Λύσεις στις ασκήσεις στην εισαγωγή των παραγώγων

1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 - (2\alpha+1)x, & x \geq 1 \\ (\alpha^2+3)x - 4\alpha, & x < 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

Λύση: Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$, θα είναι και συνεχής στο $x_o=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2+3-4\alpha=3-2\alpha \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\alpha=2$.

• για $\alpha=0$, $f(x) = \begin{cases} 4x^3-x, & x \geq 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$.

Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{3x-3}{x-1} = 3.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{4x^3-x-3}{x-1} \overset{\text{Horner}}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(4x^2+4x+3)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(4x^2+4x+3) = 11.$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ όταν $\alpha=0$

• για $\alpha=2$, $f(x) = \begin{cases} 4x^3-5x, & x \geq 1 \\ 7x-8 & x < 1 \end{cases}$.

Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{7x-7}{x-1} = 7.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{4x^3-5x+1}{x-1} \overset{Horner}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(4x^2+4x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(4x^2+4x-1) = 7.$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ όταν $\alpha=2$.

2. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2\alpha x+\beta, & x \geq 2 \\ \sqrt{x^2+5}+2, & x < 2 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$.

Λύση: Αφού έχουμε δυο αγνώστους, θέλουμε και δυο εξισώσεις. Η μια προκύπτει από την συνέχεια στο $x_o=2$ και η άλλη από την παραγωγισιμότητα στο $x_o=2$.

•Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$, θα είναι και συνεχής στο $x_o=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \beta=1-4\alpha$. (1)

•Για να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$ πρέπει

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$f(2) = 4+4\alpha+\beta \overset{(1)}{=} 5.$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2\alpha x+\beta-5}{x-2} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2\alpha x-4\alpha-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)(x-2)+2\alpha(x-2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2+2\alpha)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+2+2\alpha) = 4+2\alpha \ldots..(3)$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^-}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \ldots\ldots\ldots(4)$$

$(2) \overset{(3),(4)}{\Rightarrow} 4+2\alpha=2/3 \Leftrightarrow \alpha=-5/3$.

και η (1) $\Leftrightarrow \beta=23/3$.

3. Εάν $f(x_o)=1$ και $f'(x_o)=289$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{7f(x)-7}{x-x_0} = 2023$.

Λύση:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{7f(x)-7}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{7(f(x)-1)}{x-x_0} = 7\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 7\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$=7 f'(x_0)=7\cdot 289=2023$.

4. Εάν f παραγωγίσιμη στο 2, να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} = f(2)-2f'(2).$$

Λύση:

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{f(2)(x-2)-2(f(x)-f(2))}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(f(2)\frac{x-2}{x-2} - 2\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(f(2) - 2\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) =$$

$$= f(2) - 2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f(2)-2f'(2)$$

προσθαφαιρούμε το 2f(2)

5. Εάν f παραγωγίσιμη στο x_o, να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

Λύση:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)\frac{x-x_0}{x-x_0} - x_0\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(f(x_0) - x_0\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = f(x_0) - x_0\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

προσθαφαιρούμε το $x_0f(x_0)$

6. Εάν f παραγωγίσιμη στο α, να υπολογίσετε τα όρια **i)** $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x^3-\alpha^3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f^3(x)-f^3(\alpha)}{x-\alpha}$

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x^3-\alpha^3} =$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{(x-\alpha)(x^2+x\alpha+\alpha^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \cdot \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{x^2+x\alpha+\alpha^2} = \frac{f'(\alpha)}{3\alpha^2}.$$

ii) $\lim_{x\to\alpha} \frac{f^3(x)-f^3(\alpha)}{x-\alpha} =$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{\left(f(x)-f(\alpha)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(\alpha)+f^2(\alpha)\right)}{x-\alpha}$$

$$=$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \lim_{x\to\alpha}\left(f^2(x)+f(x)f(\alpha)+f^2(\alpha)\right)$$

$= 3f'(\alpha)\cdot f^2(\alpha)$,

γιατί αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α, θα είναι και συνεχής στο α.

Επομένως $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

7. Εάν f(0)=2 και f΄(0)=5, να υπολογίσετε την g΄(0),όταν:
i) $g(x)=x^3f(x)-3x^2$ **ii)** $g(x)=f^2(x)-xf(x)$

***Λύση*: i)** $g(x)=x^3f(x)-3x^2 \overset{x=0}{\Rightarrow} g(0)=0$ (1)

$$g'(0) = \lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \quad \text{.......λόγω της (1)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x^3f(x)-3x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(x^2f(x)-3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} x^2 \cdot \lim_{x\to0} f(x) - 3\lim_{x\to0} x$$

$$\overset{(*)}{=} 0\cdot2-3\cdot0 = 0$$

ii) $g(x)=f^2(x)-xf(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} g(0)=4$ (2)

$$g'(0) = \lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \quad \text{........λόγω της (2)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{f^2(x)-xf(x)-4}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{f^2(x)-4}{x} - \frac{xf(x)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{f^2(x)-4}{x} - \lim_{x\to0} f(x)$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to0} \frac{(f(x)-2)(f(x)+2)}{x} - f(0)$$

$$= \lim_{x\to0}(f(x)+2) \cdot \lim_{x\to0} \frac{f(x)-2}{x} - 2$$

$$\overset{(*)}{=} 4\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 2$$

$$= 4\cdot f'(0)-2$$

$$= 4\cdot5-2$$

$$= 18.$$

(∗) Σημείωση: Επειδή f παραγωγίζεται στο x=0, είναι συνεχής στο 0. Άρα $\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 2$.

8. Έστω f : IR→IR με f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x, y∈IR. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο IR και μάλιστα $f'(x_o)=f'(0)$, για κάθε x_o∈IR.

***Λύση*:** Η σχέση f(x+y)=f(x)+f(y) για x=0 δίνει f(y)=f(0)+f(y) ⇒ f(0)=0.............(1)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{f(x_0)+f(h)-f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{f(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{f(h)-0}{h-0}$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{h\to0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$$

$$= f'(0).$$

9. Έστω f : IR→IR παραγωγίσιμη στο 0 και f(x+y)= =f(x)f(y) για κάθε x,y∈IR και f(0)≠0.
α) Να υπολογίσετε το f(0)
β) Να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=f(x_o)f'(0)$, για κάθε x_o∈IR.

***Λύση*: α)** Η σχέση f(x+y)=f(x)f(y) για x=y=0 δίνει $f(0)=f^2(0)$ ⇔ f(0)(f(0)-1)=0 ⇔ f(0)=1.
γιατί f(0)≠0.

β) $f'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to0} \frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{f(x_0)(f(h)-1)}{h} =$$

$$\overset{(\alpha)}{=} f(x_0)\cdot\lim_{h\to0} \frac{f(h)-1}{h}$$

$$= f(x_0)\cdot\lim_{h\to0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$$

$$= f(x_0)\cdot f'(0).$$

10. Έστω f,g : IR → IR παραγωγίσιμες στο α∈IR με f(α)=g(α) και f(x) ≤ g(x) για κάθε x∈IR. Να αποδείξετε ότι f΄(α)=g΄(α).

***Λύση*:** $\left.\begin{matrix} f(x) \le g(x) \\ f(\alpha) = g(\alpha) \end{matrix}\right\}$ ⇒f(x)-f(α) ≤ g(x)-g(α).

• για x<α, $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \ge \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\alpha^-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \ge \lim_{x\to\alpha^-} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$

⇒ f΄(α) ≥ g΄(α)................................. (1)

• για x>α, $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \le \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \le \lim_{x\to\alpha^+} \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$

⇒ f΄(α) ≤ g΄(α)................................. (2)

Από (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

11. Για την συνάρτηση f: IR →IR ισχύει:

$g(x)-x^2 \le f(x) \le g(x)+x^2$ ....(1)

για κάθε x∈IR ,όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0.

Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_o=0$ και είναι $f'(0)=g'(0)$.

Λύση: Η (1) για x=0, γίνεται

$g(0) \le f(0) \le g(0) \Leftrightarrow g(0) = f(0)$. (2)

• για x > 0, η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$g(x)-g(0)-x^2 \le f(x)-f(0) \le g(x)-g(0)+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}-x \le \frac{f(x)-f(0)}{x} \le \frac{g(x)-g(0)}{x}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}-x\right) \le \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \le$$

$$\le \lim_{x\to0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)$$ κριτήριο παρεμβολής

$\Leftrightarrow g'_\delta(0) \le f'_\delta(0) \le g'_\delta(0) \Leftrightarrow g'_\delta(0) = f'_\delta(0)$. (3)

• για x < 0, η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$g(x)-g(0)-x^2 \le f(x)-f(0) \le g(x)-g(0)+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}-x \ge \frac{f(x)-f(0)}{x} \ge \frac{g(x)-g(0)}{x}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to0^-}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}-x\right) \ge \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} \ge$$

$$\ge \lim_{x\to0^-}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)$$ κριτήριο παρεμβολής

$\Leftrightarrow g'_\alpha(0) \le f'_\alpha(0) \le g'_\alpha(0) \Leftrightarrow g'_\alpha(0) = f'_\alpha(0)$. (4)

Από (3), (4) έπεται $g'(0) = f'(0)$.

12. Αν f παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 2024$, να δείξετε ότι $f'(0)=2024$.

Λύση: Θέτω $\frac{f(x)}{x} = g(x)$.

Τότε $\lim_{x\to0} g(x) = 2024$

και $f(x)=xg(x) \Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x \cdot \lim_{x\to0} g(x)$

$= 0 \cdot 2024$

$= 0$.

Επειδή f παραγωγίσιμη στο x=0, θα είναι και συνεχής στο x=0. Άρα $f(0) = \lim_{x\to0} f(x) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 2024.$$

13. **E.M.E**: Αν $|f(x)| \le x^2$ ....(1)

για κάθε x∈IR ,να δείξετε ότι $f'(0)=0$.

Λύση: Η (1) για x=0 δίνει f(0)=0.

(1) ⇔ $-x^2 \le f(x) \le x^2$.............................. (2)

• Η (2) για x > 0 γίνεται $-x \le \frac{f(x)}{x} \le x$ και επειδή $\lim_{x\to0^+}(-x) = \lim_{x\to0^+} x = 0$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής,

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = 0$ .... (3)

• Η (2) για x < 0 γίνεται $-x \ge \frac{f(x)}{x} \ge x$ και επειδή $\lim_{x\to0^-}(-x) = \lim_{x\to0^-} x = 0$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής,

$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} = 0$ .... (4)

Από (3) και (4) $\Rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 0.$ (5)

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} \overset{(5)}{=} 0.$$

14. Έστω f : IR →IR με τις παρακάτω ιδιότητες:

α) f(x+y)=f(x)f(y) για κάθε x,y∈IR ,

β) f(x)=1+xg(x) για κάθε x∈IR ,όπου g συνάρτηση με $\lim_{x\to0} g(x) = 1$,

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR.

Λύση: $f'(x_0) = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$\overset{(\alpha)}{=} \lim_{h\to0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h} =$

$\overset{(\beta)}{=} \lim_{h\to0}\frac{f(x_0)(f(h)-1)}{h} =$

$= f(x_0) \cdot \lim_{h\to0}\frac{hg(h)}{h}$

$= f(x_0) \cdot \lim_{h\to0} g(h) =$

$= f(x_0) \cdot 1$

$= f(x_0)$.

15. Έστω f : IR → IR με $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^\nu$ για κάθε x,y∈IR ,ν∈IN*.

α) Να δείξετε ότι αν ν=2 η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=0$,

β) Να δείξετε ότι αν ν>2 η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=0$,

γ) Αν ν=1 είναι παραγωγίσιμη ;

Λύση: **α)** για ν=2 η δοθείσα γίνεται:

$|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le \frac{|x-y|^2}{|x-y|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le |x-y| \overset{y=x_0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \le |x-x_0| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|x-x_0| \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le |x-x_0|.$$

Επειδή $\lim_{x\to x_0}(-|x-x_0|) = \lim_{x\to x_0}(|x-x_0|) = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$.

Επειδή x_0∈IR, τυχαίο, θα είναι $f'(x)=0$, για κάθε x∈IR.

β) ενεργούμε όπως και στο (α).

γ) Η ίδια διαδικασία δεν μας οδηγεί σε ανάλογο συμπέρασμα. Άρα η f μπορεί να είναι και μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο x_0. Πχ η συνάρτηση $f(x)=(1/3)|x|$ ικανοποιεί την σχέση $|f(x)-f(y)| \le |x-y|$, δεν είναι παραγωγίσιμη όμως στο 0.

16. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $x_o \in$ IR τέτοια ώστε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-2x+3}{x-x_0}=0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε):y=2x-3 εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της f στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$.

Λύση: Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-2x+3}{x-x_0}$.

Τότε $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

και $f(x)=(x-x_0)g(x)+2x-3$. (1)

Αφού f συνεχής στο x_0, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \\ &= \lim_{x\to x_0}[(x-x_0)g(x)+2x-3] \\ &= \lim_{x\to x_0}(x-x_0)g(x)+\lim_{x\to x_0}(2x-3) \\ &= 2x_0-3. \end{aligned}$$

Άρα $f(x_0)=2x_0-3$ (2)

Η (ε) για $x=x_0$, δίνει $y=2x_0-3$ (3)

Άρα η C_f και η (ε) τέμνονται στο $A(x_o,f(x_o))$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)g(x)+2x-3-2x_0+3}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}(g(x)+2) \\ &= 2 \\ &= \lambda_\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα η (ε) εφάπτεται στην C_f στο $A(x_o,f(x_o))$.

17. Οικονομικό ($4^η$ δέσμη) 1983: Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(x_o-\varepsilon,x_o+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της f στο σημείο x_o,

ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σε ένα σημείο $M(x_o,f(x_o))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο y=f(x), όταν $f'(x_o)\in$ IR,

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης στο σημείο M(1,1) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο $y=x^3$.

Λύση: Τα **(i)** και **(ii)** είναι θεωρία σχ. βιβλίου.

iii) Θέτω $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$

$f'(1)=3$, $f(1)=1$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-1=3(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=3x-2$.

18. ΕΜΕ: Να δείξετε ότι η συνάρτηση f: IR→IR με $f(x)=|x-1|+2$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Λύση: $f(x)=\begin{cases} x+1, & \alpha\nu\ x\ge 1 \\ -x+3, & \alpha\nu\ x<1 \end{cases}$.

f(1)=1+1=2.

Βρίσκουμε πλευρικές παραγώγους:

• $\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x+3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x+1}{x-1}=-1$.

• $\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1$.

Επειδή $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0=1$.

19. Oxford I.P. 1990:

A. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β). Υποθέτουμε ότι $x_o\in(\alpha,\beta)$. Θεωρούμε και την συνάρτηση φ με τύπο:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in(\alpha,x_o) \\ g(x), & \text{αν } x\in[x_o,\beta) \end{cases}.$$

i) Αν $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$, να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o,

ii) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, τότε $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$,

B. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(x)=\begin{cases} \alpha(x+1), & \text{αν } x\in(-3,0) \\ 2e^{\beta x}, & \text{αν } x\in[0,4) \end{cases}$, να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση: **A i)** • $\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=$

$=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$

$=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$..........(1)

• $\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

$=g'(x_0)$.......................(2)

Επειδή $f'(x_o)=g'(x_o)$, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$\lim_{x\to x_0^-}\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=$

$=f'(x_0)=g'(x_0)$

Άρα $\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=g'(x_0)$

$\Leftrightarrow \varphi'(x_0)=f'(x_0)=g'(x_0)$.

A ii) • Αφού η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι και συνεχής x_0.

Άρα $\lim_{x\to x_0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0^+}\varphi(x)=\varphi(x_0)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} g(x)=\varphi(x_0)$

και επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, θα είναι και συνεχείς στο x_0. Άρα:

$f(x_0)=g(x_0)=\varphi(x_0)$. (3)

• Αφού η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα είναι $\lim_{x\to x_0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$

$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\Leftrightarrow f'_\alpha(x_0)=g'_\delta(x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$

γιατί οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

B. Θέτω $f(x)=\alpha(x+1)$, $x\in(-3,4)$ και $g(x)=2e^{\beta x}$, $x\in(-3,4)$. Σύμφωνα με το (Α) ερώτημα της άσκησης, η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0, αν και μόνο αν $\begin{cases}\mathbf{f(0)=g(0)}\\ \mathbf{f'(0)=g'(0)}\end{cases} \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{\alpha=2}\\ \boldsymbol{\beta=1}\end{cases}$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta, & \text{αν } x\in(-\infty,1]\\ \sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

Να προσδιοριστούν οι α, β∈R , ώστε να υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο 1.

Λύση: Θέλουμε δυο εξισώσεις γιατί δυο και οι άγνωστοι.

• Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από την συνέχεια γιατί η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα και συνεχής στο 1.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow$$

…⇔ α+β=1 (1)

• Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την παραγωγισιμότητα στο 1:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2+3}-(\alpha+\beta+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-(\alpha+\beta+1)}{x-1}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-2}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\beta=1-\alpha}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to1^+}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+\alpha x+1-\alpha-2}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+\alpha x-\alpha-1}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x^2-1)+(\alpha x-\alpha)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)+\alpha(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1+\alpha)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\alpha+2$$

$$\Leftrightarrow\alpha=-\frac{3}{2}.$$

$$(1)\Rightarrow\beta=\frac{5}{2}.$$

21. i) Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ,\text{αν } x\le2\\ \alpha x+\beta & ,\text{αν } x>2\end{cases}.$$

Να βρεθούν τα α,β∈IR , ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο 2,

ii) Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda|x|+\mu}$, λ, μ∈IR , να είναι παραγωγίσιμη στο x=0.

Λύση: **i)** • Η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα και συνεχής στο 2.

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)$$

⇔ … ⇔ 2α+β=4 (1)

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to2^+}\frac{\alpha x+\beta-4}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{x-2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to2^+}\frac{\alpha x-2\alpha}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\Leftrightarrow$$

⇔ α=4.

(1) ⇒ β=-4.

ii) $f(x)=\begin{cases}e^{\lambda x+\mu} & ,\text{αν } x\ge0\\ e^{-\lambda x+\mu} & ,\text{αν } x\le0\end{cases}.$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\lambda x+\mu}-e^{\mu}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\lambda x+\mu}-e^{\mu}}{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\lambda x}-1}{x}=e^{\mu}\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\lambda x}-1}{x}$$

$$\overset{DLH\ \left(\frac{0}{0}\right)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{\lambda x}-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{-\lambda x}-1)'}{(x)'}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to0^+}(\lambda e^{\lambda x})=\lim_{x\to0^-}(-\lambda e^{-\lambda x})$$

⇔ λ=-λ

⇔ λ=0.

22. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}1 & ,\text{αν } x\in(-\infty\ 0]\\ 1+\ln\frac{1+x}{1-x} & ,\text{αν } x\in(0,1)\end{cases}}.$$

i) Να δείξετε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο 0,

ii) Να λυθεί η εξίσωση f΄(x)=0 στο (0,1).

Λύση: **i)** $f'_\alpha(0)=1$.

$$\mathbf{f'_\delta(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}}$$

$$\mathbf{=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}}$$

$$\mathbf{\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'}{(x)'}=\cdots}$$

$$\mathbf{=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{(1+x)(1-x)}=2.}$$

Επειδή $1=f'_\alpha(0)\neq f'_\delta(0)=2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ii) f΄(x)=0 ⇔ **…** ⇔ $\boldsymbol{\frac{2}{(1+x)(1-x)}=0}$, αδύνατη.

23. Θεωρούμε την συνάρτηση f:Δ→IR , γνήσια μονότονη στο διάστημα Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o∈Δ, $f'(x_o)\neq0$ και f^{-1}:f(Δ)→ IR η αντίστροφή της συνεχής, τότε και η f^{-1} παραγωγίζεται στο $y_o=f(x_o)$ και ισχύει $(f^{-1})'(y_o)=\frac{1}{f'(x_o)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$.

Λύση: Αφού η f είναι μονότονη, αντιστρέφεται.

$$\mathbf{f^{-1}(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}}$$

$$\mathbf{=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}}$$

$$\mathbf{=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$
$$=\frac{1}{f'(x_0)}$$
$$=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

$(*)$ *Σημείωση* : Θέτω $x=f^{-1}(y)$. Τότε $y=f(x)$, $y_0=f(x_0)$ και $\lim\limits_{y\to y_0} x=\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)=x_0$ γιατί f^{-1} συνεχής και '1-1' επειδή είναι μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

24. Θεωρούμε την συνάρτηση f: IR →IR , με f(1)=e και f(x+y)=f(x)f(y), για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι:

i) f(x) > 0, για κάθε x∈IR,

ii) f(0)=1,

iii) Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, τότε είναι συνεχής και στο IR,

iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, τότε είναι παραγωγίσιμη και στο IR.

Λύση: **i)** $\mathbf{f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)=f^{\,2}\left(\frac{x}{2}\right)\geq 0}.$

Εάν υπάρχει x_0 με $f(x_0)=0$, τότε

$f(1)=f(x_0+1-x_0)$

$= f(x_0)\cdot f(1-x_0)$

$= 0\cdot f(1-x_0)$

$=0$, άτοπο, γιατί f(1)=e.

Άρα f(x)≠0, ∀x∈R.

Επομένως f(x)>0 ∀x∈R.

ii) Η δοθείσα για y=0 δίνει

$$f(x)=f(0)f(x)\overset{f(x)\neq 0}{\Rightarrow} f(0)=1.$$

iii) $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f\big((x-x_0)+x_0\big)=}$

$\mathbf{=\lim\limits_{x\to x_0} f(x-x_0)f(x_0)=}$

$\mathbf{=f(x_0)\lim\limits_{x\to x_0} f(x-x_0)=}$

$\mathbf{=f(x_0)\lim\limits_{x-x_0\to 0} f(x-x_0)\overset{\substack{u=x-x_0\\ \text{Θέτω}}}{=}}$

$\mathbf{=f(x_0)\lim\limits_{u\to 0} f(u)\overset{\substack{\text{στο }0\\ f\text{ συνεχης}}}{=}}$

$\mathbf{=f(x_0)f(0)\overset{(ii)}{=}f(x_0)\cdot 1=f(x_0).}$

iv) $\mathbf{f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=}$

$\mathbf{=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=}$

$\mathbf{=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)(f(h)-1)}{h}=}$

$\mathbf{=f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=}$

$\mathbf{=f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=}$

$\mathbf{=f(x_0)f'(0).}$

Άρα f΄(x)=f(x)f΄(0), για κάθε x∈IR.

25.24756-2: Έστω συνάρτηση $\boldsymbol{f}$: IR → IR με f(0)=0 και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2.$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}}$. (Μονάδες 8)

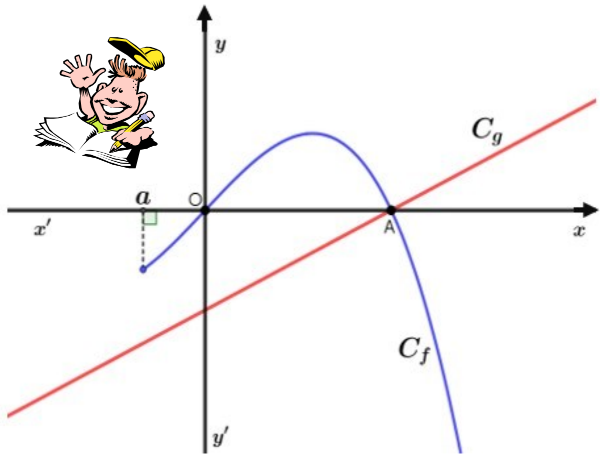
Λύση:

α) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2.$

β) Αφού η είναι παραγωγίσιμη στο 0 θα είναι και συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ =f(0) = 0.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{ημx}{x}}=\frac{2}{1}=2.$

26.25234-2: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[α,+\infty)\to$ IR και την συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, x∈ IR. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A.

α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}}$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι g(1)=0 και g(x) < 0 για x κοντά στο 1 από αριστερά, ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$=g(1)=0, καθώς η g είναι συνεχής στο 1 ως πολυωνυμική.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)}\overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=}-\infty.$

Εναλλακτικά, $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)}=2\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x<1\\ x-1<0}}\frac{1}{x-1}=2\cdot(-\infty)=-\infty.$

β) Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$

γ) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$=f(0)=0 και f(x) < 0 για x κοντά στο μηδέν από αριστερά (σχήμα).

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$ οπότε g(x) < 0 για x κοντά στο μηδέν από αριστερά.

Επομένως $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$ για x κοντά στο μηδέν από αριστερά, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)} \underset{\frac{g(x)}{f(x)}>0}{\overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=}} +\infty$.

27. 27315-2: Δίνεται η συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{x^2-4}}{\boldsymbol{x-2}}, & \text{αν } x < \mathbf{2} \\ \quad \boldsymbol{και} & \\ \boldsymbol{\alpha x^2 - 4}, & \text{αν } x \geq \mathbf{2} \end{cases} \quad \text{με } \alpha \in \text{IR}.$$

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο x_0 =2, δηλαδή τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0 =2.

Μονάδες 7

γ) Αν α = 2, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f. Μονάδες 6

Λύση:

α) $\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\boldsymbol{x^2-4}}{\boldsymbol{x-2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\boldsymbol{(x-2)(x+2)}}{\boldsymbol{x-2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-}(\boldsymbol{x+2}) = 4.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(\boldsymbol{\alpha x^2 - 4})$

$= 4\alpha - 4.$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 =2 αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ = f(2)

$\Leftrightarrow 4\alpha - 4 = 4$

$\Leftrightarrow 4\alpha = 8$

$\Leftrightarrow \alpha = 2.$

γ) Για α = 2 η συνάρτηση f γίνεται

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ \quad και & \\ 2x^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

♦ <u>Στο διάστημα</u> (-∞,2) η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με f '(x) = $\left(\frac{\boldsymbol{x^2-4}}{\boldsymbol{x-2}}\right)'$ = (x+2)' = 1.

♦ <u>Στο διάστημα</u> (2,+∞) η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με f '(x) = $(2x^2 - 4)'$ = 4x.

♦ <u>Στο x_0 = 2</u>:

• $\lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\frac{x^2-4}{x-2} - 4}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)^2}}{\cancel{(x-2)^2}} = 1.$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x^2-4-4}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2(x^2-4)}{x-2}$

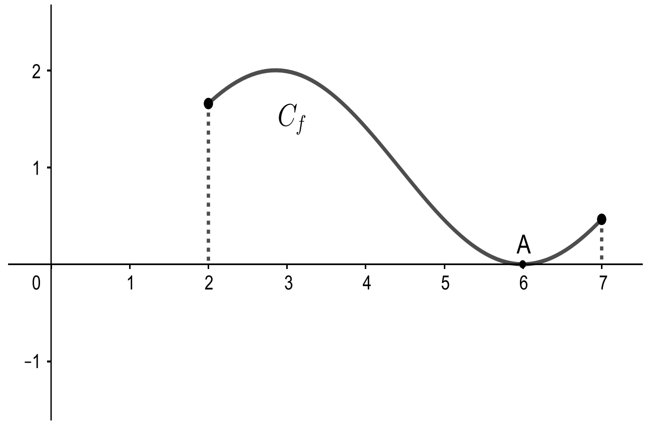
$= \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$

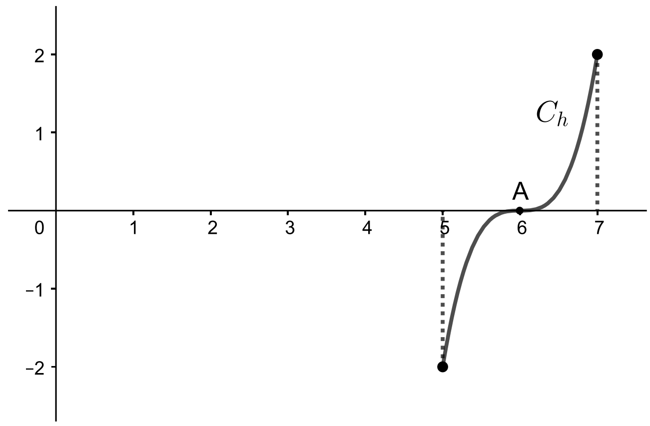
$= \lim\limits_{x\to 2^+} 2(x+2) = 8.$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=2.

Άρα $f'(x) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x < 2 \\ 4x, & \alpha\nu\ x > 2 \end{cases}$.

28. 36840 ΘΕΜΑ 2: Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του Α(6,0). Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h. Μονάδες 6

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}$ Μονάδες 7

ii. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{h(x)}$ Μονάδες 7

iii. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6}$ Μονάδες 5

Λύση:

α) Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f και της C_h αντίστοιχα, αποτελεί το πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτησης. Από τις γραφικές παραστάσεις του σχήματος παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $[2,7]$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το διάστημα $[5,7]$.

β) Παρατηρούμε ότι και οι 2 γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ το σημείο $A(6,0)$, οπότε ισχύει $f(6) = h(6) = 0$.

i. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = f(6) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο 6, αφού η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και βρίσκεται πάνω από αυτόν κοντά στο 6.

ii. Το $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{h(x)}$ δεν υπάρχει, γιατί

$\lim\limits_{x\to 6} h(x) = h(6) = 0$, αφού η C_h εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}(6,0)$.

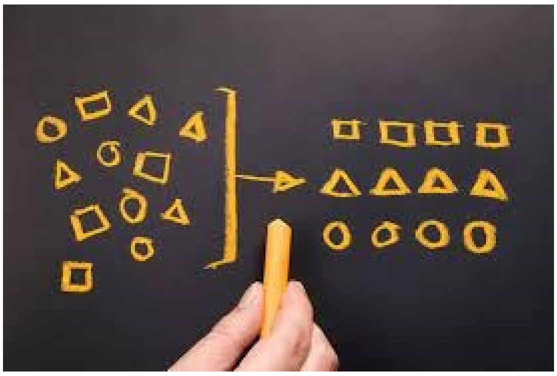
Είναι $h(x) < 0$ για $x < 6$. Άρα $\lim\limits_{x\to 6^-}\frac{1}{h(x)} = -\infty$.

Ενώ $h(x) > 0$ για $x > 6$. Άρα $\lim\limits_{x\to 6^+}\frac{1}{h(x)} = +\infty$.

iii. Για το $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6}$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-0}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6} = f'(6)$, αφού η f από την υπόθεση είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο $x_0 = 6$.

Όμως, από την υπόθεση, η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο της $A(6,0)$, τον άξονα $x'x$. Οπότε, η παράγωγος της στο σημείο αυτό, δηλαδή το $f'(6)$, θα ισούται με 0. Άρα, τελικά $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6} = 0$.



29. END.