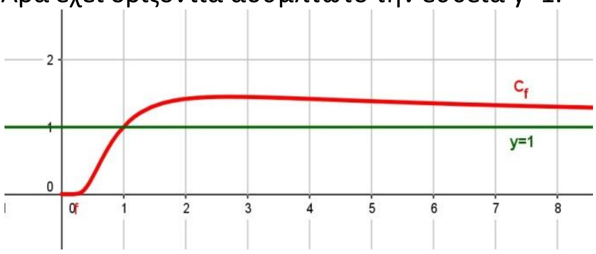
και $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}} = 0$.

$$\beta = \lim_{x\to +\infty}(f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to +\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to +\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$\overset{(+\infty^0)}{=} \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

= e^0=1, γιατί

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{DLH\ \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}$$
$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία y=1.



Κοντά στο -∞ η συνάρτηση δεν ορίζεται.

4) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2-1}$.

Λύση: A_f=R-{-1,1}.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{-x}}{x-1}\cdot \lim_{\substack{x\to -1^+\\ x>-1\\ x+1>0}}\frac{1}{x+1}$$
$$= -\frac{e}{2}\cdot(+\infty)$$
$$=-\infty.$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{-x}}{x-1}\cdot \lim_{\substack{x\to -1^-\\ x<-1\\ x+1<0}}\frac{1}{x+1}$$
$$= -\frac{e}{2}\cdot(-\infty)$$
$$=+\infty.$$

Άρα η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από αριστερά και από δεξιά.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-x}}{x+1}\cdot \lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1\\ x-1>0}}\frac{1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2e}\cdot(+\infty)$$
$$=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{-x}}{x+1}\cdot \lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1\\ x-1<0}}\frac{1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2e}\cdot(-\infty)$$
$$=-\infty.$$

Άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από αριστερά και από δεξιά.

Οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}\cdot \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2-1}$$
$$=0\cdot 0=0.$$

Άρα η ευθεία y=0 (άξονας xOx΄) είναι οριζόντια ασύμπτωτος στο +∞.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$
$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{(e^{-x})'}{(x^2-1)'}$$
$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{2x}$$
$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{(-e^{-x})'}{(2x)'}$$
$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{2}$$
$$=+\infty.$$

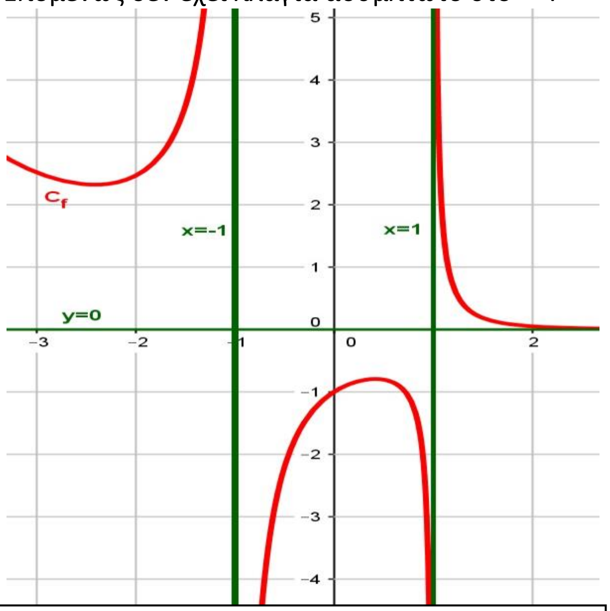
Επομένως δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο -∞.

Πλάγιες ασύμπτωτες: Στο +∞ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο, γιατί έχει οριζόντια.

$$\lambda = \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^3-x}$$
$$\overset{DLH\ \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{(e^{-x})'}{(x^3-x)'}$$
$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{3x^2-1}$$
$$\overset{DLH\ \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{(-e^{-x})'}{(3x^2-1)'}$$
$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{6x}$$

$$\overset{\substack{DLH \\ \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{(e^{-x})'}{(6x)'}$$
$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{6}$$
=-∞.

Επομένως δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο -∞.



5) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^3}{\ln x}$.

Λύση: A_f=(0,1)U(1,+∞).

- *κατακόρυφες ασύμπτωτοι*:

☛ $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{\ln x}$
$$=\lim_{x\to0^+}x^3\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}$$
=0·0=0.

Άρα η x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\ln x}$
$$=\lim_{x\to1^-}x^3\cdot\lim_{\substack{x\to1^- \\ x<1 \\ \ln x<0}}\frac{1}{\ln x}$$
=1·(-∞)
=-∞.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3}{\ln x}$$
$$=\lim_{x\to1^+}x^3\cdot\lim_{\substack{x\to1^+ \\ x>1 \\ \ln x>0}}\frac{1}{\ln x}$$
=1·(+∞)
=+∞.

Άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από αριστερά και από δεξιά.

Οριζόντιες ασύμπτωτοι: Έχει νόημα μόνο στο +∞.

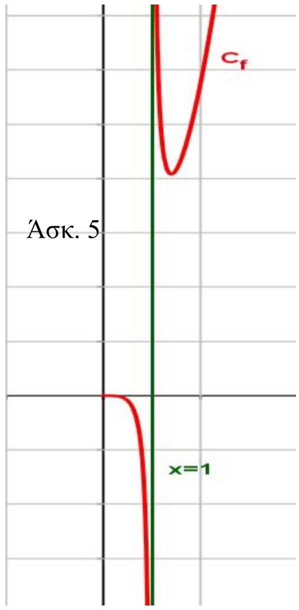
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\ln x}$$
$$\overset{\substack{DLH \\ \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(\ln x)'}\text{το}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{x}}\text{το}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty.$$

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο +∞.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}$$
$$\overset{\substack{DLH \\ \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(\ln x)'}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}3x^3$$
=+∞.

Άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞.



6) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}$.

Λύση: A_f=R*.

- *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)$=0.

$-1\le\eta\mu\frac{1}{x^2}\le1\Leftrightarrow -x^2\le x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\le x^2$.....(1)

$\lim_{x\to0}x^2=\lim_{x\to0}(-x^2)=0$......................................(2)

Από (1), (2) και το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)=0$.

Άρα η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

Οριζόντιες ασύμπτωτες: Έχει νόημα μόνο στο +∞.

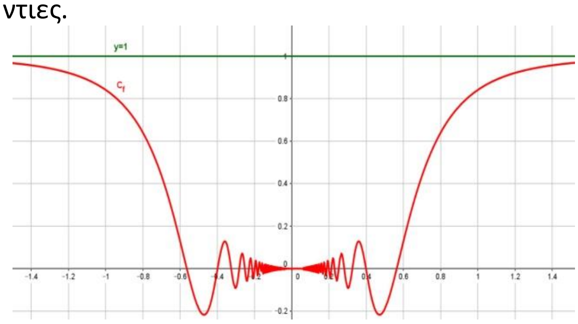
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

Θέτω $\frac{1}{x^2}$=u.

$\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο ±∞ την ευθεία y=1.

Πλάγιες ασύμπτωτες: δεν έχει γιατί έχει οριζόντιες.



7) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$.

Λύση:

- *Πεδίο ορισμού*:

x+1≠0 ⇔ x≠-1...(1)

$\frac{x^3}{x+1}\ge0$⇔ $x^3(x+1)\ge0$
⇔ x(x+1)≥0
⇔ x≤-1 ή x≥0.......................................(2)

x	-∞	-1		0	+∞
x(x+1)	+	○	-	○	+

Από (1) και (2) ⇔ A_f=(-∞,-1)U[0,+∞).

• <u>*κατακόρυφες ασύμπτωτες*</u>:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} +\infty$$

γιατί $x^3<0$ και $x+1<0$.

Άρα η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος από αριστερά.

<u>*Οριζόντιες ασύμπτωτες*</u>:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}x^2} = +\infty$$

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο ±∞.

<u>*Πλάγιες ασύμπτωτες*</u>:

☛ Στο +∞:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3+x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\cancel{\frac{x^3}{x^3}}} = 1.$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right) \overset{(+\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{(x+1)}^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{x-x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}\right) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= -\frac{1}{(1+\sqrt{1+0})\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}$$

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞ την ευθεία $y = x - \frac{1}{2}$.

☛ Στο -∞:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x} = \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ \sqrt{x^2}=|x|=-x}}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{-\sqrt{x^2}} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3+x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\cancel{\frac{x^3}{x^3}}} = -1.$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} -\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right) \overset{(+\infty\cdot 0)}{=} -\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

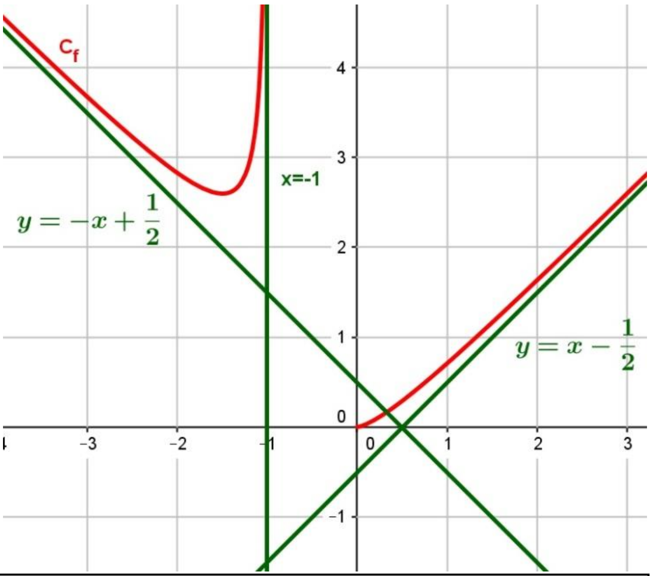
$$= -\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{(x+1)^2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}\right) = -\lim_{\substack{x\to-\infty\\ |x|=-x\\ |x+1|=-x-1}}\left(x\frac{|x|-|x+1|}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}\right) = -\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{-x-(-x-1)}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+x+1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{(1+\sqrt{1+0})\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτο στο -∞ την ευθεία $y = -x + \frac{1}{2}$.



8) ΘΕΜΑ 2ον (2001)

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2, & x\le 3\\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3\end{cases}$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha=-{}^{1}/_{9}$.

Μονάδες 9

Λύση: f(3)=9α……………………………………………(1)

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(\alpha x^2)=9\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{1-e^{x-3}}{x-3}$$

$$\overset{DLH\,\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to3^+}\frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'}\text{τή}$$

$$=-\lim_{x\to3^+}e^{x-3}$$

$$=-e^0=-1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Για να είναι συνεχής στο x=3 πρέπει $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)\Leftrightarrow 9\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=$ =–1/9.

9) ΘΕΜΑ 2ον (2004)

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

Λύση:

α) x>0 ⇒ $A_f=(0,+\infty)$.

f΄(x)=2xlnx+x

=2x(lnx+1).

- f΄(x)=0 ⇔ 2x(lnx+1)=0
  ⇔lnx+1=0 ……………γιατί x>0
  ⇔ lnx=-1
  ⇔ $x=e^{-1}=1/e$.
- f΄(x)>0 ⇔ 2x(lnx+1)>0
  ⇔lnx+1>0 ……………γιατί x>0
  ⇔ lnx>-1
  ⇔ $x>e^{-1}=1/e$.

f΄(x)<0 ⇔ ……………
⇔ x<1/e.

x	0 1/e +∞	
f΄(x)	- 0	+
f(x)	↘	↗

Στο διάστημα (0,1/e] είναι γνησίως φθίνουσα.
Στο διάστημα [1/e,+∞) είναι γνησίως αύξουσα.
Στο x=1/e παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}\underbrace{ln\frac{1}{e}}_{-1}=-\frac{1}{e^2}$.

β) Έστω $\Delta_1=\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και $\Delta_2=\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

$f(\Delta_1)\overset{(f\searrow)}{=}\left(f\left(\frac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=$

$=\left(-\frac{1}{e^2},\ 0\right)$, γιατί:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2lnx)\overset{(0\cdot(-\infty))}{=}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{lnx}{\frac{1}{x^2}}\right)\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}}=$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{2}=0.$$

$f(\Delta_2)\overset{(f\nearrow)}{=}\left(f\left(\frac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=$

$=\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$, γιατί:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2lnx)=+\infty.$

Άρα $f((0,+\infty))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)$

$=\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right).$

10) ΘΕΜΑ 3ον (1983) Έστω η συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [0,+∞) με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x} & \text{εάν } 0<x\neq1\\ 0 & \text{εάν } x=0\\ -1 & \text{εάν } x=1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της,

ii) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1)

Λύση:

i) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1-x}$

$$=\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-x}}_{1}\cdot\lim_{x\to0^+}(x\ln x)$$

$$=\lim_{x\to0^+}(x\ln x)$$

$$\overset{0(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}(x\ln x)$$

$$\overset{DLH\,\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}x$$

=0=f(0), άρα είναι συνεχής στο x=0.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{1-x}$$
$$= \lim_{x\to 1} x\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$$
$$\overset{DLH}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}$$
$$= -\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$$
=-1=f(1), άρα είναι συνεχής στο x=1.

Στα διαστήματα (0,1) και (1,+∞) $f(x) = \frac{x\ln x}{1-x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

ii) $f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{1-x}\right)' = \frac{(x\ln x)'(1-x) - \ln x\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}$
$$= \frac{(\ln x+1)(1-x)+\ln x}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{\ln x+1-x}{(1-x)^2}$$

Θέτω g(x)=lnx+1-x, x>0.

$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0$ στο (0,1).

Επομένως g $\nearrow$ στο (0,1).

Άρα x<1 ⇔ g(x)<g(1)

⇔ lnx+1-x<0

⇔ $f'(x) < 0$.

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο (0,1).

11) Θέμα 3ον θετική -τεχνολογική 2008:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
Μονάδες 3

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
Μονάδες 9

iii) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.
Μονάδες 6

Λύση:

i) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x\ln x)$
$$\overset{0(-\infty)}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$
$$\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= -\lim_{x\to 0} x$$
$$= 0$$
$$= f(0).$$

Άρα είναι συνεχής στο 0.

ii) f΄(x)=1+lnx.

• f΄(x)=0 ⇔ 1+lnx=0

⇔ lnx=-1

⇔ $\ln x=\ln e^{-1}$

⇔ $x=e^{-1}={}^{1}/_{e}$.

• f΄(x)>0 ⇔ 1+lnx>0

⇔ lnx>-1

⇔ $\ln x>\ln e^{-1}$

⇔ $x>e^{-1}={}^{1}/_{e}$.

και f΄(x)<0 ⇔ 1+lnx=0

....

⇔ $x<e^{-1}={}^{1}/_{e}$.

x	0	$^1/_e$	+∞
f΄(x)	-	O	+
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f είναι $\searrow$ στο $A_1=[0,{}^{1}/_{e}]$ και $\nearrow$ στο $A_2=[{}^{1}/_{e},+\infty)$.

Στο $^1/_e$ παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

• $f(A_1) \underset{\text{στο}\left(0,\frac{1}{e}\right)}{\overset{f\downarrow}{==}} \left[\lim_{x\to\frac{1}{e}} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right]$

$=\left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right]$........γιατί f συνεχής

$=\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$.

• $f(A_2) \underset{\text{στο}\left[\frac{1}{e},+\infty\right)}{\overset{f\uparrow}{====}} \left[\lim_{x\to\frac{1}{e}} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$=\left[f\left(\frac{1}{e}\right), +\infty\right)$........γιατί f συνεχής

$=\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Το σύνολο τιμών της είναι:

$f(A_f)=f(A_1)\cup f(A_2)$

$=\left[-\frac{1}{e},0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

$=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$..

iii) • Αν x=0, η δοθείσα γίνεται 0=1 ψευδής.

Άρα η x=0 απορρίπτεται.

• Αν x>0, η δοθείσα γίνεται:

$x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ ⇔ $\ln x = \frac{\alpha}{x}$

⇔ xlnx=α

⇔ f(x)=α..............................(1)

Επειδή η f στο $^1/_e$ παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, θα είναι $f(x) \geq -\frac{1}{e}$ για κάθε x>0.

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $\alpha < -\frac{1}{e}$. Τότε η (1) είναι αδύνα-τη.

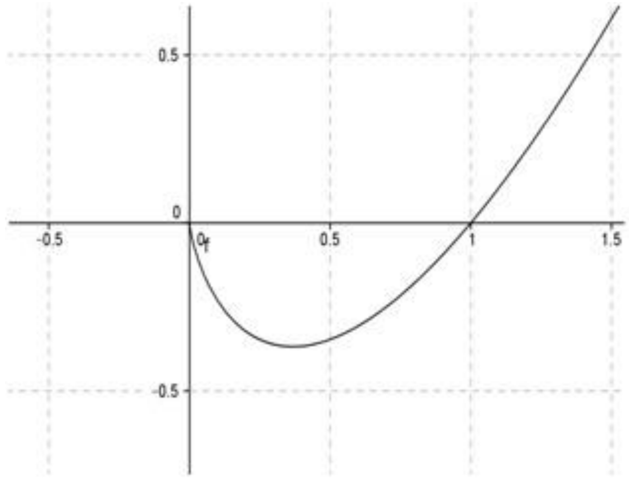
2η περίπτωση: $\alpha = -\frac{1}{e}$. Τότε η (1) γίνεται $f(x) = -\frac{1}{e}$ ⇔ $x=\frac{1}{e}$.

3η περίπτωση: $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$.

Τότε επειδή $\alpha\in f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$, η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1 και μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή είναι μονότονη σε αυτά, είναι μοναδικές.

4η περίπτωση: α>0.

Τότε επειδή $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$, η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1 και επειδή είναι μονότονη σε αυτό, είναι μοναδική.



12) Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης f(x)=$\frac{(1-e^x)(e^{\varepsilon\varphi x}-e^x)}{\eta\mu x\cdot(\varepsilon\varphi x-x)}$, στο $x_0=0$.

Λύση: $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-e^x)}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-e^x)'}{(\eta\mu x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1.$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}-e^x}{\varepsilon\varphi x-x}=\lim\limits_{x\to0}\left[e^x\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to0}e^x\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}=$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^{\varepsilon\varphi x-x}-1)'}{(\varepsilon\varphi x-x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}\cancel{(\varepsilon\varphi x-x)'}}{\cancel{(\varepsilon\varphi x-x)'}}=e^0=1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ = -1·1=-1.

13) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\eta\mu 2x)}{\ln(\eta\mu x)}$.

Λύση:

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\eta\mu 2x)}{\ln(\eta\mu x)}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[\ln(\eta\mu 2x)]'}{[\ln(\eta\mu x)]'}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\eta\mu 2x}\cdot(\eta\mu 2x)'}{\frac{1}{\eta\mu x}\cdot(\eta\mu x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\eta\mu 2x}\sigma\upsilon\nu 2x}{\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu x}=$ $\quad\frac{1}{1}=1$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\eta\mu x)'}{(\eta\mu 2x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{1}{2}.$

14) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Λύση:

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=^{((+\infty)\cdot0)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=$

Θέτω $\frac{1}{x}=u$.
Όταν x→+∞
τότε u→0

$=\lim\limits_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{u\to0}\frac{(e^u-1)'}{(u)'}=$

$=\lim\limits_{u\to0}e^u=e^0=1.$

15) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Λύση:

$\lim\limits_{x\to0}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\right)=$

Θέτω $\frac{1}{x^2}=u$.
Όταν x→0
τότε u→+∞

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{e^u}{u}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(e^u)'}{(u)'}=$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty.$

16) 24755-2: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{\eta\mu x}{x}\ , & x\neq0\\ \alpha\ , & x=0\end{cases},$$

η οποία είναι συνεχής στο IR.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$. (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR, άρα και στο 0. Συνεπώς α = f(0) = $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x\neq0}}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)$

$=1-1$

$=0.$

β) $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x\neq0}}\frac{f(x)}{x}$……………γιατί f(0)=0

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^2}$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2x}$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\eta\mu x}{2}$

$=0.$

γ) Η εφαπτομένη της C, στο σημείο (0,0) έχει εξίσωση y - f(0) = f΄(0)x
⇔ y = 0, δηλαδή είναι ο άξονας xx΄.

17) 28314-4: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : [1,+∞)→IR με $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x+1}}, & x>1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$, λ ∈ IR.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = [1,+\infty)$.
Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, οπότε θα ισχύει $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{\lambda x+1}} = 0 \ldots\ldots(1)$$

• Αν λ ≠ -1 τότε $\lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{\lambda x+1}} = e^{\frac{1}{\lambda+1}} > 0$ άτοπο λόγω της (1).

• Αν λ = -1, τότε $\lim_{x\to1^+} \frac{1}{\lambda x+1} = \lim_{\substack{x\to1^+ \\ x>1 \\ 1-x<0}} \frac{1}{1-x} = -\infty$ και

$$\lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{\lambda x+1}} = \lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{1-x}} \underset{u=\frac{1}{1-x}}{\overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega}{=}} \lim_{u\to0^-} e^{u} = 0 = f(1)$$

που ισχύει γιατί είναι συνεχής.
Άρα λ = -1.

β) Για λ = -1, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}}, & x>1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$.

• Για κάθε x > 1 η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f΄(x) = \left(e^{\frac{1}{1-x}}\right)' = e^{\frac{1}{1-x}}\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -e^{\frac{1}{1-x}}\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)' = e^{\frac{1}{1-x}}\frac{1}{(1-x)^2}.$$

• Στο $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x-1} = \lim_{u\to-\infty}(ue^u) \overset{(-\infty\cdot0)}{=} \lim_{u\to-\infty}\left(\frac{u}{\frac{1}{e^u}}\right) \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{(u)'}{\left(\frac{1}{e^u}\right)'} = -\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{\frac{(e^u)'}{(e^u)^2}}$$

$$= -\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{\frac{e^u}{(e^u)^2}} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και f ΄(1) = 0.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), για κάθε x > 1 η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

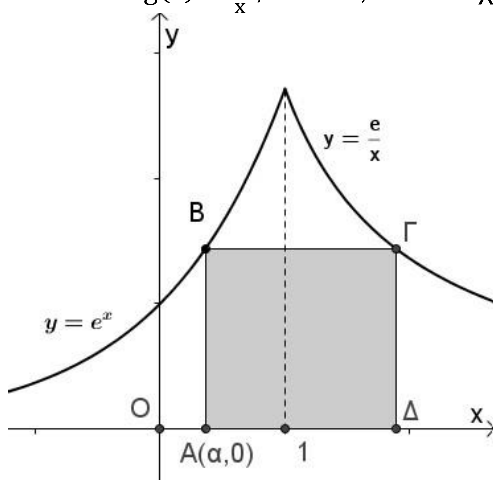
$$f΄(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο A_f.
Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = [1,+\infty)$ θα παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ελάχιστο το f(1) = 0.

δ) Είναι η συνάρτηση f συνεχής στο A_f και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της θα είναι το $f([1,+\infty)) = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [0,1)$,

αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-x}} = e^{-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

18) 28342-4: Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα x′x και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x<1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x>1$, αντίστοιχα.



Έστω Α(α , 0) με α < 1.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$, (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = e - \alpha e^{\alpha}$, $\alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ . (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) i) Η τετμημένη της κορυφής Α είναι α και αν $x_Δ$ είναι η τετμημένη της κορυφής Δ, τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΔΓ του ορθογωνίου θα είναι $(ΑΒ)=e^α$ και $(ΔΓ) = \frac{e}{x_Δ}$.

Όμως (ΑΒ)=(ΔΓ), άρα $e^α = \frac{e}{x_Δ} \Leftrightarrow x_Δ = e^{1-α}$.

ii) Είναι $(ΑΔ)=|x_Δ-x_A|=x_Δ-x_A=e^{1-α}-α$ και $(ΑΒ)=e^α$, οπότε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι

$$E(α) = (AB)\cdot(AΔ) = e^α(e^{1-α}-α) = e - αe^α,\ α < 1.$$

β) Για κάθε α<1 είναι

$$E'(α) = (e - αe^α)' = (e)' - (αe^α)' = -(α)'e^α - α(e^α)' = -e^α - αe^α = -e^α(1+α),$$

• $E'(α) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow α = -1$, γιατί $e^α \neq 0$ για κάθε α.

• $E'(α) > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow α < -1$, γιατί $e^α > 0$ για κάθε α.

$E'(α) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow α > -1$.

Η ρίζα και το πρόσημό της E′(α) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τη μέγιστη τιμή της E(α).

α	$-\infty$	-1	1
E΄(α)	+		-
E(α)	↗		↘

Ο.Μ.

$$E(-1) = e + \frac{1}{e}$$

Επομένως η μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(-1)= e + \frac{1}{e}$.

γ) • $E((-\infty,-1)) \overset{E\uparrow}{=} \left(\lim_{α\to-\infty} E(α), E(-1)\right) = \left(e,\ e + \frac{1}{e}\right)$,

γιατί

$$\lim_{α\to-\infty} E(α) = \lim_{α\to-\infty}(e - αe^α) = e - \lim_{α\to-\infty}(αe^α) \overset{(-\infty\cdot 0)}{=} e - \lim_{α\to-\infty}\left(\frac{α}{\frac{1}{e^α}}\right) \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} e - \lim_{α\to-\infty}\frac{(α)'}{\left(\frac{1}{e^α}\right)'}$$

$$= e - \lim_{α\to-\infty}\frac{(α)'}{\left(\frac{1}{e^α}\right)'} = e - \lim_{α\to-\infty}\frac{1}{-\frac{(e^α)'}{(e^α)^2}} = e + \lim_{α\to-\infty}\frac{1}{\frac{e^α}{(e^α)^2}} = e + \lim_{α\to-\infty} e^α = e + 0 = e.$$

Επειδή $1 \notin E((-\infty,-1))$, δεν υπάρχουν τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

• $E((-1,1)) \overset{E\downarrow}{=} \left(\lim_{α\to1^-} E(α), E(-1)\right) = \left(0,\ e + \frac{1}{e}\right)$,

γιατί

$$\lim_{α\to1^-} E(α) = \lim_{α\to1^-}(e - αe^α) = e - e = 0.$$

Επειδή $1 \in E((-1,1))$, η εξίσωση E(α)=1, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,1) και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα, μοναδική.

Επομένως υπάρχει ακριβώς μία τιμή του α, η οποία ανήκει στο διάστημα (−1,1), για την οποία το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

19) 29130-4:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xημx, x \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 4)

ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y = x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Για τη συνάρτηση g : IR → IR ισχύει ότι $g(x) - x = ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 5)

ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) i. Για κάθε $x \in$ IR, είναι $f'(x) = (xημx)' = ημx + xσυνx$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}ημ\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ημ\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}συν\frac{\pi}{2} = 1.$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f, στο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, είναι η $y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ y = x που είναι το ζητούμενο.

ii. Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την y=x επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = xημx \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow x = xημx \Leftrightarrow x - xημx = 0 \Leftrightarrow x(1 - ημx) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 1 - ημx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } ημx = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2κ\pi + \frac{\pi}{2},\ κ \in \mathbb{Z}.$$

• Για x = 0 είναι y = x = 0.
• Για $x = 2κπ + \frac{π}{2}$, $y = 2κπ + \frac{π}{2}$, κ∈ℤ.
Οπότε η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της y = x τα οποία είναι η αρχή των αξόνων Ο(0,0) και τα σημεία $\left(2κπ+\frac{π}{2}, 2κπ+\frac{π}{2}\right)$, κ∈ℤ.

β) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$
= ln1
= 0.

Άρα η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτος της C_f στο +∞.

ii. $g(x) - x = ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) > 0$.
Άρα g(x) – x > 0 ⇔ g(x) > x, δηλαδή στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$.

γ) f(x) = xημx ≤ x·1=x, γιατί ημx ≤ 1.
Άρα f(x) ≤ x < g(x) ⇒ f(x) < g(x), δηλαδή στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

20) 29927-4:
Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1) ∪(1, +∞) → IR με $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 6)

β)

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^α$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) • $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(x\cdot\frac{1}{\ln x}\right) = 0 \cdot 0 = 0$.

• $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{x}{\ln x}\right) \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} -\infty$.

Όταν $x\to1^-$, τότε x>0 και x<1 ⇔ lnx<ln1 ⇔ lnx<0.

• $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+}\left(\frac{x}{\ln x}\right) \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} +\infty$.

Όταν $x\to1^+$, τότε x>0 και x>1 ⇔ lnx>ln1 ⇔ lnx>0.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right) \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(lnx)'}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} x$
$= +\infty$.

β) i. $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{lnx-1}{ln^2x}$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{lnx-1}{ln^2x} = 0$
⇔ lnx – 1 = 0
⇔ lnx = 1
⇔ lnx = lne
⇔ x = e.

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{lnx-1}{ln^2x} > 0$
⇔ lnx – 1 > 0
⇔ lnx > 1
⇔ lnx > lne
⇔ x > e.

γιατί $\ln^2x > 0$

και f ‘(x) < 0 ⇔ … ⇔ 0 < x < 1 ή 1 < x < e.

x	0	1	e	+∞
f'	−	−	0	+
f	↘	↘		↗

Ο.Ε.
f(e)=e

Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε x∈(0, 1) ∪(1, +∞) και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Μονοτονία:
• Στο διάστημα (0,1) είναι f ‘(x) < 0, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1).
• Στο διάστημα (1,e) είναι f ‘(x) < 0, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (1,e).
• Στο διάστημα (e,+∞) είναι f '(x) > 0, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [e,+∞).

Ακρότατα:
Στο x = e η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f(e) = e.

ii) • $f((0,1)) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to1^-} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)$ = (-∞,0).

• $f((1,e]) \overset{f\downarrow}{=} \left[f(e), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right)$ = [e,+∞).

• $f([e,+\infty)) \overset{f\uparrow}{=} \left[f(e), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ = [e,+∞).

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το
f((0,1)∪(1,+∞)) = $f((0,1)) \cup f((1,e]) \cup f([e,+\infty))$
= (-∞,0)U[e,+∞)U[e,+∞)
= (-∞,0)U[e,+∞).

γ) $e^x = x^α \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln e^x = \ln x^α$
⇔ x = αlnx …………..(1)

Για x = 1 η (1) γίνεται 1 = 0 άτοπο.
Άρα x ≠ 1 ⇔ lnx ≠ ln1
⇔ lnx ≠ 0.

(1) $\overset{lnx\neq0}{\Longleftrightarrow} \frac{x}{lnx} = α$ ⇔ f(x) = α.

• α∈(-∞,0). Τότε α∈$f((0,1))$ και η εξίσωση $e^x = x^α$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1) και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα μοναδική.
• α∈[0,e). Τότε α∉ f((0,1)∪(1,+∞)) και η εξίσωση $e^x = x^α$ δεν έχει ρίζα.
• x = e. Τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα x = e.
• α∈(e,+∞). Τότε α∈$f((1,e))$ και α∈$f((e,+\infty))$ και η εξίσωση $e^x = x^α$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες, μια στο διάστημα (1,e) και μια στο διάστημα (e,+∞) και

επειδή είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα αυτά, είναι μοναδικές.

21) 31547-2: Έστω f: IR → IR μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι:

i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3-2x}{(x-2)^2}$

$\overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 2}(3-2x)\cdot \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$

= (3 – 2 · 2) · (+∞)

= -1 · (+ ∞)

= - ∞.

Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό, η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία y=2.

β) i. Η f ορίζεται στο 2 και είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ = - ∞ οπότε είναι ασυνεχής στο 2 .

ii. Αφού η f δεν είναι συνεχής στο 2 δεν θα είναι ούτε παραγωγίσιμη στο 2.

22) 31746-4: Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$, $x \in$ IR.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της Μ$(0, f(0))$. (Μονάδες 5)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 2x + 6$ για κάθε $x \in$ IR. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR με

f '(x) = $(2x-4)e^x + (x^2-4x+6)e^x$

= $(x^2-2x+2)e^x > 0$,

Εφόσον $e^x > 0$ και $x^2 + 2x + 2 > 0$, γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι Δ = -4 < 0.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Λόγω της μονοτονίας της f και της συνέχειάς της, το σύνολο τιμών της είναι

f(IR) $\overset{f\uparrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$ = (0,+∞), γιατί:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-4x+6)e^x$

$= \lim\limits_{x\to -\infty}(x^2 e^x) \overset{+\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2}{\frac{1}{e^x}}\right)$

$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(x^2)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x}{-\frac{(e^x)'}{(e^x)^2}}$

$= -\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x}{\frac{e^x}{e^{2x}}} = -\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x}{\frac{1}{e^x}}$

$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} -\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(2x)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2}{\frac{(e^x)'}{(e^x)^2}}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2}{\frac{e^x}{e^{2x}}} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2}{\frac{1}{e^x}}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty}(2e^x) = 0$ και

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-4x+6)e^x$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}(x^2e^x)$

= +∞ · (+∞)

= +∞.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ είναι:

(ε) : y – f(0) = f '(0) · x

⇔ y – 6 = 2x

⇔ y = 2x + 6.

γ) Για κάθε $x \in$ IR, η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με f ΄΄(x) =

f "(x) = $(2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x$

= $x^2 e^x \geq 0$,

με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0.

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR και δεν εμφανίζει σημεία καμπής.

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) η συνάρτηση f είναι κυρτή στο IR, οπότε η εφαπτομένη της (ε) θα βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους Μ. Επομένως θα ισχύει f(x) ≥ 2x+6 για κάθε $x \in$ IR.

23) END.