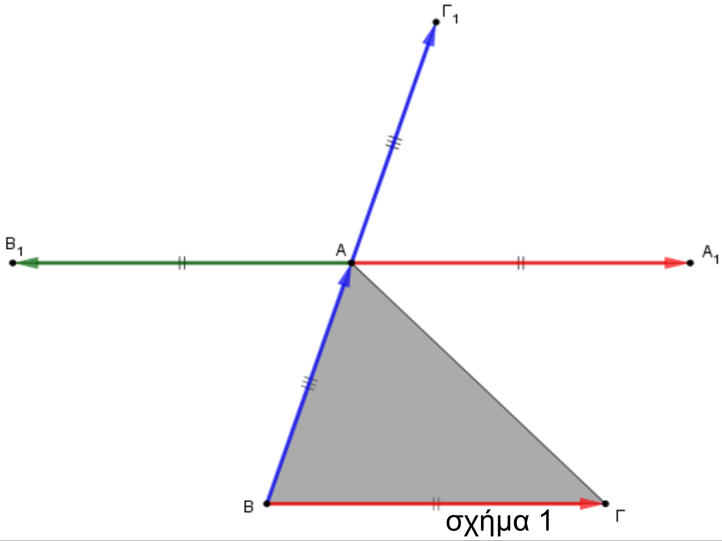
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1) Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. Να κατασκευάσετε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1, ώστε να ισχύουν $\vec{AA_1} = \vec{B\Gamma}$, $\vec{AB_1} = \vec{AB} - \vec{A\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma_1} = \vec{BA}$.

Λύση: $\vec{AB_1} = \vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{\Gamma B}$. Οι κατασκευές φαίνονται στο σχήμα 1.



σχήμα 1

2) Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ και τα σημεία Δ και Ε που ορίζονται από τις σχέσεις $\vec{\Gamma\Delta} + \vec{AB} = \vec{0}$ και $\vec{\Gamma E} + \vec{BA} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

Λύση: $\vec{\Gamma\Delta} + \vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB} = \vec{BA}$,

οπότε $\left.\begin{array}{l} \vec{\Delta\Gamma} = -\vec{BA} \\ \text{και } \vec{\Gamma E} = -\vec{BA}. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \vec{\Gamma E}$.

Άρα το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

3) Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και το μέσο Μ της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\vec{MB} + \vec{M\Delta} = \vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B}$.

Λύση:

- $\vec{MB} + \vec{M\Delta} = \vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \vec{M\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB} - \vec{MB}$

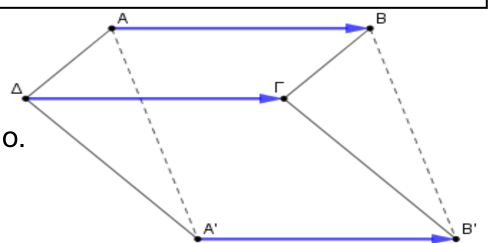
  $\Leftrightarrow \vec{M\Gamma} = \vec{AM}$ που ισχύει γιατί το Μ είναι μέσο της ΑΓ.
- $\vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{\Gamma B} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}$

  $\Leftrightarrow \vec{A\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ που ισχύει.

4) Δυο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄ΓΔ έχουν κοινές κορυφές τις Γ και Δ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Από το σχήμα 2 βλέπουμε ότι:

$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΒΓΔ παρ/μο} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma} \\ \text{Α΄Β΄ΓΔ παρ/μο} \Leftrightarrow \vec{A'B'} = \vec{\Delta\Gamma} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{A'B'} \Leftrightarrow$ ΑΒΒ΄Α΄ παρ/μο.



σχήμα 2

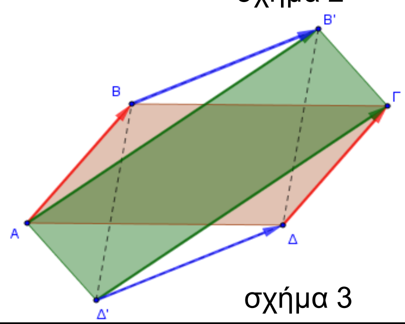
5) Δυο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΒ΄ΓΔ΄ έχουν κοινές κορυφές τις Α και Γ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΒ΄ΔΔ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Από το σχήμα 3 βλέπουμε ότι:

$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΒΓΔ παρ/μο} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma} \\ \text{ΑΒ΄ΓΔ΄ παρ/μο} \Leftrightarrow \vec{AB'} = \vec{\Delta'\Gamma} \end{array}\right\}$ (-)

$\vec{AB'} - \vec{AB} = \vec{\Delta'\Gamma} - \vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \vec{BB'} = \vec{\Delta'\Delta}$

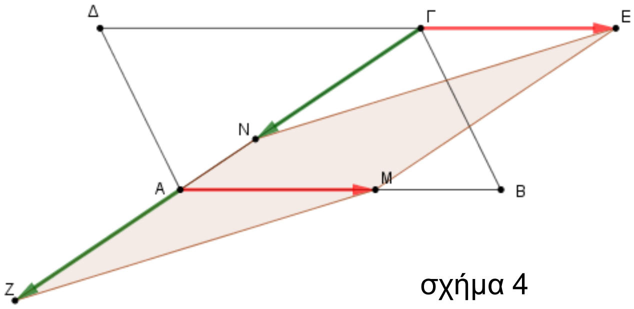
$\Leftrightarrow$ ΒΒ΄ΔΔ΄ παρ/μο.



σχήμα 3

6) Πάνω στην πλευρά ΑΒ και στην διαγώνιο ΑΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Μ και Ν. Να κατασκευάσετε τα διανύσματα $\vec{\Gamma E} = \vec{AM}$ και $\vec{AZ} = \vec{\Gamma N}$ και να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΕΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:



σχήμα 4

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\Gamma E}=\vec{AM}\\ \vec{\Gamma N}=\vec{AZ}\end{array}\right\}(-)$$

$\vec{\Gamma E}-\vec{\Gamma N}=\vec{AM}-\vec{AZ} \Leftrightarrow \vec{NE}=\vec{ZM}$ (σχήμα 4)

$\Leftrightarrow$ ΖΜΕΝ παραλληλόγραμμο.

7) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ. Έστω επίσης σημείο Μ που ορίζεται από την σχέση $\vec{PM}=\vec{AP}+\vec{PB}+\vec{P\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: $\vec{PM}=\vec{AP}+\vec{PB}+\vec{P\Gamma} \Leftrightarrow \vec{PM}-\vec{PB}=\vec{AP}+\vec{P\Gamma}$

$\Leftrightarrow \vec{BM}=\vec{A\Gamma}$

$\Leftrightarrow$ ΑΒΜΓ παραλληλόγραμμο.

8) Για τα σημεία Α, Β, Γ και Δ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις $\vec{A\Gamma}=\vec{B\Delta}$ και $\vec{EB}=\vec{\Delta A}$. Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΕΓ.

Λύση: $$\left.\begin{array}{l}\vec{A\Gamma}=\vec{B\Delta}\\ \vec{\Delta A}=\vec{EB}\end{array}\right\}(+)$$

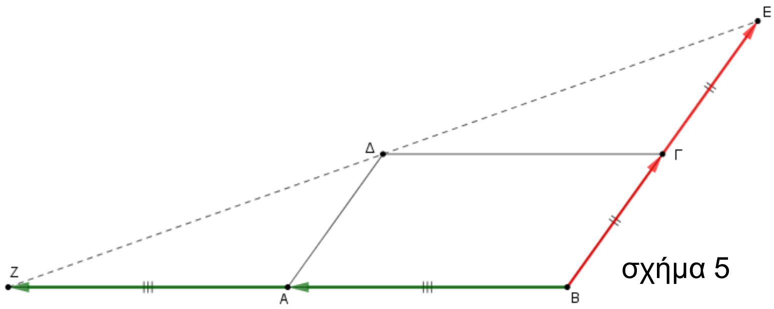
$\vec{\Delta A}+\vec{A\Gamma}=\vec{EB}+\vec{B\Delta} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma}=\vec{E\Delta} \Leftrightarrow$ Δ μέσο του ΕΓ.

9) Σε τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}$ και $\vec{BE}=\vec{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

Λύση: $$\left.\begin{array}{l}\vec{A\Gamma}=\vec{BE}\\ \vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}\end{array}\right\}(-)$$

$\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta}=\vec{BE}-\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma}=\vec{\Gamma E} \Leftrightarrow$ Γ μέσο του ΔΕ.

10) Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κατάσκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{\Gamma E}=\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AZ}=\vec{BA}$. Να δείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΕΖ.



σχήμα 5

Λύση: $$\left.\begin{array}{l}\vec{\Gamma E}=\vec{B\Gamma}=\vec{A\Delta}\\ \vec{\Gamma\Delta}=\vec{BA}=\vec{AZ}\end{array}\right\}(-)$$

$\vec{\Gamma E}-\vec{\Gamma\Delta}=\vec{A\Delta}-\vec{AZ} \Leftrightarrow \vec{\Delta E}=\vec{Z\Delta} \Leftrightarrow$ Δ μέσο του ΖΕ (σχήμα 5).

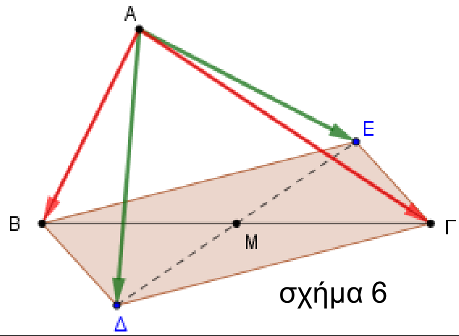
11) Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και για τα σημεία Δ και Ε ισχύει $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}$, να αποδείξετε ότι: **α)** Το Μ είναι μέσο του ΔΕ και **β)** για κάθε άλλο σημείο Ρ ισχύει $\vec{PB}+\vec{P\Gamma}=\vec{P\Delta}+\vec{PE}$.

Λύση:

α) $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE} \Leftrightarrow \vec{AB}-\vec{A\Delta}=\vec{AE}-\vec{A\Gamma}$

$\Leftrightarrow \vec{\Delta B}=\vec{\Gamma E}$

$\Leftrightarrow$ ΔΒΕΓ παρ/μο (σχήμα 6) και επομένως οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Άρα το



σχήμα 6

μέσο Μ της ΒΓ είναι και μέσο της ΔΕ.

β) Χρησιμοποιούμε το σημείο Α ως σημείο αναφοράς:

$\vec{PB}+\vec{P\Gamma}=\vec{P\Delta}+\vec{PE} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{AB}-\cancel{\vec{AP}}+\vec{A\Gamma}-\cancel{\vec{AP}}=\vec{A\Delta}-\cancel{\vec{AP}}+\vec{AE}-\cancel{\vec{AP}}$$

$\Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}$, που ισχύει λόγω του (α) ερωτήματος.

12) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ και Δ του επιπέδου, ισχύει:

$$\vec{AB}+\vec{\Gamma A}=\vec{\Gamma\Delta}-\vec{B\Gamma}+\vec{\Delta\Gamma}.$$

Λύση: Έστω Ο τυχαίο σημείο αναφοράς. Τότε η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$\vec{OB}-\cancel{\vec{OA}}+\cancel{\vec{OA}}-\vec{O\Gamma}=\cancel{\vec{O\Delta}}-\cancel{\vec{O\Gamma}}-\vec{O\Gamma}+\vec{OB}+\cancel{\vec{O\Gamma}}-\cancel{\vec{O\Delta}} \Leftrightarrow \vec{OB}-\vec{O\Gamma}=-\vec{O\Gamma}+\vec{OB}$ που είναι αληθής.

13) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του επιπέδου, ισχύει:

$\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{AE}+\vec{BZ}+\vec{\Gamma\Delta}$.

Λύση: Έστω Ο τυχαίο σημείο αναφοράς. Τότε η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$\cancel{\vec{O\Delta}}-\cancel{\vec{OA}}+\cancel{\vec{OE}}-\cancel{\vec{OB}}+\cancel{\vec{OZ}}-\cancel{\vec{O\Gamma}}=\cancel{\vec{OE}}-\cancel{\vec{OA}}+\cancel{\vec{OZ}}-\cancel{\vec{OB}}+\cancel{\vec{O\Delta}}-\cancel{\vec{O\Gamma}} \Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}$ που είναι αληθής.

14) Εάν τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{AB}+\vec{\Gamma A}$ και $\vec{v}=\vec{KB}+\vec{\Gamma\Lambda}$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται.

Λύση: $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{\Gamma A}=\vec{KB}+\vec{\Gamma\Lambda}$

$\Leftrightarrow \vec{\Gamma B}=\vec{KB}+\vec{\Gamma\Lambda}$

$\Leftrightarrow \vec{\Gamma B}-\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{KB}$

$\Leftrightarrow \vec{\Lambda B}=\vec{KB}$. Άρα τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται.

15) Αν ισχύει η ισότητα $\vec{PA}+\vec{PB}=\vec{\Sigma A}+\vec{\Sigma B}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

Λύση: $\vec{PA}+\vec{PB}=\vec{\Sigma A}+\vec{\Sigma B} \Leftrightarrow \vec{PA}-\vec{\Sigma A}=\vec{\Sigma B}-\vec{PB}$

$\Leftrightarrow \vec{PA}-\vec{\Sigma A}=\vec{\Sigma B}-\vec{PB}$

$\Leftrightarrow \vec{P\Sigma}=\vec{\Sigma P}$

$\Leftrightarrow 2\vec{P\Sigma}=\vec{0}$

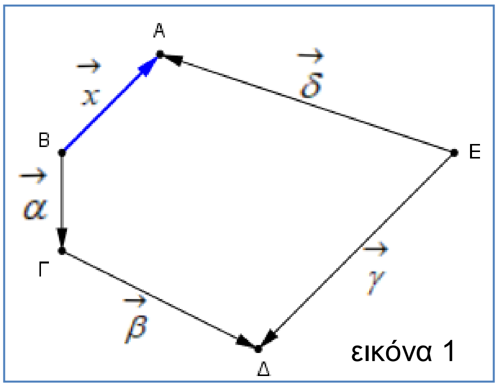
$\Leftrightarrow \vec{P\Sigma}=\vec{0}$. Άρα τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

16) Εάν είναι $|\vec{\alpha}|=\frac{3}{4}$, $|\vec{\beta}|=\frac{1}{4}$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 1$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Λύση:
$$\left.\begin{array}{l} |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1\geq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \\ \text{Επίσης } |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|.$$

Άρα (παρατήρηση 3) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

17) Στην εικόνα 1, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$, ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.



εικόνα 1

Λύση: $\vec{x} = \vec{\mathrm{BA}} = \vec{\mathrm{B\Gamma}} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta\mathrm{E}} + \vec{\mathrm{EA}}$

$= \vec{\mathrm{B\Gamma}} + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{\mathrm{E}\Delta} + \vec{\mathrm{EA}}$

$= \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}$, (σχήμα 1).

18) Εάν σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει $\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{A\Delta}}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: $\vec{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{A\Delta}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{A\Gamma}} - \vec{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\mathrm{AB}}$

$\Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \vec{\mathrm{AB}}$. Άρα το το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

19) Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|$=2, $|\vec{\beta}|$=5 και $|\vec{\gamma}|$ =8, να αποδείξετε ότι:

i) $3 \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le 7$.

ii) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} \ne \vec{0}$.

Λύση:

i) $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |2-5| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le 2+5$

$\Leftrightarrow 3 \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le 7$.

ii) Εάν ήταν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 8$, άτοπο γιατί $3 \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le 7$.

20) Εάν $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}| = |\vec{\mathrm{AB}}| + |\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Β μεταξύ των Α και Γ.

Λύση: $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}| = |\vec{\mathrm{AB}}| + |\vec{\mathrm{B\Gamma}}| \Leftrightarrow |\vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{B\Gamma}}| = |\vec{\mathrm{AB}}| + |\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$.

Άρα (παρατήρηση 3) $\vec{\mathrm{AB}} \upuparrows \vec{\mathrm{B\Gamma}}$ και επομένως τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Β μεταξύ Α και Γ.

21) Εάν $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}| = |\vec{\mathrm{AB}}| - |\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Γ μεταξύ των Α και Β ή το Α μεταξύ Β και Γ.

Λύση: $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}| = |\vec{\mathrm{AB}}| - |\vec{\mathrm{B\Gamma}}| \Leftrightarrow |\vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{B\Gamma}}| = |\vec{\mathrm{AB}}| - |\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$.

Άρα (παρατήρηση 3) $\vec{\mathrm{AB}} \uparrow\downarrow \vec{\mathrm{B\Gamma}}$ και επομένως τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Γ μεταξύ των Α και Β ή το Α μεταξύ Β και Γ.

22) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $\hat{\mathrm{A}} = 120^0$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών:

i) $(\widehat{\vec{BA}, \vec{A\Delta}})$.

ii) $(\widehat{\vec{\mathrm{A\Gamma}}, \vec{\mathrm{B\Gamma}}})$.

iii) $(\widehat{\vec{\Gamma A}, \vec{\mathrm{B\Gamma}}})$.

iv) $(\widehat{\vec{\mathrm{OA}}, \vec{\mathrm{B\Delta}}})$.

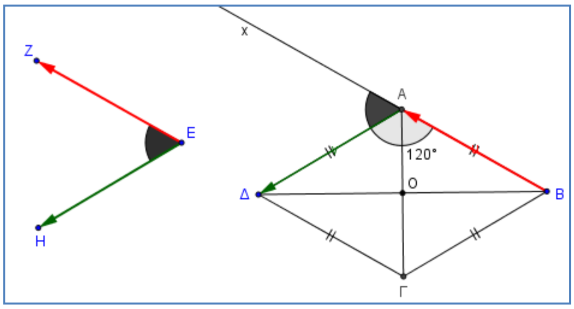
Λύση:

i) Από τυχαίο σημείο Ε του επιπέδου, (σχήμα 7), κατασκευάζουμε διανύσματα $\vec{\mathrm{EZ}} = \vec{\mathrm{BA}}$ και $\vec{\mathrm{EH}} = \vec{\mathrm{A\Delta}}$.

Τότε $(\widehat{\vec{BA}, \vec{A\Delta}}) = \mathrm{Z\hat{E}H}$

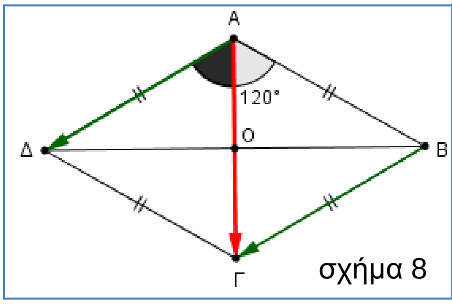
$= x\hat{\mathrm{A}}\Delta$

$=180^0-120^0=60^0$.

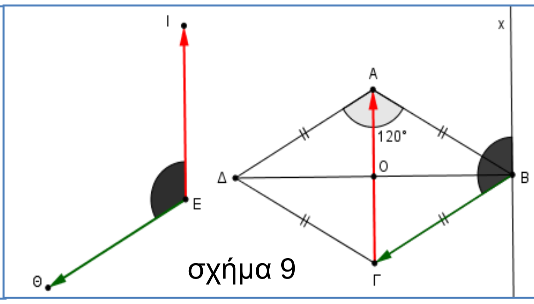


σχήμα 7

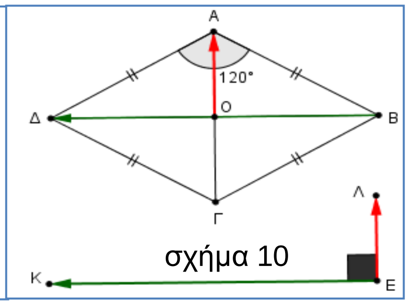
ii) $(\widehat{\vec{\mathrm{A\Gamma}}, \vec{\mathrm{B\Gamma}}}) = (\widehat{\vec{\mathrm{A\Gamma}}, \vec{\mathrm{A\Delta}}}) = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 60^0$ (σχήμα 8).



σχήμα 8



σχήμα 9



σχήμα 10

iii) $(\widehat{\overrightarrow{ΓΑ},\overrightarrow{ΒΓ}})=(\widehat{\overrightarrow{ΕΙ},\overrightarrow{ΕΘ}})=\mathrm{Ι\hat{Ε}Θ}$

$=x\hat{Β}Γ$

$=120^0$ (σχήμα 9).

iv) $(\widehat{\overrightarrow{ΟΑ},\overrightarrow{ΒΔ}})=(\widehat{\overrightarrow{ΕΛ},\overrightarrow{ΕΚ}})=\mathrm{Λ\hat{Ε}Κ}$

$=\mathrm{Α\hat{Ο}Δ}$

$=90^0$ (σχήμα 10) γιατί οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

23) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και (ΑΓ)=2(ΒΓ). Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών:

i) $(\widehat{\overrightarrow{ΑΟ},\overrightarrow{ΑΒ}})$.

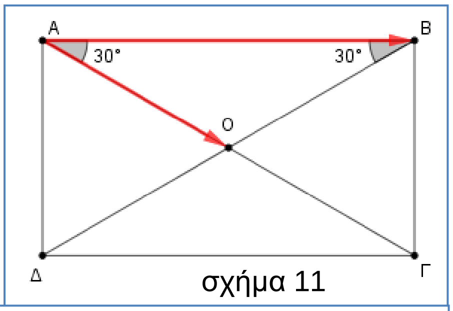
ii) $(\widehat{\overrightarrow{ΒΔ},\overrightarrow{ΑΒ}})$.

iii) $(\widehat{\overrightarrow{ΟΒ},\overrightarrow{ΓΟ}})$.

iv) $(\widehat{\overrightarrow{ΟΓ},\overrightarrow{ΔΟ}})$.

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^0$) είναι $(ΒΓ)=\dfrac{(ΑΓ)}{2}$

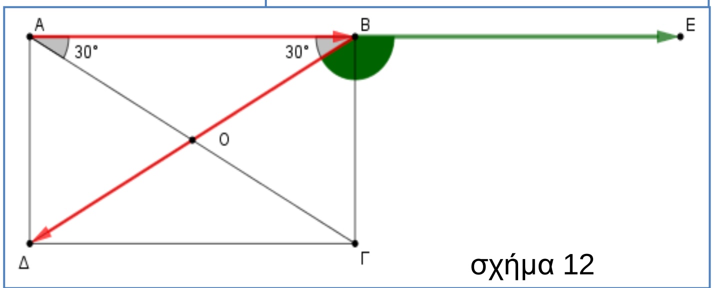
επομένως $\mathrm{Ο\hat{Α}Β}=30^0$.



σχήμα 11

i) $(\widehat{\overrightarrow{ΑΟ},\overrightarrow{ΑΒ}})=\mathrm{Ο\hat{Α}Β}=30^0$ (σχήμα 11).

ii) Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα (ΒΕ)=(ΑΒ).



σχήμα 12

$(\widehat{\overrightarrow{ΒΔ},\overrightarrow{ΑΒ}})=(\widehat{\overrightarrow{ΒΔ},\overrightarrow{ΒΕ}})$

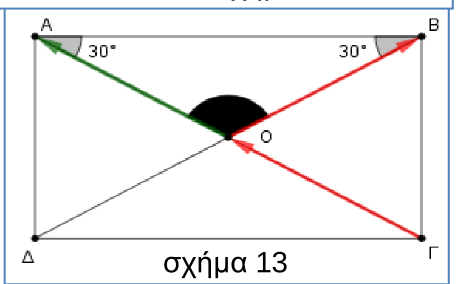
$=\mathrm{Β\hat{Δ}Ε}$

$=180^0$-30^0

$=150^0$ (σχήμα 12).

iii) $(\widehat{\overrightarrow{ΟΒ},\overrightarrow{ΓΟ}})=(\widehat{\overrightarrow{ΟΒ},\overrightarrow{ΟΑ}})$

$=\mathrm{Β\hat{Ο}Α}=150^0$ (σχήμα 13).

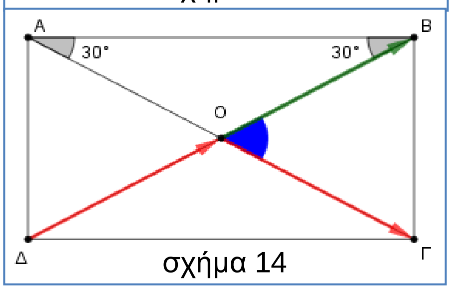


σχήμα 13

iv) $(\widehat{\overrightarrow{ΟΓ},\overrightarrow{ΔΟ}})=(\widehat{\overrightarrow{ΟΓ},\overrightarrow{ΟΒ}})$

$=\mathrm{Γ\hat{Ο}Β}$

=600 (σχήμα 14).



σχήμα 14

24) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i) $(\widehat{\overrightarrow{ΑΓ},\overrightarrow{ΑΒ}})$.

ii) $(\widehat{\overrightarrow{ΑΒ},\overrightarrow{ΘΓ}})$.

iii) $(\widehat{\overrightarrow{ΒΓ},\overrightarrow{ΑΒ}})$.

iv) $(\widehat{\overrightarrow{ΒΘ},\overrightarrow{ΘΓ}})$.

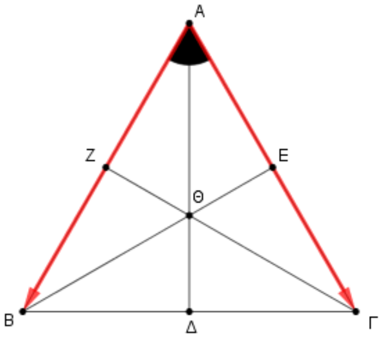
Λύση:

i) $(\widehat{\overrightarrow{ΑΓ},\overrightarrow{ΑΒ}})=\mathrm{Β\hat{Α}Γ}=60^0$ (σχήμα 15).

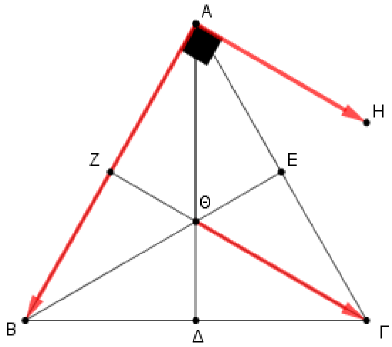
ii) Κατασκευάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΗ}=\overrightarrow{ΘΓ}$ (σχήμα 16). Τότε $(\widehat{\overrightarrow{ΑΒ},\overrightarrow{ΘΓ}})=\mathrm{Β\hat{Α}Η}=90^0$, γιατί ΘΓ $\perp$ ΑΒ.

iii) Κατασκευάζουμε διάνυσμα $\vec{AK} = \vec{B\Gamma}$ (σχήμα 17). Τότε $(\vec{AB}\,\widehat{,}\,\vec{B\Gamma}) = (\vec{AB}\,\widehat{,}\,\vec{AK})$

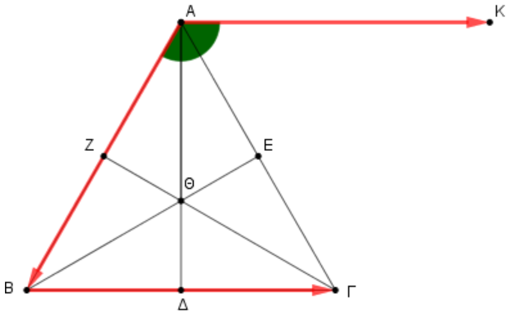
$= B\hat{A}K = 180^0 - 60^0 = 120^0$.



σχήμα 15



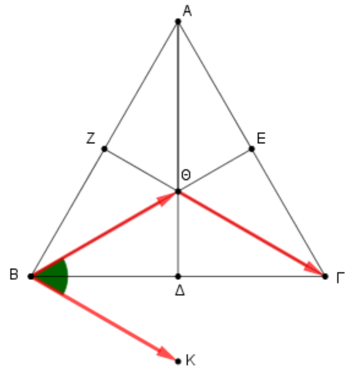
σχήμα 16



σχήμα 17

iv) Κατασκευάζουμε διάνυσμα $\vec{BK} = \vec{\Theta\Gamma}$ (σχήμα 18). Τότε $(\vec{B\Theta}\,\widehat{,}\,\vec{\Theta\Gamma}) =$

$(\vec{B\Theta}\,\widehat{,}\,\vec{BK}) = K\hat{B}\Theta = 2\cdot 30^0 = 60^0$.



σχήμα 18

25) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο και Μ σημείο τέτοιο ώστε $\vec{A\Gamma} + \vec{M\Delta} - \vec{M\Gamma} - \vec{MA} -$
$- \vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Gamma}$, να δείξετε ότι το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.

Λύση: $\underline{\vec{A\Gamma}} + \vec{M\Delta} - \underline{\vec{M\Gamma}} - \vec{MA} - \vec{AB} = \underline{\vec{\Gamma\Delta}} + \underline{\vec{B\Gamma}}$

$\Leftrightarrow \underline{\vec{AM}} + \underline{\vec{M\Delta}} - \vec{MA} - \vec{AB} = \vec{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \vec{A\Delta} - (\underline{\vec{MA}} + \underline{\vec{AB}}) = \vec{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \vec{A\Delta} - \vec{MB} = \vec{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \vec{A\Delta} = \vec{MB} + \vec{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \vec{A\Delta} = \vec{M\Delta}$ και επομένως το Μ ταυτίζεται με το Α.

26) Ομοίως εάν $\vec{AM} - \vec{M\Delta} - \vec{\Delta A} = \vec{AB} + \vec{\Gamma M} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{\Delta B}$.

Λύση: $\vec{AM} - \vec{M\Delta} - \vec{\Delta A} = \underline{\vec{AB}} + \vec{\Gamma M} - \vec{\Gamma\Delta} - \underline{\vec{\Delta B}}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} - (\vec{M\Delta} + \vec{\Delta A}) = \underline{\vec{A\Delta}} + \vec{\Gamma M} - \underline{\vec{\Gamma\Delta}}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} - \vec{MA} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma M}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} + \cancel{\vec{AM}} = \cancel{\vec{AM}}$

$\Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{0}$ και επομένως το Μ ταυτίζεται με το Α.

27) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο, να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία είναι:

i) $|\vec{MB} - \vec{AM} + \vec{B\Gamma} - \vec{M\Gamma}| = 2$.

ii) $|\vec{MB} - \vec{AM} - \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma M}| = |\vec{MA} - \vec{BM} + \vec{\Delta M} - \vec{\Delta A}|$.

Λύση:

i) $|\underline{\vec{MB}} - \vec{AM} + \vec{B\Gamma} - \underline{\vec{M\Gamma}}| = 2 \Leftrightarrow |\cancel{\vec{\Gamma B}} - \vec{AM} + \cancel{\vec{B\Gamma}}| = 2$

$\Leftrightarrow |-\vec{AM}| = 2$

$\Leftrightarrow |\vec{AM}|=2.$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος (Α,2).

ii) $|\vec{MB} - \vec{AM} - \vec{ΓB} + \vec{ΓM}| = |\vec{MA} - \vec{BM} + \vec{ΔM} - \vec{ΔA}|$

$\Leftrightarrow |\cancel{\vec{ΓB}} - \vec{AM} - \cancel{\vec{ΓB}}| = |\cancel{\vec{MΔ}} - \vec{BM} + \cancel{\vec{ΔM}}|$

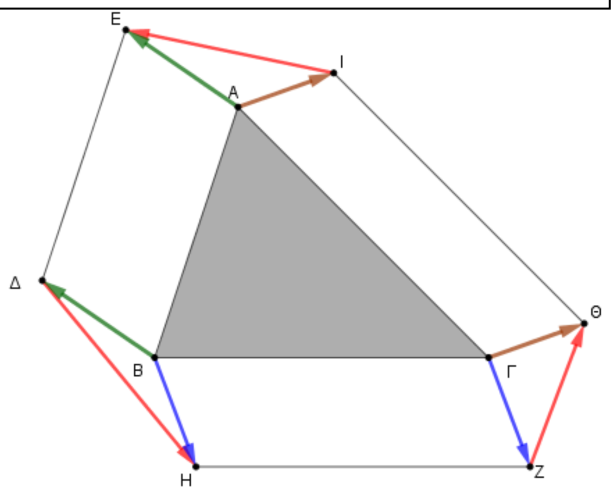
$\Leftrightarrow |-\vec{AM}| = |-\vec{BM}|$

σχήμα 19

$\Leftrightarrow |\vec{MA}| = |\vec{MB}|.$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

28) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ και ΑΓΘΙ. Να αποδείξετε ότι $\vec{ΔH} + \vec{ZΘ} + \vec{IE} = \vec{0}$.



Λύση: Από το σχήμα 19 έχουμε:

$\vec{ΔH} + \vec{ZΘ} + \vec{IE} = (\cancel{\vec{BH}} - \cancel{\vec{BΔ}}) + (\cancel{\vec{ΓΘ}} - \cancel{\vec{ΓZ}}) + (\cancel{\vec{AE}} - \cancel{\vec{AI}})$

$= \vec{0}$, λόγω των παραλληλογράμμων ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ και ΑΓΘΙ.

29) Τρία κινητά Α, Β και Γ κινούνται στο επίπεδο και για τις ταχύτητές τους $\vec{υ}_A$, $\vec{υ}_B$, και $\vec{υ}_Γ$ ισχύουν τα εξής:

- $\vec{υ}_A + \vec{υ}_B - \vec{υ}_Γ = \vec{0}$.
- Το μέτρο της ταχύτητας του Α είναι σταθερό και ίσο με τα $\frac{10}{3}$ του μέτρου της ταχύτητας του Β και με τα $\frac{10}{7}$ του μέτρου της ταχύτητας του Γ.

Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια Β και Γ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Λύση: $|\vec{υ}_A| = \frac{10}{3}|\vec{υ}_B| = \frac{10}{7}|\vec{υ}_Γ| \Leftrightarrow |\vec{υ}_B| = \frac{3}{10}|\vec{υ}_A|$ και $|\vec{υ}_Γ| = \frac{7}{10}|\vec{υ}_A|$.

Άρα $\left.\begin{array}{l} |\vec{υ}_B| + |\vec{υ}_Γ| = \frac{3}{10}|\vec{υ}_A| + \frac{7}{10}|\vec{υ}_A| = \frac{10}{10}|\vec{υ}_A| = |\vec{υ}_A| \\ \vec{υ}_A + \vec{υ}_B - \vec{υ}_Γ = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{υ}_B - \vec{υ}_Γ| = |-\vec{υ}_A| = |\vec{υ}_A| \end{array}\right\} \Leftrightarrow |\vec{υ}_B - \vec{υ}_Γ| = |\vec{υ}_B| + |\vec{υ}_Γ| \Leftrightarrow \vec{υ}_B \uparrow\downarrow \vec{υ}_Γ$.

30) Εάν για τα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ και $\vec{γ}$ ισχύει $\vec{α} + \vec{β} + \vec{γ} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{α}|}{3} = \frac{|\vec{β}|}{7} = \frac{|\vec{γ}|}{10}$, να δείξετε ότι:

i) $\vec{α} \uparrow\uparrow \vec{β}$. **ii)** $\vec{β} \uparrow\downarrow \vec{γ}$.

Λύση:

i) $\vec{α} + \vec{β} + \vec{γ} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{α} + \vec{β} = -\vec{γ}$

$\Leftrightarrow |\vec{α} + \vec{β}| = |-\vec{γ}| = |\vec{γ}|$……………………………………………………………………(1)

$\frac{|\vec{α}|}{3} = \frac{|\vec{β}|}{7} = \frac{|\vec{γ}|}{10} = \frac{|\vec{α}| + |\vec{β}|}{3+7} = \frac{|\vec{α}| + |\vec{β}|}{10}$. Άρα $|\vec{α}| + |\vec{β}| = |\vec{γ}|$…………………………………………………..(2)

Από (1) και (2) έχουμε $|\vec{α} + \vec{β}| = |\vec{α}| + |\vec{β}| \Leftrightarrow \vec{α} \uparrow\uparrow \vec{β}$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}$

$\Leftrightarrow |\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|-\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|$……………………………………………………………………(1)

$\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{7}=\frac{|\vec{\gamma}|}{10}=\frac{|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}|}{10-7}=\frac{|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}|}{3}$. Άρα $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}|$………………………………………………………(2)

Από (1) και (2) έχουμε $|\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$.

31) Dfgdgfs.