ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ De 'l Hospital

1) Υπολογίστε τα όρια:
Ααφδαφ

a. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2+3x-4}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x^2}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}$.

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3-5e^{x-1}}{x^3+x^2+x-3}$.

g. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

h. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$.

i. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$.

j. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$.

k. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 7x}$.

l. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$.

m. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{2x-\pi}$.

n. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}$.

o. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$.

p. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln^2 x}{x}$.

q. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1+lnx}$.

r. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

s. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx}{x^3}$.

Λύση:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^2+3x-4}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3+3x^2-2x-2)'}{(x^2+3x-4)'}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+6x-2}{2x+3}=...=\frac{7}{5}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)'}{(x)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1}=$ συν0^0=1.

c. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varepsilon\varphi x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\varepsilon\varphi x)'}{(x^2)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{2x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2x\sigma\upsilon\nu^2 x}=\left(\frac{1}{0}\right)=+\infty,$
γιατί 2xσυν^{2}x>0 όταν x→0^+.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}{(x^2)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}=-\frac{1}{2}$.

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$

f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+3-5e^{x-1}}{x^3+x^2+x-3}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2+3-5e^{x-1})'}{(x^3+x^2+x-3)'}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-5e^{x-1}}{3x^2+2x+1}=$
$=-\frac{1}{6}$.

g. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$
$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left[ln\left(1-\frac{3}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$
$=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\left(1-\frac{3}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \cdot \frac{3}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} =$$

$$= - \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1-\frac{3}{x}} = -3.$$

h. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{3x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} =\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{(3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'}{3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3}.$$

i. $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} =\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

j. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right)'}{(\eta\mu x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\eta\mu\frac{1}{x}+x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\sigma\upsilon\nu x} =$$

$-\frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\eta\mu\frac{1}{x} - x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{0-0}{1} = 0.$$

(Τα όρια $x^3\eta\mu\frac{1}{x}$, $3x^2\eta\mu\frac{1}{x}$ και $x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ βρίσκονται με κριτήριο παρεμβολής).

k. $$\lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 7x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\varepsilon\varphi 4x)'}{(\eta\mu 7x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 4x}\cdot(4x)'}{\sigma\upsilon\nu 7x\cdot(7x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{7\sigma\upsilon\nu 7x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 4x} = \frac{4}{7}.$$

l. $$\lim_{x\to 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to 2}\frac{(\eta\mu(x-2))'}{(x^2-4)'} = \lim_{x\to 2}\frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)\cdot(x-2)'}{2x} = \lim_{x\to 2}\frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

m. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu x}{2x-\pi} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\eta\mu x)'}{(2x-\pi)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{2} = -\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

n. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)-e^x+1]'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'-e^x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+x}-e^x\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{(1+x)'}{(1+x)^2}-e^x}{2} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}+e^x}{2} = -\frac{1+1}{2} = -1.$$

o. $$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-3^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2-3^x\ln 3}{1} = \ln 2-\ln 3 = \ln\frac{2}{3}.$$

p. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot(\ln x)'}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0.$$

q. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+\ln x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(1+\ln x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (xe^x) = +\infty.$$

r. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(1+e^x)]'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x}\cdot(1+e^x)'}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(1+e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

s. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3x^3}\right) = 0.$$

2) Υπολογίστε τα όρια:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x)$,

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln x)$,

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$,

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$,

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$,

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

Λύση:

a) $$\lim_{x\to 0^+} (x\ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} x = 0 .;$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} (x-\ln x) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$=+\infty\cdot(1\text{-}0)$$

$$=+\infty.$$

γιατί $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1\right).$$

Επειδή $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}} \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \sqrt{1+0} = 1,$$

το παραπάνω όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $+\infty\cdot 0$ οπότε γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x \overset{(0^0)}{=} \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x}$ $=e^0=1$, λόγω του (a) ερωτήματος.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \overset{(1^{+\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$ $=e^2$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \overset{+\infty\cdot0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$\overset{+\infty\cdot0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2+x}\left(-\frac{2}{\cancel{x^2}}\right)}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2.$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3x)^{\frac{1}{x}} \overset{(+\infty^0)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+3x)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+3x)}{x}}$$

$=e^0=1$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(1+3x))'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+3x}(1+3x)'\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{1+3x}\right)=0.$$

3) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, x>0.

Λύση: • *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) \overset{(0^{+\infty})}{=} \lim_{x\to0^+}\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)=0$$

γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln x$ =+∞·(-∞)=-∞

και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

Άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• *πλάγιες ασύμπτωτες:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}=0,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-0=1$,

επομένως $=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\frac{1}{x}}=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{x}}}=0$.

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\overset{(+\infty^0)}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$=e^0=1$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτο την ευθεία y=1.

Κοντά στο -∞ η συνάρτηση δεν ορίζεται.

4) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2-1}$.

Λύση: $A_f=R-\{-1,1\}$.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to-1^+}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1^+}\frac{e^{-x}}{x-1}\cdot \lim_{\substack{x\to -1^+\\ x>-1\\ x+1>0}}\frac{1}{x+1}$$

$$= -\frac{e}{2}\cdot(+\infty)$$

$=-\infty$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{-x}}{x-1}\cdot \lim_{\substack{x\to -1^-\\ x<-1\\ x+1<0}}\frac{1}{x+1}$$

$$= -\frac{e}{2}\cdot(-\infty)$$

$=+\infty$.

Άρα η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από αριστερά και από δεξιά.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-x}}{x+1}\cdot \lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1\\ x-1>0}}\frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2e}\cdot(+\infty)$$

$=+\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{-x}}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{-x}}{x+1}\cdot \lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1\\ x-1<0}}\frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2e}\cdot(-\infty)$$

$=-\infty$.

Άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από αριστερά και από δεξιά.

<u>Οριζόντιες ασύμπτωτες</u>:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}\cdot \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2-1}$$

$=0\cdot 0=0$.

Άρα η ευθεία y=0 (άξονας xOx′) είναι οριζόντια ασύμπτωτος στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^2-1}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{(e^{-x})'}{(x^2-1)'}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{2x}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{(-e^{-x})'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{2}$$

$=+\infty$.

Επομένως δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο $-\infty$.

<u>Πλάγιες ασύμπτωτες</u>: Στο $+\infty$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο, γιατί έχει οριζόντια.

$$\lambda = \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^3-x}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{(e^{-x})'}{(x^3-x)'}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{3x^2-1}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{(-e^{-x})'}{(3x^2-1)'}$$

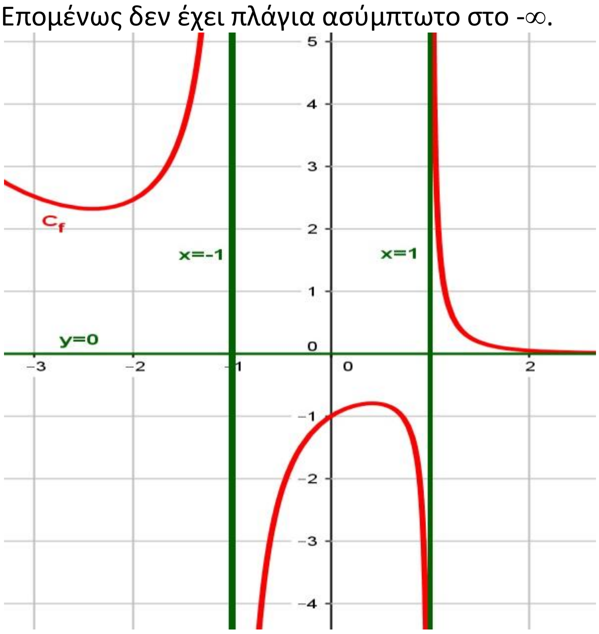
$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{6x}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to -\infty}\frac{(e^{-x})'}{(6x)'}$$

$$= -\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{6}$$

$=-\infty$.

Επομένως δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο $-\infty$.



5) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^3}{\ln x}$.

Λύση: $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

☛ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3}{\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} x^3 \cdot \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}$

=0·0=0.

Άρα η x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

☛ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3}{\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to1^-} x^3 \cdot \lim\limits_{\substack{x\to1^-\\ x<1\\ \ln x<0}}\dfrac{1}{\ln x}$

=1·(-∞)

=-∞.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3}{\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} x^3 \cdot \lim\limits_{\substack{x\to1^+\\ x>1\\ \ln x>0}}\dfrac{1}{\ln x}$

=1·(+∞)

=+∞.

Άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος και από αριστερά και από δεξιά.

Οριζόντιες ασύμπτωτες: Έχει νόημα μόνο στο +∞.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\ln x}$

$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2)'}{(\ln x)'}$ το

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\frac{1}{x}}$ το

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2$ =+∞.

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο +∞.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

$\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\ln x}$

$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^3)'}{(\ln x)'}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3$

=+∞.

Άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο +∞.

6) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}$.

Λύση: $A_f=R^*$.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)$=0.

$-1\le \eta\mu\dfrac{1}{x^2}\le 1 \Leftrightarrow -x^2\le x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\le x^2$ .....(1)

$\lim\limits_{x\to0} x^2 = \lim\limits_{x\to0}(-x^2)=0$ ....(2)

Από (1), (2) και το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)=0$.

Άρα η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος.

Οριζόντιες ασύμπτωτες: Έχει νόημα μόνο στο +∞.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$

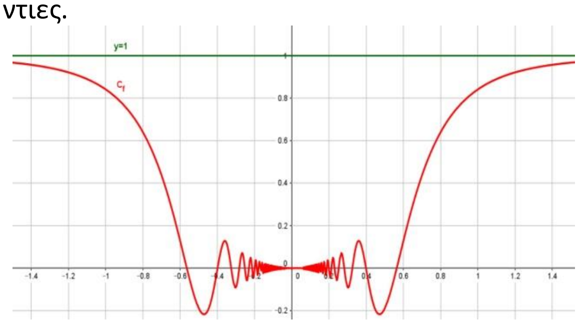
$= \lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}$ =1.

Θέτω $\dfrac{1}{x^2}$=u.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} u = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο ±∞ την ευθεία y=1.

Πλάγιες ασύμπτωτες: δεν έχει γιατί έχει οριζόντιες.



7) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$.

Λύση:

• *Πεδίο ορισμού*:

x+1≠0 ⇔ x≠-1..(1)

$\dfrac{x^3}{x+1}\ge0 \Leftrightarrow x^3(x+1)\ge0$

x	-∞ -1 0 +∞
x(x+1)	+ ○ - ○ +

⇔ x(x+1)≥0

⇔ x≤-1 ή x≥0.....................................(2)

Από (1) και (2) ⇔ $A_f=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

• *κατακόρυφες ασύμπτωτες*:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} +\infty$$

γιατί $x^3<0$ και $x+1<0$.

Άρα η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος από αριστερά.

<u>Οριζόντιες ασύμπτωτες</u>:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty} x^2} = +\infty$$

Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο στο $\pm\infty$.

<u>Πλάγιες ασύμπτωτες</u>:

☛ Στο $+\infty$:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3+x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}$$

=1.

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right) \overset{(+\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{(x+1)^2}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{x-x-1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= -\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= -\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+0}\right)\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}$$

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτο στο $+\infty$ την ευθεία $y = x-\frac{1}{2}$.

☛ Στο $-\infty$:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x} = \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ \sqrt{x^2}=|x|=-x}}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{-\sqrt{x^2}} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^3+x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}$$

=-1.

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right)$$

$$\overset{(+\infty-\infty)}{=} -\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)$$

$$\overset{(+\infty\cdot 0)}{=} -\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{(x+1)^2}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=-\lim_{\substack{x\to-\infty\\ |x|=-x\\ |x+1|=-x-1}}\left(x\frac{|x|-|x+1|}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{-x-(-x-1)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+x+1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

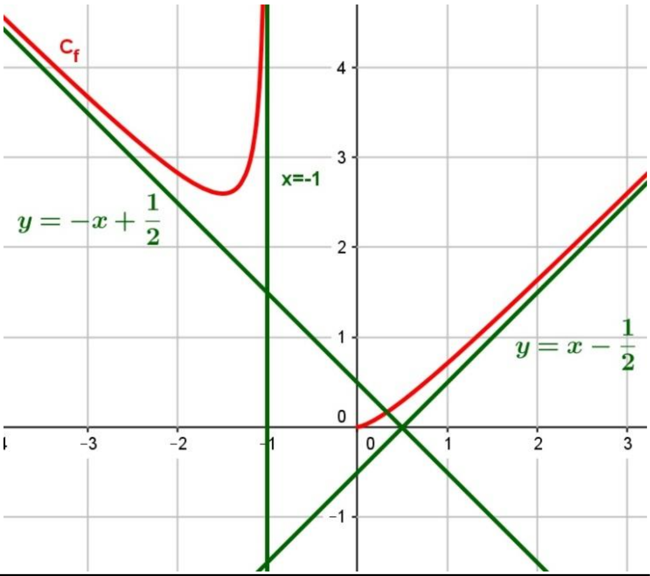
$$=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+0}\right)\sqrt{1+0}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτο στο -∞ την ευθεία $y=-x+\frac{1}{2}$.



8) ΘΕΜΑ 2ον (2001)

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2, & x\le 3\\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3\end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = =–1/9. Μονάδες 9

Λύση: f(3)=9α……………………………………………(1)

$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}(\alpha x^2)=9\alpha$………………………(2)

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{1-e^{x-3}}{x-3}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to3^+}\frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'}\text{τή}$$

$$=-\lim_{x\to3^+}e^{x-3}$$

$=-e^0=-1$…………………………………………(3)

Για να είναι συνεχής στο x=3 πρέπει $\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^+} f(x)=f(3)\Leftrightarrow$ 9α=-1 ⇔ α = =–1/9.

9) ΘΕΜΑ 2ον (2004)

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να μελετήσε-τε την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μονάδες 7

Λύση:

α) x>0 ⇒ $A_f=(0,+\infty)$.

$f'(x)=2x\ln x+x$

$=2x(\ln x+1)$.

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x(\ln x+1)=0$

⇔lnx+1=0 ……………γιατί x>0

⇔ lnx=-1

⇔ $x=e^{-1}=1/e$.

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x(\ln x+1)>0$
  $\Leftrightarrow \ln x+1>0$ ....γιατί $x>0$
  $\Leftrightarrow \ln x>-1$
  $\Leftrightarrow x>e^{-1}=1/e$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow$ ....
$\Leftrightarrow x<1/e$.

x	0	1/e	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Στο διάστημα (0,1/e] είναι γνησίως φθίνουσα.
Στο διάστημα [1/e,+∞) είναι γνησίως αύξουσα.
Στο x=1/e παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}\cancelto{-1}{\ln\frac{1}{e}}=-\frac{1}{e^2}$.

β) Έστω $\Delta_1=\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και $\Delta_2=\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

$f(\Delta_1)\overset{(f\searrow)}{=}\left(f\left(\frac{1}{e}\right),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=$
$=\left(-\frac{1}{e^2},\ 0\right)$, γιατί:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2\ln x)\overset{(0\cdot(-\infty))}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right)\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}}=$$
$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}=0.$$

$f(\Delta_2)\overset{(f\nearrow)}{=}\left(f\left(\frac{1}{e}\right),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right)=$
$=\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$, γιατί:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2\ln x)=+\infty.$$

Άρα $f((0,+\infty))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)$
$=\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$.

10) ΘΕΜΑ 3ον (1983) Έστω η συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [0,+∞) με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x} & \text{εαν } 0<x\neq 1\\ 0 & \text{εαν } x=0\\ -1 & \text{εαν } x=1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:
i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της,
ii) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1)

Λύση:

i) $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{1-x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\cancelto{1}{\frac{1}{1-x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$$
$$\overset{0(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$$
$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=-\lim_{x\to 0^+}x$$

=0=f(0), άρα είναι συνεχής στο x=0.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{1-x}$$
$$=\cancelto{1}{\lim_{x\to 1}x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$$
$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$$

=-1=f(1), άρα είναι συνεχής στο x=1.

Στα διαστήματα (0,1) και (1,+∞) $f(x)=\frac{x\ln x}{1-x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

ii) $f'(x)=\left(\frac{x\ln x}{1-x}\right)'=\frac{(x\ln x)'(1-x)-\ln x\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}$
$$=\frac{(\ln x+1)(1-x)+\ln x}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{\ln x+1-x}{(1-x)^2}$$

Θέτω $g(x)=\ln x+1-x$, $x>0$.
$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0$ στο (0,1).
Επομένως g ↗ στο (0,1).
Άρα $x<1 \Leftrightarrow g(x)<g(1)$
$\Leftrightarrow \ln x+1-x<0$
$\Leftrightarrow f'(x)<0$.
Άρα f γνησίως φθίνουσα στο (0,1).

11) Θέμα 3^{ον} θετική -τεχνολογική 2008:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & \textbf{αν x} > \textbf{0} \\ \textbf{0} & \textbf{αν x} = \textbf{0} \end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0. Μονάδες 3

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 9

iii) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. Μονάδες 6

Λύση:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) \overset{0(-\infty)}{=\!=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0 = f(0).$

Άρα είναι συνεχής στο 0.

ii) f΄(x)=1+lnx.

• f΄(x)=0 ⇔ 1+lnx=0 ⇔ lnx=-1 ⇔ $\ln x=\ln e^{-1}$ ⇔ $x=e^{-1}={}^{1}/_{e}$.

• f΄(x)>0 ⇔ 1+lnx>0 ⇔ lnx>-1 ⇔ $\ln x>\ln e^{-1}$ ⇔ $x>e^{-1}={}^{1}/_{e}$.

και f΄(x)<0 ⇔ 1+lnx=0 ………… ⇔ $x<e^{-1}={}^{1}/_{e}$.

x	0	$^1/_e$	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Άρα η f είναι ↘ στο $A_1=[0,{}^1/_e]$ και ↗ στο $A_2=[{}^1/_e,+\infty)$.

Στο $^1/_e$ παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

• $f(A_1) \underset{\text{στο }\left(0,\frac{1}{e}\right)}{\overset{f\downarrow}{=\!=}} \left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}} f(x), \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right] = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right]$……..γιατί f συνεχής $=\left[-\frac{1}{e},0\right]$.

• $f(A_2) \underset{\text{στο }\left[\frac{1}{e},+\infty\right)}{\overset{f\uparrow}{=\!=\!=}} \left[\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right),+\infty\right)$……..γιατί f συνεχής $=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Το σύνολο τιμών της είναι:

$f(A_f)=f(A_1)\cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{e},0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right) = \left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$..

iii) • Αν x=0, η δοθείσα γίνεται 0=1 ψευδής. Άρα η x=0 απορρίπτεται.

• Αν x>0, η δοθείσα γίνεται:

$x=e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x}$ ⇔ xlnx=α ⇔ f(x)=α…………………………(1)

Επειδή η f στο $^1/_e$ παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, θα είναι $f(x)\geq-\frac{1}{e}$ για κάθε x>0.

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: $\alpha<-\frac{1}{e}$. Τότε η (1) είναι αδύνατη.

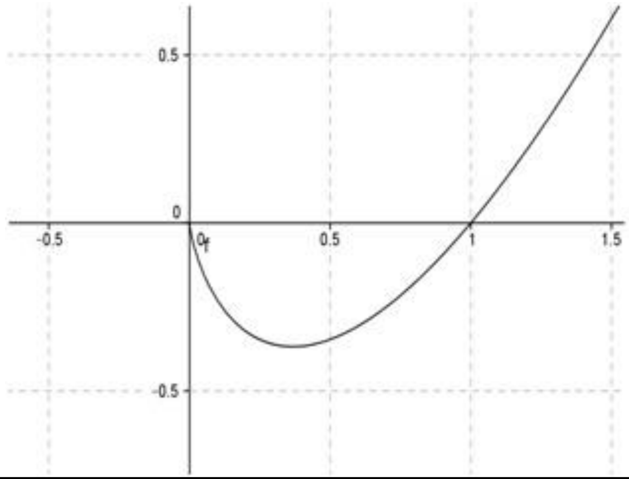
2^η περίπτωση: $\alpha=-\frac{1}{e}$. Τότε η (1) γίνεται $f(x)=-\frac{1}{e}$ ⇔ $x=\frac{1}{e}$.

3^η περίπτωση: $-\frac{1}{e}<\alpha<0$.

Τότε επειδή $\alpha\in f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$, η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1 και μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή είναι μονότονη σε αυτά, είναι μοναδικές.

4^η περίπτωση: α>0.

Τότε επειδή $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$, η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1 και επειδή είναι μονότονη σε αυτό, είναι μοναδική.



12) Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{(1-e^x)(e^{\varepsilon\varphi x}-e^x)}{\eta\mu x\cdot(\varepsilon\varphi x-x)}$, στο $x_0=0$.

Λύση: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-e^x)}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-e^x)'}{(\eta\mu x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}-e^x}{\varepsilon\varphi x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[e^x\,\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}=$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}-1}{\varepsilon\varphi x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{\varepsilon\varphi x-x}-1)'}{(\varepsilon\varphi x-x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-x}\cancel{(\varepsilon\varphi x-x)'}}{\cancel{(\varepsilon\varphi x-x)'}}=e^0=1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1\cdot 1=-1.$

13) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu 2x)}{\ln(\eta\mu x)}$.

Λύση:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu 2x)}{\ln(\eta\mu x)}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln(\eta\mu 2x)]'}{[\ln(\eta\mu x)]'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\eta\mu 2x}\cdot(\eta\mu 2x)'}{\frac{1}{\eta\mu x}\cdot(\eta\mu x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\eta\mu 2x}\sigma\upsilon\nu 2x}{\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\cancel{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu x}}\xrightarrow{}1\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\eta\mu x)'}{(\eta\mu 2x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu 2x}=\frac{1}{2}.$

14) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Λύση:

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=^{((+\infty)\cdot 0)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=$

Θέτω $\frac{1}{x}=u.$
Όταν $x\to+\infty$
τότε $u\to 0$

$=\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\frac{(e^u-1)'}{(u)'}=$

$=\lim\limits_{u\to 0}e^u=e^0=1.$

15) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Λύση:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\right)=$

Θέτω $\frac{1}{x^2}=u.$
Όταν $x\to 0$
τότε $u\to+\infty$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{e^u}{u}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(e^u)'}{(u)'}=$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty.$

16) END