ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=2x^2-x+5$ που διέρχεται από το σημείο της $A(3, f(3))$.

Λύση: $f'(x)=4x-1$

$f(3)=2\cdot 3^2-3+5=20$

$f'(3)=4\cdot 3-1=11$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow$

$y-20=11(x-3) \Leftrightarrow$

$y=11x-13$.

2. Ομοίως της $f(x)=x\ln x$, στο σημείο της με τετμημένη e.

Λύση: $f'(x)=\ln x+1$

$f(e)=e\cancelto{1}{\ln e}=e$

$f'(e)=\cancelto{1}{\ln e}+1=2$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-f(e)=f'(e)(x-e) \Leftrightarrow$

$y-e=2(x-e) \Leftrightarrow$

$y=2x-e$.

3. Ομοίως της $f(x)=\frac{x-1}{x}$, στο σημείο της με τεταγμένη 1/2.

Λύση: $f'(x)=\frac{x-x+1}{x^2}=\frac{1}{x^2}$

Εάν $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε:

$f(x_0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_0-1}{x_0}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_0=2$.

$f'(2)=\frac{1}{4}$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow$

$x-4y=0$.

4. Ομοίως της $f(x)=-x^3+4x$, στο σημείο της $A(x_o,0)$.

Λύση: $f(x_0)=0$

$\Leftrightarrow -x_0^3+4x_0=0$

$\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=2$ ή $x_0=-2$.

$f'(x)=-3x^2+4$.

• $x_0=0$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$\Leftrightarrow y=4x$.

• $x_0=2$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$\Leftrightarrow y=-8x+16$.

• $x_0=-2$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$

$\Leftrightarrow y=-8x-16$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(x_o, f(x_o))$, όταν $f'(x_o)=3$.

Λύση: $f'(x)=3x^2$.

$f'(x_o)=3 \Leftrightarrow 3x_o^2=3$

$\Leftrightarrow x_o=1$ ή $x_o=-1$.

• $x_0=1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$\Leftrightarrow y=3x-2$.

• $x_0=-1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

$\Leftrightarrow y=3x+2$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=\etaμx$, $x\in(0,3\pi/2)\cup(3\pi/2,3\pi)$ στο σημείο της $A(x_o,f(x_o))$, όταν $f'(x_o)=0$.

Λύση: $f'(x)=\sigmaυνx$.

$f'(x_o)=0 \Leftrightarrow \sigmaυνx_o=0$

$\Leftrightarrow x_o=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$..................................(1)

$0<x_o<\frac{3\pi}{2}=0$ ή $\frac{3\pi}{2}<x_o<3\pi \Leftrightarrow$

$0<\kappa\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}=0$ ή $\frac{3\pi}{2}<\kappa\pi+\frac{\pi}{2}<3\pi \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<3\pi-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<\pi$ ή $\pi<\kappa\pi<\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}<\kappa<1$ ή $1<\kappa<\frac{5}{2}$.

Άρα κ=0 ή κ=2.

• κ=0. Τότε $x_0=\frac{\pi}{2}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y=1$.

• κ=2.Τότε $x_0=\frac{5\pi}{2}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{5\pi}{2}\right)\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)$

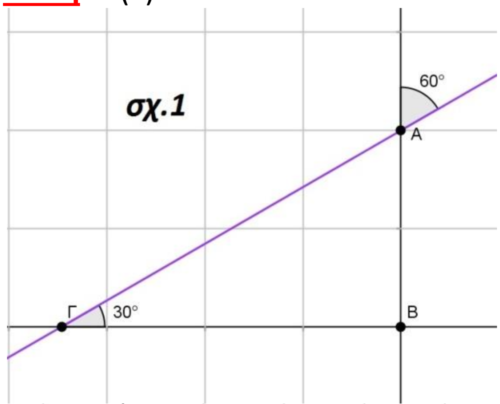
$\Leftrightarrow y=1$.

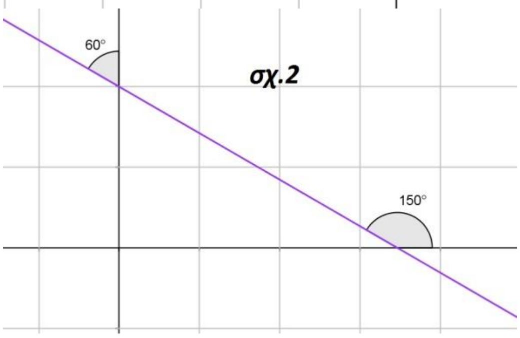
7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=e^x$, που σχηματίζει γωνία π/4 με τον θετικό ημιάξονα Οx.

Λύση: Εάν $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε $f'(x_0)=εφ(π/4) \Leftrightarrow e^{x_0}=1$
$\Leftrightarrow x_0=0$.
$f'(x)=e^x$.
$f(0)=e^0=1=f'(0)$.
Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$
$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$
$y-1=1(x-0) \Leftrightarrow$
$y=x+1$.

8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=-x^2$, που σχηματίζει γωνία π/3 με τον άξονα yOy΄. (δυο περιπτώσεις)

Λύση: $f'(x)=-2x$.





$f'(x_0)=εφ(π/6)$ (σχ.1) ή $f'(x_0)=εφ(5π/6)$ (σχ.2)
$-2x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $-2x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$
$x_0=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ή $x_0=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

• $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{6}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
$\Leftrightarrow y-f\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
$\Leftrightarrow y+\frac{1}{12}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{12}$.

• $x_0=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
$\Leftrightarrow y-f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
$\Leftrightarrow y+\frac{1}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
$\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{12}$.

9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=-x^2+3x-5$, που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $x+y+5=0$.

Λύση: Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.
$f'(x)=-2x+3$.
$λ_ε=-\frac{A}{B}=-1$.
$δ//ε \Leftrightarrow λ_δ=λ_ε$
$\Leftrightarrow f'(x_0)=-1$
$\Leftrightarrow -2x_0+3=-1$
$\Leftrightarrow x_0=2$.
$f(2)=-3$
$f'(2)=-1$
Η ζητούμενη εφαπτομένη (δ) έχει εξίσωση:
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$
$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$
$y+3=-1(x-2) \Leftrightarrow$
$y=-x-1$.

10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3-x$, που είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $x+2y+6=0$.

Λύση: Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.
$f'(x)=3x^2-1$.
$λ_ε=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}$.
$δ\perp ε \Leftrightarrow λ_δ \cdot λ_ε=-1$
$\Leftrightarrow f'(x_0)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$
$\Leftrightarrow f'(x_0)=2$
$\Leftrightarrow 3x_0^2-1=2$
$\Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=-1$.

• $x_0=1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
$\Leftrightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)$
$\Leftrightarrow y=2x-2$.

• $x_0=-1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
$\Leftrightarrow y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$
$\Leftrightarrow y=2x+2$.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=\ln x$, που είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2e) και Β(2,e).

Λύση: Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$f'(x)=\frac{1}{x}$.

$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{e-2e}{2-1}=-e.$

$\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB}=-1$

$\Leftrightarrow f'(x_0)\cdot(-e)=-1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x_0=e.$

$f(e)=\ln e=1$

$f'(e)=\frac{1}{e}$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-f(e)=f'(e)(x-e) \Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{e}x.$

12. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=e^x ημx$, $x\in[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$, που είναι παράλληλη στον άξονα x΄Οx.

Λύση: $f'(x)=e^x(ημx+συνx)$.

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}(ημx_0+συνx_0)=0$

$\Leftrightarrow ημx_0+συνx_0=0$……….γιατί $e^{x_0}\neq 0$

$\Leftrightarrow ημx_0=-συνx_0$………$συνx_0\neq 0$ (?)

$\Leftrightarrow \frac{ημx_0}{συνx_0}=-1$

$\Leftrightarrow εφx_0=-1$

$\Leftrightarrow εφx_0=εφ(-\pi/4)$

$\Leftrightarrow x_0=κ\pi-\frac{\pi}{4}.$

$0\le x_0<\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{\pi}{2}<x_0\le\pi \Leftrightarrow$

$0\le κ\pi-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{\pi}{2}<κ\pi-\frac{\pi}{4}\le\pi \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4}\le κ\pi<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ή $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<κ\pi\le\pi+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4}\le κ\pi<\frac{3\pi}{4}$ ή $\frac{3\pi}{4}<κ\pi\le\frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4}\le κ<\frac{3}{4}$ ή $\frac{3}{4}<κ\le\frac{5}{4} \Leftrightarrow$

$κ=1.$

Άρα $x_0=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}ημ\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}.$

$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0.$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}.$

13. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=$ $=x^3-7x+6$, στα σημεία που αυτή τέμνει τους άξονες.

Λύση: $f'(x)=3x^2-7$.

• Τον άξονα y΄Oy τον τέμνει στο σημείο $M(0,f(0))$ ή $M(0,6)$.

$f'(0)=-7$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$

$y-6=-7x \Leftrightarrow$

$y=-7x+6.$

• Τον άξονα x΄Οx τον τέμνει στα σημεία $M(x_0,f(x_0))$ που είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^3-7x_0+6=0$…………………………(1)

Κατασκευάζουμε το σχήμα Horner:

1	0	-7	6	1
↓	1	1	-6	
1	1	-6	0	

οπότε η (1) $\Leftrightarrow (x_0-1)(x_0^2+x_0-6)=0$

$\Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=2$ ή $x_0=-3$.

☛ $x_0=1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$\Leftrightarrow y=-4(x-1)$

$\Leftrightarrow y=-4x+4.$

☛ $x_0=2$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$\Leftrightarrow y=5(x-2)$

$\Leftrightarrow y=-5x-10.$

☛ $x_0=-3$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-f(-3)=f'(-3)(x+3)$

$\Leftrightarrow y=20(x+3)$

$\Leftrightarrow y=20x+60.$

14. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^3$ που διέρχεται από το σημείο Α(-1,-5).

Λύση: Προφανώς το σημείο Α(-1,-5) δεν είναι το σημείο επαφής, αφού $f(-1)=(-1)^3=-1$

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής και (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ ……………………………….(1) η εξίσωση της εφαπτομένης.

$f'(x)=3x^2$.

$f(x_0)=x_0^3$, $f'(x_0)=3x_0^2$

(1) $\Leftrightarrow y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$…………………………..(2)

Επειδή το σημείο Α(-1,-5)∈(ε), οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (2), η οποία για x=-1 και y=-5 δίνει $-5-x_0^3=3x_0^2(-1-x_0)$

$\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2-5=0$

η οποία με Horner δίνει

2	3	0	-5	1
↓	2	5	5	
2	5	5	0	

οπότε η (1) $\Leftrightarrow (x_0-1)(2x_0^2+5x_0+5)=0$

$\Leftrightarrow x_0=1$.

(2) $\Leftrightarrow$ y-1=3(x-1)

$\Leftrightarrow$ y=3x-2.

15. Να δείξετε ότι η ευθεία 8x+y-11=0, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)=x^4-6x^2+8$.

Λύση: Βρίσκουμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία:

$$\begin{cases} y=-8x+11 \\ y=x^4-6x^2+8 \end{cases} \Leftrightarrow x^4-6x^2+8=-8x+11$$

$\Leftrightarrow x^4-6x^2+8x-3=0$..........(1)

1	0	-6	8	-3	1
↓	1	1	-5	3	
1	1	-5	3	0	

1	1	-5	3	1
↓	1	2	-3	
1	2	-3	0	

1	2	-3	1
↓	1	3	
1	3	0	

οπότε η (1) $\Leftrightarrow (x-1)^3(x+3)=0$

$\Leftrightarrow$ x=1 ή x=-3.

$f'(x)=4x^3-12x$.

Επειδή $f'(1)=-8=\lambda_\varepsilon$, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α(1,f(1)) είναι η ευθεία (ε).

16. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x^2-4x+5$ και $g(x)=-x^2+2x+2$, έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

Λύση: Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων:

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x^2-4x+5=-x^2+2x+2$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0$

$\Leftrightarrow$ x=1.

Άρα τέμνονται στο σημείο Α(1,3).

$f'(x)=4x-4$ και $g'(x)=-2x+2$.

Επειδή $f'(1)=g'(1)=0$, στο σημείο τομής τους Α(1,3) έχουν κοινή εφαπτομένη y=3.

17. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2+4x+33$ και $g(x)=-x^2-1$.

Λύση:

1ος τρόπος: $f'(x) = 2x + 4$ και $g'(x) = -2x$.

Εάν $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,g(x_2))$ οι συντεταγμένες των Α και Β αντίστοιχα, τότε:

- (ε): $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y-x_1^2-4x_1-33=(2x_1+4)(x-x_1)$

$\Leftrightarrow$ …

$\Leftrightarrow y=(2x_1+4)x+(33-x_1^2)$.............(1)

- (ε): $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$

$\Leftrightarrow y+x_2^2+1=-2x_2(x-x_2)$

$\Leftrightarrow$ …

$\Leftrightarrow y=-2x_2x+(x_2^2-1)$.......................(2)

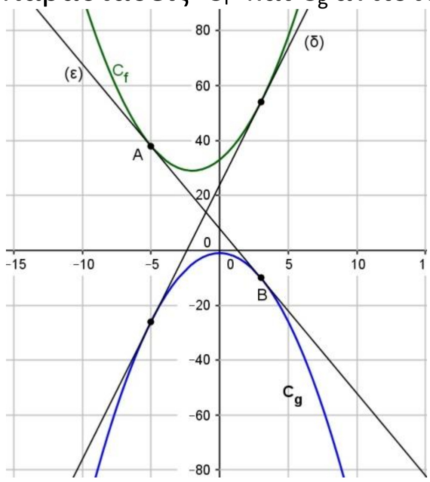
Από (1) και (2) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1+4=-2x_2 \\ 33-x_1^2=x_2^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-5 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=3 \end{cases}.$$

Για $x_1=3$, (1) $\Leftrightarrow$ y = 10x + 24.

Για $x_1=-5$, (1) $\Leftrightarrow$ y = - 6x + 8.

2ος τρόπος: Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη και Α, Β τα σημεία επαφής αυτής με τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g αντίστοιχα (σχήμα).



$f'(x)=2x+4$ και $g'(x)=-2x$.

Έστω (ε): y=λx+β...(1)

Εάν $A(x_1,\lambda x_1+\beta)$ και $B(x_2,\lambda x_2+\beta)$ οι συντεταγμένες των Α και Β αντίστοιχα, τότε:

$$\begin{cases} f'(x_1)=\lambda & (1) \\ f'(x_2)=\lambda & (2) \\ f(x_1)=\lambda x_1+\beta & (3) \\ f(x_2)=\lambda x_2+\beta & (4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1+4=\lambda \\ -2x_2=\lambda \\ x_1^2+4x_1+33=\lambda x_1+\beta \\ -x_2^2-1=\lambda x_2+\beta \end{cases}$$

(1),(2) $\Leftrightarrow 2x_1+4=-2x_2 \Leftrightarrow x_2=-x_1-2$...............(5)

(3)-(4) $\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+4x_1+34=\lambda x_1-\lambda x_2$

$\overset{(1),(2),(5)}{\Longleftrightarrow}$ $x_1^2+(-x_1-2)^2+4x_1+34=$
$=(2x_1+4)x_1-(2x_1+4)(-x_1-2)$
$\Leftrightarrow x_1^2+(x_1+2)^2+4x_1+34=$
$=(2x_1+4)x_1-(2x_1+4)(-x_1-2)$
$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1^2+2x_1-15=0$.
Δ=64 και $x_1=3$ ή $x_1=-5$.

- Αν $x_1=3$ τότε (1) $\Leftrightarrow$ λ=10,
(2) $\Leftrightarrow x_2=-5$
(4) $\Leftrightarrow$ β=24

και (δ): y=10x+24.

- Αν $x_1=-5$ τότε (1) $\Leftrightarrow$ λ=-6,
(2) $\Leftrightarrow x_2=3$
(4) $\Leftrightarrow$ β=8

και (ε): y=-6x+8 (Η ύπαρξη δυο εφαπτομένων φαίνεται στο σχήμα).

18. Να βρείτε το α∈R, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f(x)= $=\frac{1}{9}(\alpha x-x^3)$ στα σημεία που αυτή τέμνει τον άξονα xOx΄, να σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία 45^0.

__Λύση__: $f'(x)=\frac{1}{9}(\alpha-3x^2)$.
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα xOx΄ είναι:
f(x)=0 $\Leftrightarrow \frac{1}{9}(\alpha x-x^3)=0$
$\Leftrightarrow$ αx-x^3=0
$\Leftrightarrow$ x(α-x^2)=0.

- x=0. Τότε $f'(0)=\varepsilon\varphi 45^0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{9}\alpha=1$
$\Leftrightarrow$ α=9.
- α-x^2=0…………………………………………………(2)

☛ Αν α<0 τότε η (2) είναι αδύνατη.
☛ Αν α>0 τότε (2) $\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}$.
--- Αν $x=\sqrt{a}$ τότε $f'(\sqrt{\alpha})=\varepsilon\varphi 45^0$
$\Leftrightarrow \frac{-2\alpha}{9}=1$
$\Leftrightarrow$ α=-9/2 απορρίπτεται γιατί α>0.
--- Αν $x=-\sqrt{a}$ τότε ομοίως βρίσκουμε α=-9/2 απορρίπτεται γιατί α>0.
☛ Αν α=0 τότε (2) $\Leftrightarrow$ x=0 που έχει ήδη εξεταστεί.

19. Έστω $f(x)=\frac{ax^3+\beta}{x}$. Να βρείτε τα α, β∈R, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από το σημείο Α(2,2) και η εφαπτομένη της στο Α να έχει συντελεστή διεύθυνσης -4.

__Λύση__: $f'(x)=\frac{3ax^2\cdot x-ax^3-\beta}{x^2}$
$=\frac{2ax^3-\beta}{x^2}$.

$\begin{cases} f'(2)=-4 \\ f(2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16\alpha-\beta}{4}=-4 \\ \frac{8\alpha+\beta}{2}=2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\alpha-\beta=-16 \\ 8\alpha+\beta=4 \end{cases}$ +
24α=-12 $\Leftrightarrow$ α=$-\frac{1}{2}$.

8α+β=4 $\Leftrightarrow$ -4+β=4 $\Leftrightarrow$ β=8.

20. Έστω f(x)=αx^2+βx+γ. Να βρείτε τα α, β, γ∈R, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από το σημείο Α(1,0) και η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο της Β(2,-1) να είναι κάθετη στην ευθεία (δ): x-3y-6=0.

__Λύση:__ f΄(x)=2αx+β.
$\lambda_\delta=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$.
δ⊥ε $\Leftrightarrow \lambda_\delta\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-3$.

$\begin{cases} f'(2)=-3 \\ f(2)=-1 \\ f(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+\beta=-3 \\ 4\alpha+2\beta+\gamma=-1 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+\beta=-3 \\ 3\alpha+\beta=-1 \\ \gamma=-\alpha-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=5 \\ \gamma=-3 \end{cases}$.

21. Βρείτε τα α, β∈R, ώστε η εφαπτομένη C_f της
$$f(x)=\begin{cases} x\eta\mu x+\alpha, & x\le 0 \\ x^2+(\beta-2)x+2, & x>0 \end{cases}$$
στο σημείο με x_o=0 να ορίζεται.

__Λύση__: Αρκεί να παραγωγίζεται στο σημείο x_o=0.
Αφού παραγωγίζεται στο x_o=0 θα είναι και συνεχής. Άρα
$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ ……………………(1)
$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x\eta\mu x+\alpha)=\alpha$ ………………(2)
$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+(\beta-2)x+2)=$ 2…….(3)
f(2)=α………………………………………………………(4)
Από (1),(2),(3) και (4) ⇒ α=2

Άρα $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu x+2, & x\le 0 \\ x^2+(\beta-2)x+2, & x>0 \end{cases}$.

$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x\eta\mu x+\cancel{2}-\cancel{2}}{x}$
$=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{x}\eta\mu x}{\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} ημx$

$=ημ0=0.$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2+(β-2)x+\cancel{2}-\cancel{2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+(β-2)x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(x+β-2)}{\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}(x+β-2)$

$=β-2.$

Για να παραγωγίζεται στο σημείο $x_o=0$, πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Leftrightarrow β-2=0$

$\Leftrightarrow β=2.$

22. Έστω $f(x)=x^3+αx^2+βx+γ$. Να βρείτε τα α, β, γ∈R, ώστε η γραφική παράσταση C_f της f να διέρχεται από τα σημεία Α(-1,1),Β(1,-3) και οι εφαπτομένες της στα σημεία Α και Β να είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση: $f'(x)=3x^2+2αx+β$

$$\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(1)=-3 \\ f'(1)\cdot f'(-1)=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1+α-β+γ=1 & (1)\\ 1+α+β+γ=-3 & (2)\\ (3-2α+β)(3+2α+β)=-1 & (3)\end{cases}$$

(2)-(1) $\Leftrightarrow$ 2β=-6 $\Leftrightarrow$ β=-3.

(3) $\overset{β=-3}{\Leftrightarrow}$ α=±1/2.

☛(1) $\underset{α=\frac{1}{2}}{\overset{β=-3}{\Leftrightarrow}}$ γ=-3/2 και

☛(1) $\underset{α=-\frac{1}{2}}{\overset{β=-3}{\Leftrightarrow}}$ γ=-1/2.

Άρα (α=1/2,β=-3,γ=-3/2) ή (α=-1/2,β=-3,γ=-1/2).

23. 23937-2 (τράπεζα): Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=x^3+x-1, x\in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $A(1,f(1))$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) $f'(x) = (x^3+x-1)'=3x^2+1 > 0$ για κάθε $x\in$ IR.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο IR, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(IR)\overset{f\uparrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

$=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x-1), \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-1)\right)$

$=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3), \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)\right)$

$= (-\infty, +\infty)$

= IR.

γ) f(1)=1 και f΄(1)=4. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf είναι y-f(1)=f΄(1)(x-1)

$\Leftrightarrow$ y-1=4(x-1) $\Leftrightarrow$ y=4x-3.

24. 24757-2: Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία 45°.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α(0,1) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία 45°, έχουμε ότι $f'(0)=εφ45^0=1$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της Α(0,1) είναι y-f(0)=f΄(0)(x-0)

$\Leftrightarrow$ y-1=x

$\Leftrightarrow$ y=x+1.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

= f΄(0)

=1.

25. 25762-2: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+x, x\le 0\\ ημx, x>0\end{cases}.$$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $f'(0)=1$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, όταν ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+x)=\lim\limits_{x\to 0^+}ημx=0 \Leftrightarrow$

0 = 0 = 0 αληθής, άρα η f είναι συνεχής στο x_o=0.

β) • $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x^2+x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x(1-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)$

= 1.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}$
$= 1.$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και $f'(0) = 1$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_o = 0$ έχει εξίσωση που δίνεται από τον τύπο y – f(0) = f ΄(0)x
⇔ y = x, διχοτόμος $1^{ου}$ - $3^{ου}$ τεταρτημορίων.

26.26630-2: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^x & , \text{αν } x<0 \\ 1 & , \text{αν } x=0 \\ \text{συν}x & , \text{αν } x>0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0= 0. (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0= 0. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη x = $\frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x$ = e^0 = 1.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x$ = $\text{συν}0^0$ = 1.

Άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ = 1

f(0) = 1

οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ = f(0) = 1.

Επομένως η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο x_0=0.

β) Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}$
$= \frac{d(e^x)}{dx}\Big|_{x=0}$
$= (e^x)|_{x=0}$
$= 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$
$= 0.$

Εφόσον τα δύο όρια διαφέρουν, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0= =0.

γ) Για x > 0 η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη με f '(x) = -ημx.
f(π/2) = συν(π/2) = 0 και
f '(π/2) = -ημ(π/2) = -1.
Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* στο σημείο της με τετμημένη x = π/2 είναι
(ε) : y - f(π/2) = f '(π/2)(x – π/2)
⇔ y = - x + π/2.

27.28302-2: Έστω f : IR→ IR μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις g : IR→ IR με $g(x) = -x$ και gof : IR→ IR.

α) Να βρείτε την τιμή $(gof)(0)$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Είναι (gof)(0) = g(f(0)) = g(-2) = 2.

β) Για κάθε x∈IR είναι g΄(x) = (-x)΄= -1.
Άρα g '(-2) = -1.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 = 0 με f '(0) = 0.
Η g είναι παραγωγίσιμη στο f(0)=-2 με g΄(-2)=-1.
Επομένως η συνάρτηση gof είναι παραγωγίσιμη στο x_0 = 0 με (gof)΄(0) = g΄(f(0))·f΄(0)
= g΄(-2)·0
= 0.

δ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο με τετμημένη x_0 = 0 έχει εξίσωση
y – (gof)(0) = (gof)΄(0)·x ⇔ **…** ⇔ y = 2.

28.28340-4: Έστω μια συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to$ IR η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση g : IR→ IR με $g(x) = -x+1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση
$y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων fog και gof, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(fog)'(2)$ και $(gof)'(-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) Είναι g(x) = -x+1, οπότε g' (x) = -1.
Επειδή η ευθεία y = g(x) = -x+1 είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(-1,f(-1)), θα είναι f(-1) = g(-1) = 2
και f '(-1) = g΄(-1) = -1.

β) i) D_f = (-∞,0) και Dg = IR.

- D_{fog} = {x∈D_g / g(x)∈D_f}
= {x∈IR / -x+1<0}
= {x∈IR / x > 1}
= (1,+∞).
- D_{gof} = {x∈D_f / f(x)∈D_g}
= {x∈$(-\infty,0)$ / f(x)∈IR}
= $(-\infty,0)$.

ii. $(fog)'(2)$ = f '(g(2)) · g '(2)
= f '(-1) ·(-1)
= (-1) ·(-1)
= 1.

$(gof)'(-1)$= g ‘(f(-1)) · f ’(-1)
= g ‘(-2) ·(-1)
= (-1) ·(-1)
= 1.

γ) • (fog)(2) = f(g(2)) = f(-1) = 2.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη x_1=2 είναι
(ε_1) : y - (fog)(2) = (fog)′(2) · (x−2)
⇔ y – 2 = x – 2
⇔ y = x.

• (gof)(−1) = g(f(−1)) = g(2) = −1.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη x_0=−1 είναι
(ε_2) : y − (gof)(−1) = (gof)′(−1) · (x+1)
⇔ y + 1 = x + 1
⇔ y = x.

Επομένως οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση y= x είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων fog και gof .

29. END.