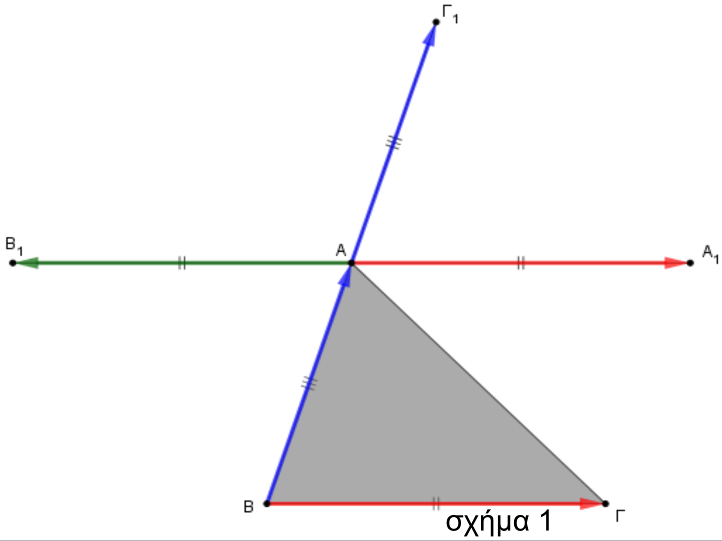
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1) Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. Να κατασκευάσετε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1, ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma_1} = \overrightarrow{BA}$.

Λύση: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$. Οι κατασκευές φαίνονται στο σχήμα 1.



σχήμα 1

2) Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ και τα σημεία Δ και Ε που ορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

Λύση: $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$,

οπότε $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{\Delta\Gamma} = -\overrightarrow{BA} \\ \text{και } \overrightarrow{\Gamma E} = -\overrightarrow{BA}. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma E}$.

Άρα το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

3) Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και το μέσο Μ της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$.

Λύση:

- $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MB}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{AM}$ που ισχύει γιατί το Μ είναι μέσο της ΑΓ.

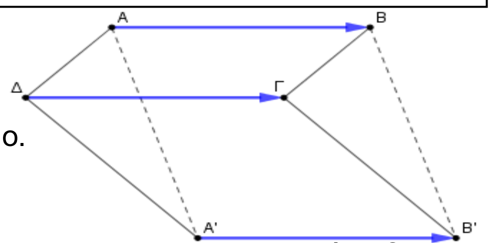
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ που ισχύει.

4) Δυο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄ΓΔ έχουν κοινές κορυφές τις Γ και Δ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Από το σχήμα 2 βλέπουμε ότι:

$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΒΓΔ παρ/μο} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \\ \text{Α΄Β΄ΓΔ παρ/μο} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow$ ΑΒΒ΄Α΄ παρ/μο.



σχήμα 2

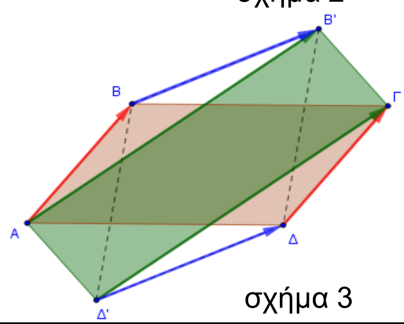
5) Δυο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΒ΄ΓΔ΄ έχουν κοινές κορυφές τις Α και Γ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΒ΄ΔΔ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Από το σχήμα 3 βλέπουμε ότι:

$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΒΓΔ παρ/μο} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \\ \text{ΑΒ΄ΓΔ΄ παρ/μο} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{\Delta'\Gamma} \end{array}\right\}$ (-)

$\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta'\Gamma} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{\Delta'\Delta}$

$\Leftrightarrow$ ΒΒ΄ΔΔ΄ παρ/μο.



σχήμα 3

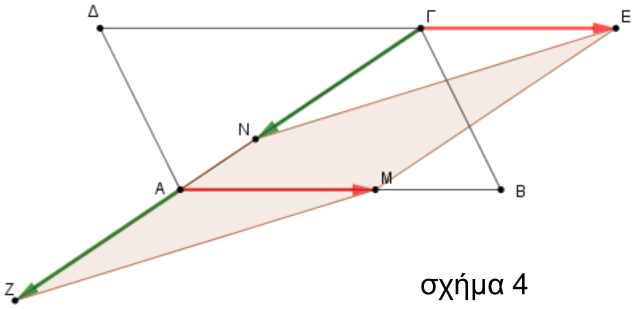
6) Πάνω στην πλευρά ΑΒ και στην διαγώνιο ΑΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Μ και Ν. Να κατασκευάσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{\Gamma N}$ και να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΕΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση:

$$\left.\begin{aligned}\vec{\Gamma E} &= \vec{AM}\\ \vec{\Gamma N} &= \vec{AZ}\end{aligned}\right\}(-)$$

$\vec{\Gamma E} - \vec{\Gamma N} = \vec{AM} - \vec{AZ} \Leftrightarrow \vec{NE} = \vec{ZM}$ (σχήμα 4)

$\Leftrightarrow$ ΖΜΕΝ παραλληλόγραμμο.



σχήμα 4

7) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ. Έστω επίσης σημείο Μ που ορίζεται από την σχέση $\vec{PM} = \vec{AP} + \vec{PB} + \vec{P\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΓ είναι παραλληλό-γραμμο.

Λύση: $\vec{PM} = \vec{AP} + \vec{PB} + \vec{P\Gamma} \Leftrightarrow \vec{PM} - \vec{PB} = \vec{AP} + \vec{P\Gamma}$

$\Leftrightarrow \vec{BM} = \vec{A\Gamma}$

$\Leftrightarrow$ ΑΒΜΓ παραλληλόγραμμο.

8) Για τα σημεία Α, Β, Γ και Δ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$ και $\vec{EB} = \vec{\Delta A}$. Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΕΓ.

Λύση: $\left.\begin{aligned}\vec{A\Gamma} &= \vec{B\Delta}\\ \vec{\Delta A} &= \vec{EB}\end{aligned}\right\}(+)$

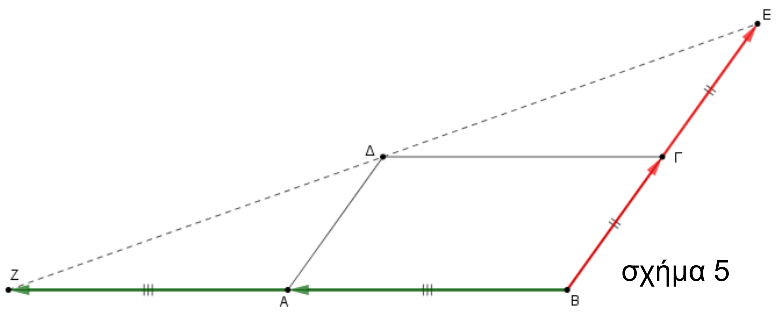
$\vec{\Delta A} + \vec{A\Gamma} = \vec{EB} + \vec{B\Delta} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \vec{E\Delta} \Leftrightarrow$ Δ μέσο του ΕΓ.

9) Σε τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{BE} = \vec{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

Λύση: $\left.\begin{aligned}\vec{A\Gamma} &= \vec{BE}\\ \vec{A\Delta} &= \vec{B\Gamma}\end{aligned}\right\}(-)$

$\vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta} = \vec{BE} - \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \vec{\Gamma E} \Leftrightarrow$ Γ μέσο του ΔΕ.

10) Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κατά-σκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{\Gamma E} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{AZ} = \vec{BA}$. Να δείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΕΖ.



σχήμα 5

Λύση: $\left.\begin{aligned}\vec{\Gamma E} &= \vec{B\Gamma} = \vec{A\Delta}\\ \vec{\Gamma\Delta} &= \vec{BA} = \vec{AZ}\end{aligned}\right\}(-)$

$\vec{\Gamma E} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{AZ} \Leftrightarrow \vec{\Delta E} = \vec{Z\Delta} \Leftrightarrow$ Δ μέσο του ΖΕ (σχήμα 5).

11) Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και για τα σημεία Δ και Ε ισχύει $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{AE}$, να αποδείξετε ότι: **α)** Το Μ είναι μέσο του ΔΕ και **β)** για κάθε άλλο σημείο Ρ ισχύει $\vec{PB} + \vec{P\Gamma} = \vec{P\Delta} + \vec{PE}$.

Λύση:

α) $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{AE} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{A\Delta} = \vec{AE} - \vec{A\Gamma}$

$\Leftrightarrow \vec{\Delta B} = \vec{\Gamma E}$

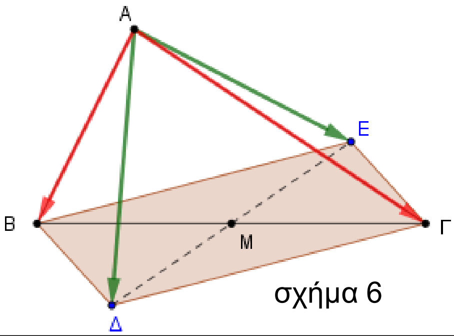
$\Leftrightarrow$ ΔΒΕΓ παρ/μο (σχήμα 6) και επομένως οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Άρα το μέσο Μ της ΒΓ είναι και μέσο της ΔΕ.

β) Χρησιμοποιούμε το σημείο Α ως σημείο αναφοράς:

$\vec{PB}+\vec{P\Gamma}=\vec{P\Delta}+\vec{PE}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{AB}-\cancel{\vec{AP}}+\vec{A\Gamma}-\cancel{\vec{AP}}=\vec{A\Delta}-\cancel{\vec{AP}}+\vec{AE}-\cancel{\vec{AP}}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}$, που ισχύει λόγω του (α) ερωτήματος.



σχήμα 6

12) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ και Δ του επιπέδου, ισχύει:

$$\vec{AB}+\vec{\Gamma A}=\vec{\Gamma\Delta}-\vec{B\Gamma}+\vec{\Delta\Gamma}.$$

Λύση: Έστω Ο τυχαίο σημείο αναφοράς. Τότε η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$\vec{OB}-\cancel{\vec{OA}}+\cancel{\vec{OA}}-\vec{O\Gamma}=\cancel{\vec{O\Delta}}-\cancel{\vec{O\Gamma}}-\vec{O\Gamma}+\vec{OB}+\cancel{\vec{O\Gamma}}-\cancel{\vec{O\Delta}}\Leftrightarrow \vec{OB}-\vec{O\Gamma}=-\vec{O\Gamma}+\vec{OB}$ που είναι αληθής.

13) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του επιπέδου, ισχύει:

$\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{AE}+\vec{BZ}+\vec{\Gamma\Delta}$.

Λύση: Έστω Ο τυχαίο σημείο αναφοράς. Τότε η σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$\cancel{\vec{O\Delta}}-\cancel{\vec{OA}}+\cancel{\vec{OE}}-\cancel{\vec{OB}}+\cancel{\vec{OZ}}-\cancel{\vec{O\Gamma}}=\cancel{\vec{OE}}-\cancel{\vec{OA}}+\cancel{\vec{OZ}}-\cancel{\vec{OB}}+\cancel{\vec{O\Delta}}-\cancel{\vec{O\Gamma}}\Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}$ που είναι αληθής.

14) Εάν τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{AB}+\vec{\Gamma A}$ και $\vec{v}=\vec{KB}+\vec{\Gamma\Lambda}$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται.

Λύση: $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{\Gamma A}=\vec{KB}+\vec{\Gamma\Lambda}$

$\Leftrightarrow \vec{\Gamma B}=\vec{KB}+\vec{\Gamma\Lambda}$

$\Leftrightarrow \vec{\Gamma B}-\vec{\Gamma\Lambda}=\vec{KB}$

$\Leftrightarrow \vec{\Lambda B}=\vec{KB}$. Άρα τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται.

15) Αν ισχύει η ισότητα $\vec{PA}+\vec{PB}=\vec{\Sigma A}+\vec{\Sigma B}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

Λύση: $\vec{PA}+\vec{PB}=\vec{\Sigma A}+\vec{\Sigma B}\Leftrightarrow \vec{PA}-\vec{\Sigma A}=\vec{\Sigma B}-\vec{PB}$

$\Leftrightarrow \vec{PA}-\vec{\Sigma A}=\vec{\Sigma B}-\vec{PB}$

$\Leftrightarrow \vec{P\Sigma}=\vec{\Sigma P}$

$\Leftrightarrow 2\vec{P\Sigma}=\vec{0}$

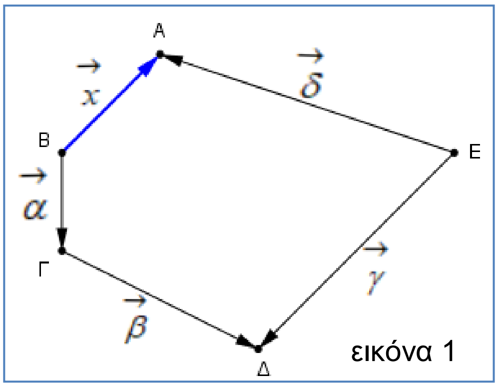
$\Leftrightarrow \vec{P\Sigma}=\vec{0}$. Άρα τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

16) Εάν είναι $|\vec{\alpha}|=\dfrac{3}{4}$, $|\vec{\beta}|=\dfrac{1}{4}$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\ge 1$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Λύση: $\left.\begin{array}{l} |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{4}=1\ge|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \\ \text{Επίσης } |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \end{array}\right\}\Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|.$

Άρα (παρατήρηση 3) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

17) Στην εικόνα 1, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$, ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.



εικόνα 1

Λύση: $\vec{x}=\vec{\mathrm{BA}}=\vec{\mathrm{B\Gamma}}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Delta \mathrm{E}}+\vec{\mathrm{EA}}$

$=\vec{\mathrm{B\Gamma}}+\vec{\Gamma\Delta}-\vec{\mathrm{E}\Delta}+\vec{\mathrm{EA}}$

$=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}+\vec{\delta}$, (σχήμα 1).

18) Εάν σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει $\vec{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Delta}}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: $\vec{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{A\Delta}} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{A\Gamma}}-\vec{\mathrm{A\Delta}}=\vec{\mathrm{AB}}$

$\Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma}=\vec{\mathrm{AB}}$. Άρα το το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

19) Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|$=2, $|\vec{\beta}|$=5 και $|\vec{\gamma}|$ =8, να αποδείξετε ότι:

i) $3\le|\vec{a}+\vec{\beta}|\le 7$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\neq\vec{0}$.

Λύση:

i) $\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\Leftrightarrow |2-5|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le 2+5$

$\Leftrightarrow 3\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le 7$.

ii) Εάν ήταν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=8$, άτοπο γιατί $3\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le 7$.

20) Εάν $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|+|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Β μεταξύ των Α και Γ.

Λύση: $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|+|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|\Leftrightarrow|\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{B\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|+|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$.

Άρα (παρατήρηση 3) $\vec{\mathrm{AB}}\upuparrows\vec{\mathrm{B\Gamma}}$ και επομένως τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Β μεταξύ Α και Γ.

21) Εάν $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|-|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Γ μεταξύ των Α και Β ή το Α μεταξύ Β και Γ.

Λύση: $|\vec{\mathrm{A\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|-|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|\Leftrightarrow|\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{B\Gamma}}|=|\vec{\mathrm{AB}}|-|\vec{\mathrm{B\Gamma}}|$.

Άρα (παρατήρηση 3) $\vec{\mathrm{AB}}\uparrow\downarrow\vec{\mathrm{B\Gamma}}$ και επομένως τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με το Γ μεταξύ των Α και Β ή το Α μεταξύ Β και Γ.

22) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $\hat{\mathrm{A}}=120^0$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών:

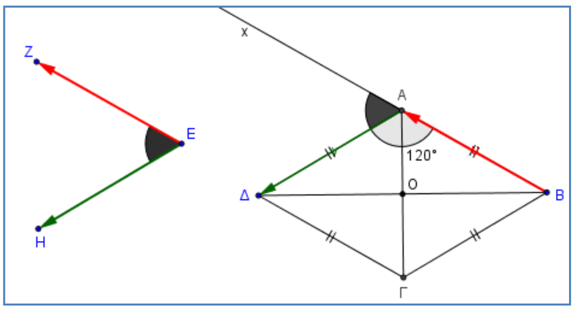
i) $(\widehat{\vec{BA},\vec{A\Delta}})$.

ii) $(\widehat{\vec{\mathrm{A\Gamma}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}})$.

iii) $(\widehat{\vec{\Gamma A},\vec{\mathrm{B\Gamma}}})$.

iv) $(\widehat{\vec{\mathrm{OA}},\vec{\mathrm{B\Delta}}})$.

Λύση:



σχήμα 7

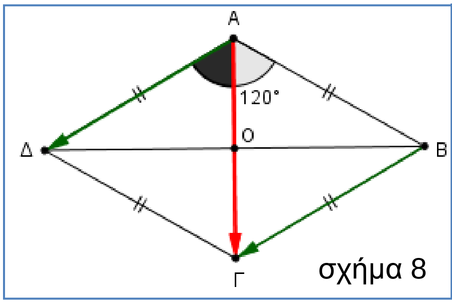
i) Από τυχαίο σημείο Ε του επιπέδου, (σχήμα 7), κατασκευάζουμε διανύσματα $\vec{\mathrm{EZ}}=\vec{\mathrm{BA}}$ και $\vec{\mathrm{EH}}=\vec{\mathrm{A\Delta}}$.

Τότε $(\widehat{\vec{BA},\vec{A\Delta}})=\mathrm{Z\hat{E}H}$

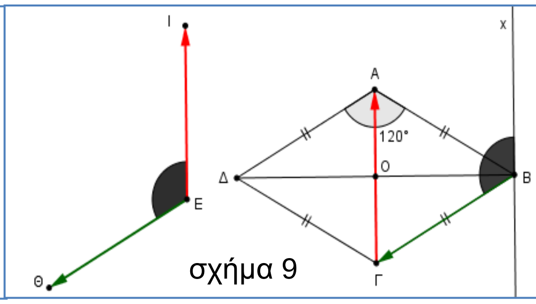
$=x\hat{\mathrm{A}}\Delta$

$=180^0-120^0=60^0$.

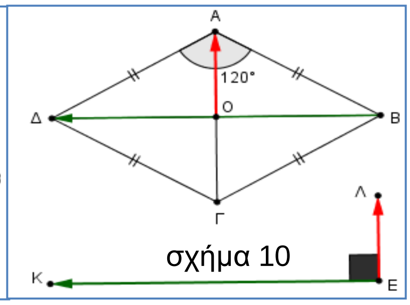
ii) $(\widehat{\vec{\mathrm{A\Gamma}},\vec{\mathrm{B\Gamma}}})=(\widehat{\vec{\mathrm{A\Gamma}},\vec{\mathrm{A\Delta}}})=\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta=60^0$ (σχήμα 8).



σχήμα 8



σχήμα 9



σχήμα 10

iii) $\widehat{(\overrightarrow{\Gamma A},\overrightarrow{B\Gamma})}=\widehat{(\overrightarrow{EI},\overrightarrow{E\Theta})}=I\hat{E}\Theta$

$=x\hat{B}\Gamma$

$=120^0$ (σχήμα 9).

iv) $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{B\Delta})}=\widehat{(\overrightarrow{E\Lambda},\overrightarrow{EK})}=\Lambda\hat{E}K$

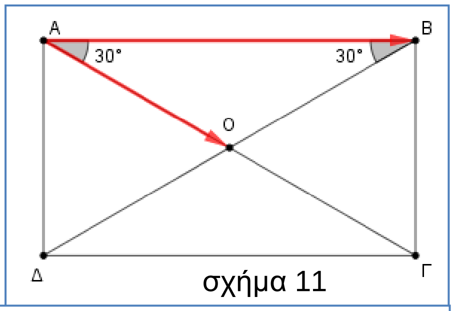
$=A\hat{O}\Delta$

$=90^0$ (σχήμα 10) γιατί οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

23) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και (ΑΓ)=2(ΒΓ). Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών:

i) $\widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})}$. **iii)** $\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{\Gamma O})}$.

ii) $\widehat{(\overrightarrow{B\Delta},\overrightarrow{AB})}$. **iv)** $\widehat{(\overrightarrow{O\Gamma},\overrightarrow{\Delta O})}$.



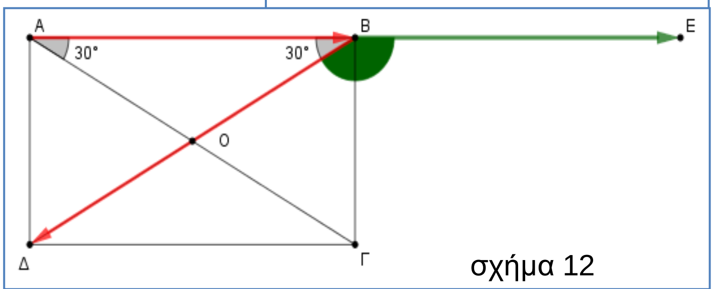
σχήμα 11

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) είναι $(B\Gamma)=\dfrac{(A\Gamma)}{2}$

επομένως $O\hat{A}B=30^0$.

i) $\widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})}=O\hat{A}B=30^0$ (σχήμα 11).

ii) Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα (ΒΕ)=(ΑΒ).



σχήμα 12

$\widehat{(\overrightarrow{B\Delta},\overrightarrow{AB})}=\widehat{(\overrightarrow{B\Delta},\overrightarrow{BE})}$

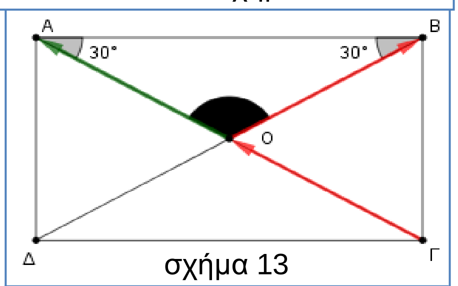
$=B\hat{\Delta}E$

$=180^0-30^0$

$=150^0$ (σχήμα 12).

iii) $\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{\Gamma O})}=\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})}$

$=B\hat{O}A=150^0$ (σχήμα 13).

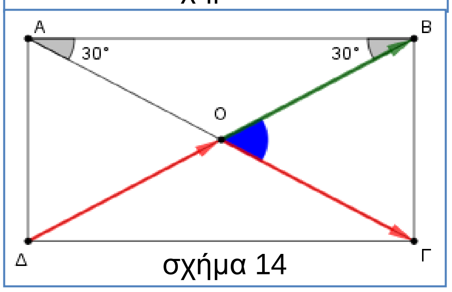


σχήμα 13

iv) $\widehat{(\overrightarrow{O\Gamma},\overrightarrow{\Delta O})}=\widehat{(\overrightarrow{O\Gamma},\overrightarrow{OB})}$

$=\Gamma\hat{O}B$

=600 (σχήμα 14).



σχήμα 14

24) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

i) $\widehat{(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{AB})}$. **iii)** $\widehat{(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{AB})}$.

ii) $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Theta\Gamma})}$. **iv)** $\widehat{(\overrightarrow{B\Theta},\overrightarrow{\Theta\Gamma})}$.

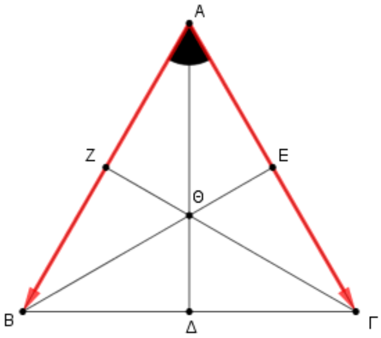
Λύση:

i) $\widehat{(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{AB})}=B\hat{A}\Gamma=60^0$ (σχήμα 15).

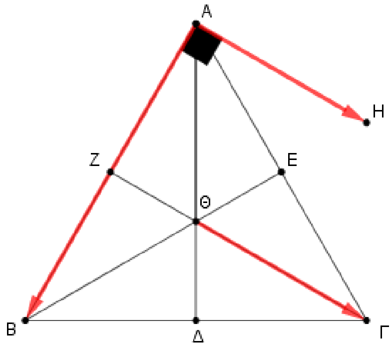
ii) Κατασκευάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{\Theta\Gamma}$ (σχήμα 16). Τότε $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Theta\Gamma})}=B\hat{A}H=90^0$, γιατί ΘΓ $\perp$ ΑΒ.

iii) Κατασκευάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{B\Gamma}$ (σχήμα 17). Τότε $(\overrightarrow{AB},\widehat{\ \overrightarrow{B\Gamma}})=(\overrightarrow{AB},\widehat{\ \overrightarrow{AK}})$

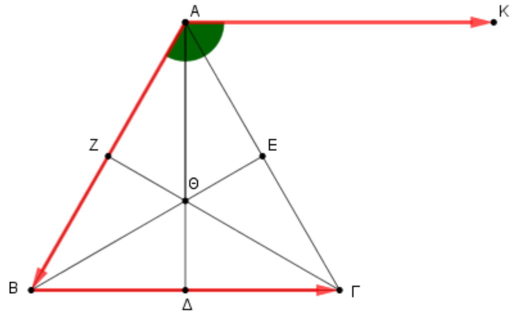
$=B\hat{A}K=180^0-60^0=120^0$.



σχήμα 15

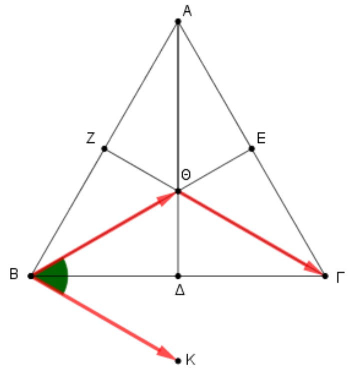


σχήμα 16



σχήμα 17

iv) Κατασκευάζουμε διάνυσμα $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{\Theta\Gamma}$ (σχήμα 18). Τότε $(\overrightarrow{B\Theta},\widehat{\ \overrightarrow{\Theta\Gamma}})$ $=$ $(\overrightarrow{B\Theta},\widehat{\ \overrightarrow{BK}})=K\hat{B}\Theta=2\cdot30^0=60^0$.



σχήμα 18

25) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο και Μ σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{MA}-$ $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}$, να δείξετε ότι το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Α.

Λύση: $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Delta}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{M\Delta}$ και επομένως το Μ ταυτίζεται με το Α.

26) Ομοίως εάν $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma M}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{\Delta B}$.

Λύση: $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma M}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{\Delta B}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}-(\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{\Delta A})=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma M}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma M}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\cancel{\overrightarrow{AM}}=\cancel{\overrightarrow{AM}}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\vec{0}$ και επομένως το Μ ταυτίζεται με το Α.

27) Εάν ΑΒΓΔ τετράπλευρο, να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία είναι:

i) $|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{M\Gamma}|=2$.

ii) $|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma M}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{\Delta M}-\overrightarrow{\Delta A}|$.

Λύση:

i) $|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{M\Gamma}|=2 \Leftrightarrow |\cancel{\overrightarrow{\Gamma B}}-\overrightarrow{AM}+\cancel{\overrightarrow{B\Gamma}}|=2$

$\Leftrightarrow |-\overrightarrow{AM}|=2$

$$\Leftrightarrow |\vec{AM}| = 2.$$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος (Α,2).

ii) $|\underline{\vec{MB}} - \vec{AM} - \vec{\Gamma B} + \underline{\vec{\Gamma M}}| = |\underline{\vec{MA}} - \vec{BM} + \vec{\Delta M} - \underline{\vec{\Delta A}}|$

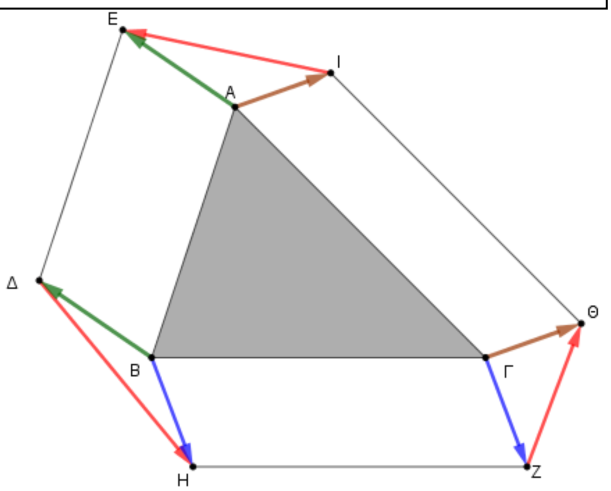
$$\Leftrightarrow |\cancel{\vec{\Gamma B}} - \vec{AM} - \cancel{\vec{\Gamma B}}| = |\cancel{\vec{M\Delta}} - \vec{BM} + \cancel{\vec{\Delta M}}|$$

$$\Leftrightarrow |-\vec{AM}| = |-\vec{BM}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{MA}| = |\vec{MB}|.$$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

28) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ και ΑΓΘΙ. Να αποδείξετε ότι $\vec{\Delta H} + \vec{Z\Theta} + \vec{IE} = \vec{0}$.



σχήμα 19

Λύση: Από το σχήμα 19 έχουμε:

$$\vec{\Delta H} + \vec{Z\Theta} + \vec{IE} = (\cancel{\vec{BH}} - \cancel{\vec{B\Delta}}) + (\cancel{\vec{\Gamma\Theta}} - \cancel{\vec{\Gamma Z}}) + (\cancel{\vec{AE}} - \cancel{\vec{AI}})$$

$= \vec{0}$, λόγω των παραλληλογράμμων ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ και ΑΓΘΙ.

29) Τρία κινητά Α, Β και Γ κινούνται στο επίπεδο και για τις ταχύτητές τους $\vec{\upsilon_A}$, $\vec{\upsilon_B}$, και $\vec{\upsilon_\Gamma}$ ισχύουν τα εξής:

- $\vec{\upsilon_A} + \vec{\upsilon_B} - \vec{\upsilon_\Gamma} = \vec{0}$.
- Το μέτρο της ταχύτητας του Α είναι σταθερό και ίσο με τα $\frac{10}{3}$ του μέτρου της ταχύτητας του Β και με τα $\frac{10}{7}$ του μέτρου της ταχύτητας του Γ.

Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια Β και Γ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Λύση: $|\vec{\upsilon_A}| = \frac{10}{3}|\vec{\upsilon_B}| = \frac{10}{7}|\vec{\upsilon_\Gamma}| \Leftrightarrow |\vec{\upsilon_B}| = \frac{3}{10}|\vec{\upsilon_A}|$ και $|\vec{\upsilon_\Gamma}| = \frac{7}{10}|\vec{\upsilon_A}|$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα } |\vec{\upsilon_B}| + |\vec{\upsilon_\Gamma}| = \frac{3}{10}|\vec{\upsilon_A}| + \frac{7}{10}|\vec{\upsilon_A}| = \frac{10}{10}|\vec{\upsilon_A}| = |\vec{\upsilon_A}| \\ \vec{\upsilon_A} + \vec{\upsilon_B} - \vec{\upsilon_\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{\upsilon_B} - \vec{\upsilon_\Gamma}| = |-\vec{\upsilon_A}| = |\vec{\upsilon_A}| \end{array}\right\} \Leftrightarrow |\vec{\upsilon_B} - \vec{\upsilon_\Gamma}| = |\vec{\upsilon_B}| + |\vec{\upsilon_\Gamma}| \Leftrightarrow \vec{\upsilon_B} \uparrow\downarrow \vec{\upsilon_\Gamma}.$$

30) Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{7} = \frac{|\vec{\gamma}|}{10}$, να δείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$. **ii)** $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$.

Λύση:

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$

$$\Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}| \text{...(1)}$$

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{7} = \frac{|\vec{\gamma}|}{10} = \frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{3+7} = \frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{10}. \text{ Άρα } |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| \text{...(2)}$$

Από (1) και (2) έχουμε $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}$

$\Leftrightarrow |\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|-\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|$……………………………………………………………………(1)

$\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{7}=\frac{|\vec{\gamma}|}{10}=\frac{|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}|}{10-7}=\frac{|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}|}{3}$. Άρα $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}|$……………………………………………………..(2)

Από (1) και (2) έχουμε $|\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|-|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.

31) Dfgdgfs.