Λύσεις στις ασκήσεις στην εισαγωγή των παραγώγων

1. Να υπολογίσετε το α∈R τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}4x^3-(2\alpha+1)x, & x\ge 1\\ (\alpha^2+3)x-4\alpha, & x<1\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

Λύση: Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$, θα είναι και συνεχής στο $x_o=1$.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)= f(1)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $\alpha^2+3-4\alpha=3-2\alpha \Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\alpha=2$.

• για α=0, $f(x)=\begin{cases}4x^3-x, & x\ge 1\\ 3x, & x<1\end{cases}$.

Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{3x-3}{x-1}=3.$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{4x^3-x-3}{x-1}=$$

$$\overset{Horner}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(4x^2+4x+3)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}(4x^2+4x+3)=11.$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ όταν α=0

• για α=2, $f(x)=\begin{cases}4x^3-5x, & x\ge 1\\ 7x-8 & x<1\end{cases}$.

Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{7x-7}{x-1}=7.$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{4x^3-5x+1}{x-1}=$$

$$\overset{Horner}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(4x^2+4x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}(4x^2+4x-1)=7.$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ όταν α=2.

2. Να υπολογίσετε τα α,β∈R τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2\alpha x+\beta, & x\ge 2\\ \sqrt{x^2+5}+2, & x<2\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$.

Λύση: Αφού έχουμε δυο αγνώστους,

θέλουμε και δυο εξισώσεις. Η μια προκύπτει από την συνέχεια στο $x_o=2$ και η άλλη από την παραγωγισιμότητα στο $x_o=2$.

•Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$, θα είναι και συνεχής στο $x_o=2$.

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^+} f(x)= f(2)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \beta=1-4\alpha$. (1)

•Για να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$ πρέπει

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad (2)$$

$$f(2)=4+4a+\beta\overset{(1)}{=}5.$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+2ax+\beta-5}{x-2}=$$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+2ax-4\alpha-4}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{(x+2)(x-2)+2a(x-2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+2+2a)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2^+}(x+2+2a)=4+2a. \quad (3)$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=$$

$$\overset{\binom{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}. \qquad (4)$$

$(2)\overset{(3),(4)}{\Rightarrow}$ 4+2α=2/3 ⇔ **α=-5/3**.

και η (1) ⇔ **β=23/3**.

3. Εάν f(x$_o$)=1 και f ´(x$_o$)=668 , να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{3f(x)-3}{x-x_o}=2004$ **.**

Λύση: $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{3f(x)-3}{x-x_o}=$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{3(f(x)-1)}{x-x_o}=$$

$$3\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}=$$ 3f´(x$_0$)=3·668=2004.

4. Εάν f παραγωγίσιμη στο 2, να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}=f(2)-2f'(2).$$

Λύση: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}=$

προσθαφαιρούμε το 2f(2)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(2)(x-2)-2(f(x)-f(2))}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(f(2)\frac{x-2}{x-2}-2\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(f(2)-2\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=$$

$$=f(2)-2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f(2)-2f'(2)$$

5. Εάν f παραγωγίσιμη στο x$_o$, να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x_o)-x_of(x)}{x-x_o}=f(x_o)-x_of'(x_o).$$

Λύση: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=$

προσθαφαιρούμε το x$_0$f(x$_0$)

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)\frac{x-x_0}{x-x_0}-x_0\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(f(x_0)-x_0\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=$$

$$=f(x_0)-x_0\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

6. Εάν f παραγωγίσιμη στο α, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x^3-\alpha^3}$

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f^3(x)-f^3(\alpha)}{x-\alpha}$

Λύση: **i)** $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x^3-\alpha^3}=$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{(x-a)(x^2+xa+\alpha^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-a}\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2+xa+\alpha^2}=$$

$$=\frac{f'(a)}{3a^2}.$$

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f^3(x)-f^3(\alpha)}{x-\alpha}=$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(f(x)-f(a))(f^2(x)+f(x)f(a)+f^2(\alpha))}{x-\alpha}=$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-\alpha}\lim\limits_{x\to\alpha}(f^2(x)+f(x)f(a)+f^2(\alpha))=$

=3f ΄(α)f ^{2}(α).

7. Εάν f(0)=2 και f ΄(0)=5, να υπολογίσετε την g΄(0),όταν:

i) $g(x)=x^3f(x)-3x^2$ ii) $g(x)=f^2(x)-xf(x)$

***Λύση*: i)** $g(x)=x^3f(x)-3x^2 \overset{x=0}{\Longrightarrow} g(0)=0$ (1)

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=$ λόγω της (1)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(x)-3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2f(x)-3x)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}f(x)-3\lim\limits_{x\to 0}x\overset{(*)}{=}0\cdot 2-3\cdot 0=0$

ii) $g(x)=f^2(x)-xf(x) \overset{x=0}{\Longrightarrow} g(0)=4$ (2)

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=$ λόγω της (2)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-xf(x)-4}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f^2(x)-4}{x}-\dfrac{xf(x)}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-4}{x}-\lim\limits_{x\to 0}f(x)\overset{(*)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f(x)-2)(f(x)+2)}{x}-f(0)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+2)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}-2\overset{(*)}{=}$

$=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}-2=$

$=4\cdot f'(0)-2=4\cdot 5-2=18.$

(*) Σημείωση: Επειδή f παραγωγίζεται στο x=0, είναι συνεχής στο 0. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=2.$

8. Έστω f: R →R με f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y∈R . Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο R και μάλιστα f ΄(x_o)= = f ΄(0), για κάθε x_o∈R.

***Λύση*:** Η σχέση f(x+y)=f(x)+f(y) για x=0 δίνει f(y)=f(0)+f(y) ⇒ f(0)=0. (1)

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)+f(h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-0}{h-0}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'(0).$

9. Έστω f: R →R παραγωγίσιμη στο 0 και f(x+y)=f(x)f(y) για κάθε x,y∈R και f(0)≠0.

α) Να υπολογίσετε το f(0)

β) Να αποδείξετε ότι f ΄(x_o)=f(x_o)f ΄(0), για κάθε x_o∈R.

***Λύση*: α)** Η σχέση f(x+y)=f(x)f(y) για x=y=0 δίνει f(0)=f^2(0) ⇔ f(0)(f(0)-1)=0 ⇔ f(0)=1.

γιατί f(0)≠0.

β) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)(f(h)-1)}{h}=$

$=f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}=$ λόγω του (α) ερωτήματος

$=f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=f(x_0)\cdot f'(0).$

10.Έστω f,g: R →R παραγωγίσιμες στο α∈R με f(α)=g(α) και f(x) ≤ g(x) για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι f ΄(α)=g΄(α).

Λύση: $\left.\begin{matrix} f(x)\le g(x) \\ f(a)=g(a)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ f(x)-f(α) ≤ g(x)-g(α).

- για x<α, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \Rightarrow$

⇒ f ΄(α) ≥ g΄(α)................................ (1)

- για x>α, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \Rightarrow$

⇒ f ΄(α) ≤ g΄(α)................................ (2)

Από (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

11.Για την συνάρτηση f: R →R ισχύει:

$g(x)-x^2 \le f(x) \le g(x)+x^2$ ....(1)

για κάθε x∈R ,όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0.

Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο x_o=0 και είναι f ΄(0)=g΄(0).

Λύση: Η (1) για x=0, γίνεται

g(0) ≤ f(0) ≤ g(0) ⇔ g(0) = f(0). (2)

- για x > 0, η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$g(x)-g(0)-x^2 \le f(x)-f(0) \le g(x)-g(0)+x^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le \dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\right) \le \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le$

$\le \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)$ κριτήριο παρεμβολής

⇔ $g'_\delta(0) \le f'_\delta(0) \le g'_\delta(0) \Leftrightarrow g'_\delta(0) = f'_\delta(0)$. (3)

- για x < 0, η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$g(x)-g(0)-x^2 \le f(x)-f(0) \le g(x)-g(0)+x^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge \dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\right) \ge \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge$

$\ge \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)$ κριτήριο παρεμβολής

⇔ $g'_\alpha(0) \le f'_\alpha(0) \le g'_\alpha(0) \Leftrightarrow g'_\alpha(0) = f'_\alpha(0)$. (4)

Από (3), (4) έπεται g΄(0) = f΄(0).

12. Αν f παραγωγίσιμη στο x_o=0 και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2004$, να δείξετε ότι f ΄(0)=2004.

Λύση: Θέτω $\dfrac{f(x)}{x}=g(x)$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2004$ και f(x)=xg(x) ⇒

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0\cdot 2004=0$.

Επειδή f παραγωγίσιμη στο x=0, θα είναι και συνεχής στο x=0. Άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2004.$

13. E.M.E: Αν |f (x)| ≤ x^2 ....(1) για κάθε x∈R ,να δείξετε ότι f ΄(0)=0.

Λύση: Η (1) για x=0 δίνει f(0)=0.

(1) ⇔ $-x^2 \le f(x) \le x^2$.............................. (2)

- Η (2) για x > 0 γίνεται $-x \le \dfrac{f(x)}{x} \le x$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$ .... (3)

- Η (2) για x < 0 γίνεται $-x \ge \dfrac{f(x)}{x} \ge x$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0$ .... (4)

Από (3) και (4) $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0. \qquad (5)$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{(5)}{=}0.$$

14. Έστω f: R →R με τις παρακάτω ιδιότητες:

α) f(x+y)=f(x)f(y) για κάθε x,y∈R ,

β) f(x)=1+xg(x) για κάθε x∈R ,όπου g συνάρτηση με $\lim_{x\to 0} g(x)=1$,

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(\alpha)}{=}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)(f(h)-1)}{h}=$$ λόγω του (β) ερωτήματος

$$=f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{hg(h)}{h}=f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}g(h)=$$

$$=f(x_0)\cdot 1=f(x_0).$$

15. Έστω f: R →R με |f (x)-f(y)| ≤ $|x-y|^\nu$ για κάθε x,y∈R ,ν∈N*.

α) Να δείξετε ότι αν ν=2 η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f ΄(x)=0,

β) Να δείξετε ότι αν ν>2 η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f ΄(x)=0,

γ) Αν ν=1 είναι παραγωγίσιμη ;

Λύση: **α)** για ν=2 η δοθείσα γίνεται:

$|f(x)-f(y)|\le |x-y|^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le\frac{|x-y|^2}{|x-y|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le|x-y|\overset{y=x_0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|x-x_0|\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|.$$

Επειδή $\lim_{x\to x_0}(-|x-x_0|)=\lim_{x\to x_0}(|x-x_0|)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0.$

Επειδή x_0∈R, τυχαίο, θα είναι f΄(x)=0, για κάθε x∈R.

β) ενεργούμε όπως και στο (α).

γ) Η ίδια διαδικασία δεν μας οδηγεί σε ανάλογο συμπέρασμα. Άρα η f μπορεί να είναι και μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο x_0. Πχ η συνάρτηση f(x)=(1/3)|x| ικανοποιεί την |f (x)-f(y)| ≤ |x-y|, δεν είναι παραγωγίσιμη όμως στο 0.

16. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο x_o∈R τέτοια ώστε $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-2x+3}{x-x_o}=0.$

Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε):y=2x-3 εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της f στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$.

Λύση: Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-2x+3}{x-x_o}$.

Τότε $\lim_{x\to x_o}g(x)=0$

και $f(x)=(x-x_0)g(x)+2x-3$. (1)

Αφού f συνεχής στο x_0, θα έχουμε:

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_o}f(x)=\lim_{x\to x_o}[(x-x_0)g(x)+2x-3]=$$
$$=\lim_{x\to x_o}(x-x_0)g(x)+\lim_{x\to x_o}(2x-3)=2x_0-3.$$

Άρα $f(x_0)=2x_0-3$ (2)

Η (ε) για $x=x_0$, δίνει $y=2x_0-3$ (3)

Άρα η C_f και η (ε) τέμνονται στο $A(x_o,f(x_o))$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{(x-x_0)g(x)+2x-3-2x_0+3}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\left(g(x)+2\right)=2=\lambda_\varepsilon.$$

Άρα η (ε) εφάπτεται στην C_f στο $A(x_o,f(x_o))$.

17. Οικονομικό (4η δέσμη) 1983: Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(x_o-\varepsilon,x_o+\varepsilon)$.

i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της f στο σημείο x_o,

ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σε ένα σημείο $M(x_o,f(x_o))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο y=f(x), όταν $f'(x_o)\in R$,

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης στο σημείο M(1,1) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο $y=x^3$.

Λύση: Τα (i) και (ii) είναι θεωρία σχ. βιβλίου.

iii) Θέτω $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$

$f'(1)=3$, $f(1)=1$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-1=3(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3x-2$.

18. ΕΜΕ: Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=|x-1|+2$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Λύση: $f(x)=\begin{cases} x+1, & \alpha\nu\ \ x\geq 1 \\ -x+3, & \alpha\nu\ \ x<1\end{cases}.$

$f(1)=1+1=2$.

Βρίσκουμε πλευρικές παραγώγους:

$$\bullet\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-x+3-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x+1}{x-1}=-1$$

$$\bullet\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0=1$.

19. Oxford I.P. 1990:

A. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β). Υποθέτουμε ότι $x_o\in(\alpha,\beta)$. Θεωρούμε και την συνάρτηση φ με

$$\phi(x)=\begin{cases} f(x), & \alpha\nu\ x\in(\alpha,x_0) \\ g(x), & \alpha\nu\ x\in[x_0,\beta)\end{cases}.$$

i) Αν $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$, να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o,

ii) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, τότε $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$,

B. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η συνάρτηση φ με

$$\phi(x)=\begin{cases} \alpha(x+1), & \alpha\nu\ x\in(-3,0) \\ 2e^{\beta x}, & \alpha\nu\ x\in[0,4)\end{cases},$$

να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση: Α i) • $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$……………….(1)

• $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$……………..(2)

Επειδή $f'(x_0)=g'(x_0)$, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=$

$=f'(x_0)=g'(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=$

$=g'(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0)=f'(x_0)=g'(x_0)$.

Α ii) • Αφού η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι και συνεχής x_0. Άρα:

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\phi(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\phi(x)=\phi(x_0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\phi(x_0)$ και

επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, θα είναι και συνεχείς στο x_0. Άρα:

$f(x_0)=g(x_0)=\phi(x_0)$. (3)

• Αφού η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow$

$f'_a(x_0)=g'_\delta(x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$

γιατί οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

Β. Θέτω $f(x)=\alpha(x+1)$, $x\in(-3,4)$ και $g(x)=2e^{\beta x}$, $x\in(-3,4)$. Σύμφωνα με το (Α) ερώτημα της άσκησης, η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν και μόνο αν

$\begin{cases} f(0)=g(0)\\ f'(0)=g'(0)\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ \beta=1\end{cases}$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta, & \text{αν } x\in(-\infty,1]\\ \sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

Να προσδιοριστούν οι α, β∈R , ώστε να υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο 1.

Λύση: Θέλουμε δυο εξισώσεις γιατί δυο και οι άγνωστοι.

• Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από την συνέχεια γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα και συνεχής στο 1.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow$

…⇔ α+β=1 (1)

• Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την παραγωγισιμότητα στο 1:

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-(a+\beta+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+ax+\beta-(\alpha+\beta+1)}{x-1}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+ax+\beta-2}{x-1}\Leftrightarrow$

$\overset{\beta=1-\alpha}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+ax+1-\alpha-2}{x-1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+ax-\alpha-1}{x-1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)+(ax-\alpha)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=a+2\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}.$$

(1) $\Rightarrow \beta=\frac{5}{2}.$

21. i) Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ,\alpha\nu\ x\le 2\\ \alpha x+\beta & ,\alpha\nu\ x>2\end{cases}.$$ **Να**

βρεθούν τα α,β∈R , ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο 2,

ii) Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η συνάρτηση f με τύπο f(x) = $e^{\lambda|x|+\mu}$, λ, μ∈R , να είναι παραγωγίσιμη στο x=0.

***Λύση*: i)** • Η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα και συνεχής στο 2.

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Leftrightarrow$$

...$\Leftrightarrow$ 2α+β=4 (1)

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{\alpha x+\beta-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\alpha x-2\alpha}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ α=4.

(1) $\Rightarrow$ β=-4.

ii) $$f(x)=\begin{cases}e^{\lambda x+\mu} & ,\alpha\nu\ x\ge 0\\ e^{-\lambda x+\mu} & ,\alpha\nu\ x\le 0\end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\lambda x+\mu}-e^{\mu}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\lambda x+\mu}-e^{\mu}}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\lambda x}-1}{x}=e^{\mu}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\lambda x}-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\lambda x}-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(e^{-\lambda x}-1\right)'}{(x)'}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\lambda e^{\lambda x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\lambda e^{-\lambda x}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ λ=-λ $\Leftrightarrow$ λ=0.

22. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,\alpha\nu\ x\in(-\infty\ 0]\\ 1+\ln\dfrac{1+x}{1-x} & ,\alpha\nu\ x\in(0,1)\end{cases}.$$

i) Να δείξετε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο 0,

ii) Να λυθεί η εξίσωση f΄(x)=0 στο (0,1).

***Λύση*: i)** f΄$_{\alpha}$(0)=1.

$$f_{\delta}'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'}{(x)'} = \ldots = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = 2.$$

Επειδή $1=f'_{\alpha}(0)\neq f'_{\delta}(0)=2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ii) $f'(x)=0 \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \frac{2}{(1+x)(1-x)}=0$, αδύνατη.

23. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\Delta\to R$, γνήσια μονότονη στο διάστημα Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o\in\Delta$, $f'(x_o)\neq 0$ και $f^{-1}:f(\Delta)\to R$ η αντίστροφή της συνεχής, τότε και η f^{-1} παραγωγίζεται στο $y_o=f(x_o)$ και ισχύει $(f^{-1})'(y_o)=\frac{1}{f'(x_o)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$.

Λύση: Αφού η f είναι μονότονη, αντιστρέφεται.

$$f^{-1}(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=$$

$$\overset{(*)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=$$

$$=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

(*) *Σημείωση* : Θέτω $x=f^{-1}(y)$. Τότε $y=f(x)$, $y_0=f(x_0)$

και $\lim_{y\to y_0}x=\lim_{y\to y_0}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)=x_0$

γιατί f^{-1} συνεχής και '1-1' επειδή είναι μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

24. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(1)=e$ και $f(x+y)=f(x)f(y)$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:

i) $f(x)>0$, για κάθε $x\in R$,

ii) $f(0)=1$,

iii) Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, τότε είναι συνεχής και στο R,

iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, τότε είναι παραγωγίσιμη και στο R.

Λύση: **i)** $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)=$

$$=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geq 0.$$

Εάν υπάρχει x_0 με $f(x_0)=0$, τότε

$f(1)=f(x_0+1-x_0)$

$= f(x_0+1)\cdot f(x_0)$

$= f(x_0+1)\cdot 0$

$=0$, άτοπο, γιατί $f(1)=e$.

Άρα $f(x)\neq 0$, $\forall x\in R$.

Επομένως $f(x)>0$ $\forall x\in R$.

ii) Η δοθείσα για y=0 δίνει

$$f(x)=f(0)f(x)\overset{f(x)\neq 0}{\Rightarrow} f(0)=1.$$

iii) $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f((x-x_0)+x_0)=$

$$=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)f(x_0)=$$

$$=f(x_0)\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)=$$

$$=f(x_0)\lim_{x-x_0\to 0}f(x-x_0)\underset{u=x-x_0}{\overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega}{=}}$$

$$=f(x_0)\lim_{u\to 0}f(u)\underset{\sigma\tau o\ 0}{\overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}}$$

$$=f(x_0)f(0)\overset{(ii)}{=}f(x_0)\cdot 1=f(x_0).$$

iv) $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)(f(h)-1)}{h}=$$

$$=f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=$$

$$= f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} =$$

$$= f(x_0)f'(0).$$

Άρα f΄(x)=f(x)f΄(0), για κάθε $x\in R$.