ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

1ον ΚΥΚΛΟΣ

1) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που έχει διάμετρο ΑΒ με Α(5,-1), Β(-3,7).

Λύση: Ο ζητούμενος κύκλος έχει ακτίνα ρ= $\frac{(AB)}{2}=\frac{\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}}{2}=\frac{\sqrt{(5+3)^2+(-1-7)^2}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{2\cdot 64}}{2}=4\sqrt{2}$ και κέντρο $K\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=K\left(\frac{5-3}{2},\frac{-1+7}{2}\right)$=K(1,3).

Άρα έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y-3)^2=32$ ή $x^2+y^2-2x-6y-22=0$.

2) Να βρεθεί η εξίσωση της περιφέρειας με κέντρο Κ(2,4) και εφάπτεται της ευθείας (ε): 3x+4y-12=0.

Λύση: Ο ζητούμενος κύκλος έχει ακτίνα ρ= $d(K,\varepsilon)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$.

Άρα έχει εξίσωση $(x-2)^2+(y-4)^2=4$ ή $x^2+y^2-4x-8y+16=0$.

3) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου (c) που διέρχεται από τα σημεία Α(0,1), Β(0,6) και Γ(3,0).

Λύση: Έστω $x^2+y^2+Ax+By+Γ=0$ (1), η ζητούμενη εξίσωση.

Α∈(c) ⇔ 1+Β+Γ=0 ..... (2)

Β∈(c) ⇔ 36+6Β+Γ=0 ..... (3)

Γ∈(c) ⇔ 9+3Α+Γ=0..... (4)

Λύνουμε το σύστημα των (2), (3) και (4):

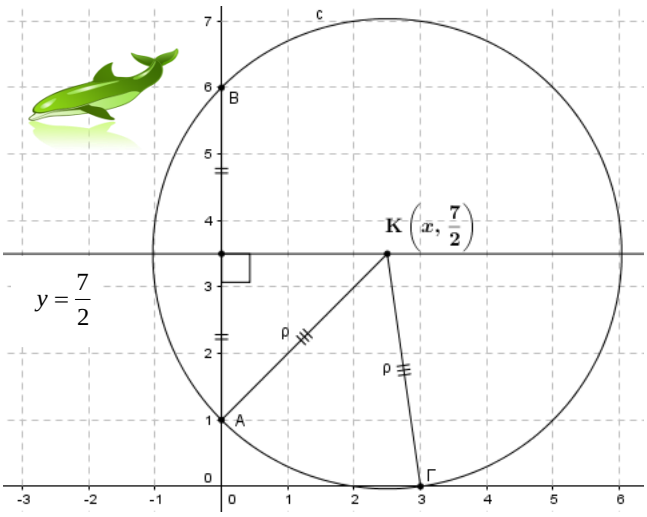
(3)-(2) ⇔ 35+5Β=0 ⇔ Β=-7

Η (2) για Β=-7 δίνει Γ=6

Η (4) για Γ=6 δίνει Α=-5.

Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση:

$x^2+y^2-5x-7y+6=0$.



2ος τρόπος: Από το διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι το κέντρο Κ του ζητούμενου κύκλου βρίσκεται στην μεσοκάθετο ευθεία $y=\frac{7}{2}$ του τμήματος ΑΒ.

Άρα $K\left(x,\frac{7}{2}\right)$.

(ΚΑ)=(ΚΓ) ⇔ $(KA)^2=(KΓ)^2$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(\frac{7}{2}-1\right)^2=(x-3)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

Άρα $K\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ και $ρ^2=(KA)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}-1\right)^2=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=\frac{25}{2}$

και ο κύκλος έχει εξίσωση $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ ⇔ … ⇔ $x^2+y^2-5x-7y+6=0$.

4) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που είναι περιγεγραμμένος στο τρίγωνο:
i) με κορυφές Α(1,7), Β(8,6) και Γ(7,1),
ii) με εξισώσεις πλευρών x+y=2, y=2x-1 και x-3y=3.

Λύση:

i) Επειδή τα σημεία Α(1,7) και Γ(7,1) είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο 1ου – 3ου τεταρτημορίου y=x, το κέντρο του κύκλου είναι σημείο αυτής.
Έστω Κ(x,x) το κέντρο.

(ΚΑ)=(ΚΒ) ⇔ $(KA)^2=(KB)^2$ ⇔ $(x-1)^2+(x-7)^2=(x-8)^2+(x-6)^2$ ⇔ … ⇔ $x=\frac{25}{6}$.

Άρα $K\left(\frac{25}{6},\frac{25}{6}\right)$ και $\rho^2=(KA)^2=\left(\frac{25}{6}-1\right)^2+\left(\frac{25}{6}-1\right)^2=\frac{650}{36}$

και ο κύκλος έχει εξίσωση $\left(x-\frac{25}{6}\right)^2+\left(y-\frac{25}{6}\right)^2=\frac{650}{36}\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3(x^2+y^2)-25x-25y+50=0.$

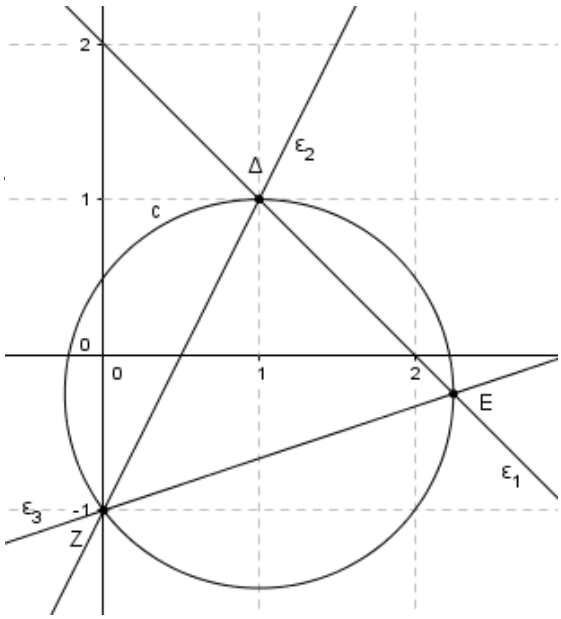
ii) Έστω (ε_1): x+y=2
(ε_2): y=2x-1
(ε_3): x-3y=3.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής τους (βλ. διπλανό σχήμα):

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1): x+y=2\\(\varepsilon_2): y=2x-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x+2x-1=2\\y=2x-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=1\\y=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \Delta(1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1): x+y=2\\(\varepsilon_3): x-3y=3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=\frac{9}{4}\\y=-\frac{1}{4}\end{array}\right\}\Leftrightarrow E\left(\frac{9}{4},-\frac{1}{4}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_3): x-3y=3\\(\varepsilon_2): y=2x-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=0\\y=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow Z(0,-1).$$



Έστω $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (1), η ζητούμενη εξίσωση.
$A\in(c) \Leftrightarrow 2+A+B+\Gamma=0$ ..... (2)
$B\in(c) \Leftrightarrow 82+36^A-4B+16\Gamma=0$ ..... (3)
$\Gamma\in(c) \Leftrightarrow 1-B+\Gamma=0$ ..... (4)
Λύνουμε το σύστημα των (2), (3) και (4):
(3)-(2) ⇔ 35+5B=0 ⇔ B=-7
Η (4) ⇔ B=Γ+1 ..... (5)

$$\left.\begin{array}{l}(3)\overset{(5)}{\Leftrightarrow} 6A+2\Gamma=-13\\(2)\overset{(5)}{\Leftrightarrow} A+2\Gamma=-3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-2\\\Gamma=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Η (2) για $\Gamma=-\frac{1}{2}$ και A=-2 δίνει $B=\frac{1}{2}$.

Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση:

$x^2+y^2-2x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$ ή $2(x^2+y^2)-4x+y-1=0$.

5) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A(0,-3), B(4,0) και έχει το κέντρο της στην ευθεία (ε): x+2y=0.

Λύση: Έστω K(x,y) το κέντρο του κύκλου.
Επειδή $K\in(\varepsilon) \Leftrightarrow x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y \Leftrightarrow K(-2y,y)$

$(KA)=(KB) \Leftrightarrow (KA)^2=(KB)^2 \Leftrightarrow 4y^2+(y+3)^2=(4+2y)^2+y^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=-\frac{7}{10}.$

Άρα $K\left(\frac{14}{10},-\frac{7}{10}\right)$ και $\rho^2=(KA)^2=\left(\frac{14}{10}\right)^2+\left(3-\frac{7}{10}\right)^2=\frac{725}{100}$

και ο κύκλος έχει εξίσωση $\left(x-\frac{14}{10}\right)^2+\left(y+\frac{7}{10}\right)^2=\frac{725}{100}\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 5(x^2+y^2)-14x+7y-24=0.$

6) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία x+y=0 και διέρχεται από τα σημεία τομής των περιφερειών:
(c_1): $(x-1)^2+(y+5)^2=50$ και
(c_2): $(x+1)^2+(y+1)^2=10$.

Λύση: Έστω K(x,-x) το κέντρο του κύκλου (?).
Λύνουμε το σύστημα των (c_1) και (c_2) για να βρούμε τα σημεία τομής τους A και B:
$(x-1)^2+(y+5)^2=50$ ..... (1)
$(x+1)^2+(y+1)^2=10$ ..... (2)

(1)-(2) ⇔ … ⇔ x=2y-4 ..... (3)

$(1)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$ $(2y-5)^2+(y+5)^2=50$ ⇔ … ⇔ $5y^2-10y=0$ ⇔ y=0 ή y=2.

Για y=0 η (3) δίνει x=-4, άρα A(-4,0).

Για y=2 η (3) δίνει x=0, άρα B(0,2).

(KA)=(KB) ⇔ $(KA)^2=(KB)^2$ ⇔ $(x+4)^2+x^2=x^2+(x+2)^2$ ⇔ … ⇔ x=-3.

Άρα K(-3,3) και $\rho^2=(KA)^2=(-4+3)^2+(0-3)^2=10$

και ο κύκλος έχει εξίσωση $(x+3)^2+(y-3)^2=10$ ⇔ … ⇔ $x^2+y^2+6x-6y+8=0$.

7) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο A(1,-1) και από τα σημεία τομής των περιφερειών:
(c_1): $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ και
(c_2): $x^2+y^2-6x+12y-35=0$.

Λύση: Λύνουμε το σύστημα των (c_1) και (c_2) για να βρούμε τα σημεία τομής τους Β και Γ:

$x^2+y^2+2x-2y-23=0$ ..... (1)

$x^2+y^2-6x+12y-35=0$ ..... (2)

(1)-(2) ⇔ … ⇔ $x=\frac{7}{4}y-\frac{3}{2}$ ..... (3)

$(1)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$ … ⇔ $13y^2-12y-76=0$.

$\Delta=4.096$ και $y_1=-2$, $y_2=\frac{38}{13}$.

Για $y_1=-2$ η (3) δίνει $x_1=-5$, άρα B(-5,-2).

Για $y_2=\frac{38}{13}$ η (3) δίνει $x_2=\frac{47}{13}$, άρα $\Gamma\left(\frac{47}{13},\frac{38}{13}\right)$.

Έστω c: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ ο ζητούμενος κύκλος.

$A\in c$ ⇔ $(1-x_0)^2+(1+y_0)^2=\rho^2$ ..... (4)

$B\in c$ ⇔ $(5+x_0)^2+(2+y_0)^2=\rho^2$ ..... (5)

$\Gamma\in c$ ⇔ $\left(\frac{47}{13}-x_0\right)^2+\left(\frac{38}{13}-y_0\right)^2=\rho^2$ ..... (6)

☛Απαλείφουμε το ρ από τις σχέσεις (4), (5) και (6):

(4)-(5) ⇔ … ⇔ $12x_0+2y_0+27=0$..... (7)

(4)-(6) ⇔ … ⇔ $68x_0+102y_0-255=0$..... (8)

☛Λύνουμε το σύστημα των (7) και (8):

$$\begin{cases}12x_0+2y_0+27=0\\68x_0+102y_0-255=0\end{cases}\cdot(-51) \Leftrightarrow \begin{cases}-612x_0-102y_0-1377=0\\68x_0+102y_0-255=0\end{cases}(+)$$

$-544x_0-1632=0$ ⇔ $x_0=-3$.

Η (7) για $x_0=-3$ δίνει $y_0=\frac{9}{2}$.

Η (4) για $x_0=-3$ και $y_0=\frac{9}{2}$ δίνει $\rho^2=\frac{185}{4}$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(x+3)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{185}{4}$.

8) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων που άγονται από την αρχή Ο του συστήματος συν/νων στην περιφέρεια $x^2+y^2-6x-2y+\frac{81}{37}=0$.

Λύση: Έστω (ε): y=αx η εξίσωση της εφαπτομένης. Επειδή η (ε) εφάπτεται της περιφέρειας c, το σύστημα $\begin{cases}x^2+y^2-6x-2y+\frac{81}{37}=0\\y=ax\end{cases}$ (1) πρέπει να έχει μοναδική λύση.

$x^2+y^2-6x-2y+\frac{81}{37}=0 \Leftrightarrow x^2+\alpha^2x^2-6x-2\alpha x+\frac{81}{37}=0 \Leftrightarrow (1+\alpha^2)x^2-(6+2\alpha)x+\frac{81}{37}=0$ ..... (2)

Η (2) είναι 2ου βαθμού ως προς x και για να έχει μοναδική λύση, πρέπει Δ=0 ⇔

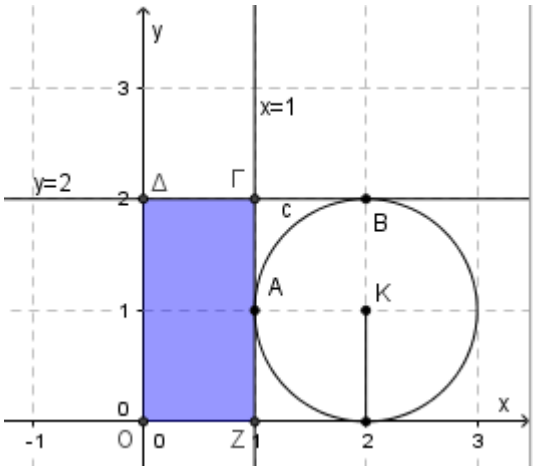
$(6+2\alpha)^2-4(1+\alpha^2)\frac{81}{37}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -176\alpha^2+888\alpha+1.008=0.$

$\Delta'=1.498.176$ και $\alpha=6$ ή $\alpha=-\frac{21}{22}$.

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις $y=6x$ και $y=-\frac{21}{22}x$.

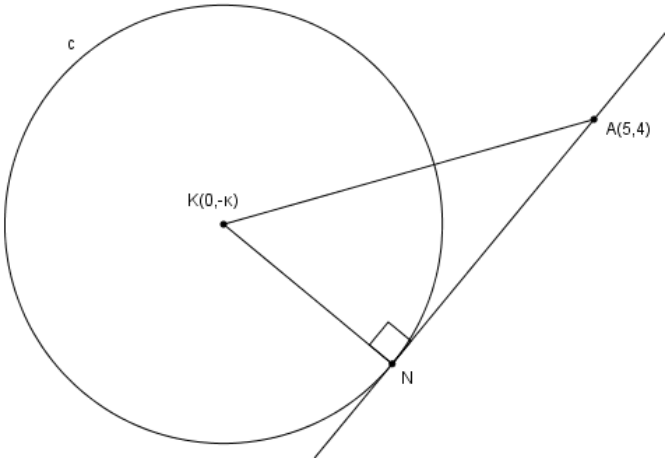
9) Να δείξετε ότι η περιφέρεια $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ εφάπτεται στον άξονα x΄Ox. Μετά να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτής στα σημεία (1,1) και (2,2) και το εμβαδόν του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από αυτές και τους άξονες.

Λύση: $x^2+y^2-4x-2y+4=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1$.
Άρα ο κύκλος έχει κέντρο K(2,1) και ρ=1.
Προφανώς εφάπτεται του άξονα xx΄, αφού $d(K,xx')=|y_K|=1=\rho$ (βλέπε διπλανό σχήμα).
Τα σημεία A(1,1) και B(2,2) είναι σημεία του κύκλου και επειδή $y_A=y_K=1$, η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση x=1.
Ομοίως επειδή $x_B=x_K=2$, η εφαπτομένη στο B έχει εξίσωση y=2.
Οι εφαπτόμενες σχηματίζουν με τους άξονες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΓΔΟΖ εμβαδού (ΓΔΟΖ)=(ΟΔ)·(ΟΖ)=2.



10) Να βρείτε το κ∈R, ώστε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο A(5,4) προς την περιφέρεια $x^2+y^2+2\kappa y=0$ να είναι 1.

Λύση: $x^2+y^2+2\kappa y=0 \Leftrightarrow x^2+(y+\kappa)^2=\kappa^2$.
Άρα ο κύκλος έχει κέντρο K(0,-κ)και ακτίνα ρ=|κ|.
Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τρίγωνο AKN, όπου N το σημείο επαφής (διπλανό σχήμα):
$(AK)^2=(KN)^2+(AN)^2 \Leftrightarrow 5^2+(\kappa+4)^2=|\kappa|^2+1$
$\Leftrightarrow \ldots$
$\Leftrightarrow \kappa=-5$.



11) Δείξτε ότι οι περιφέρειες (c_1): $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ και (c_2): $x^2+y^2+2x-6y+1=0$ εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συν/νες του σημείου επαφής A. Μετά να βρείτε την εξίσωση της περιφέρειας που εφάπτεται των παραπάνω περιφερειών στο A και διέρχεται από το σημείο B(3,2).

Λύση: $x^2+y^2-4x+2y+1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=2^2$ και $x^2+y^2+2x-6y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=3^2$. Άρα ο πρώτος κύκλος (c_1) έχει κέντρο K(2,-1) και ακτίνα $R_1=2$ και ο (c_2) έχει κέντρο Λ(-1,3) και ακτίνα $R_2=3$.

$(K\Lambda)=\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2}=5=2+3=R_1+R_2$.

Επομένως οι περιφέρειες εφάπτονται εξωτερικά.
Για να βρούμε το σημείο τομής τους λύνουμε το σύστημά τους:

$(c_1)-(c_2) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}y$ ..... (1)

$(c_1)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ldots \Leftrightarrow 25y^2-30y+9=0$
$\Leftrightarrow (5y-3)^2=0$
$\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}$.

Η (1) για $y=\frac{3}{5}$ δίνει $x=\frac{4}{5}$. Άρα το σημείο τομής είναι $A\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει προφανώς το κέντρο του M(x,y) στην ευθεία KΛ: 4x+3y-5=0 (2) (γιατί ?) και (MA)=(MB) ⇔ $(MA)^2=(MB)^2$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=(x-3)^2+(y-2)^2$$

$\Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow$ 11x+7y-30=0 .....(3)

Οι συντεταγμένες του Μ είναι η λύση του συστήματος των (2) και (3):

$$\begin{cases}4x+3y-5=0\\11x+7y-30=0\end{cases}\begin{matrix}\cdot 7\\ \cdot(-3)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}28x+21y-35=0\\-33x-21y-90=0\end{cases}+$$

-5x+55=0 $\Leftrightarrow$ x=11

$(2)\overset{x=11}{\Leftrightarrow}$ y=-13. Άρα Μ(11,-13)

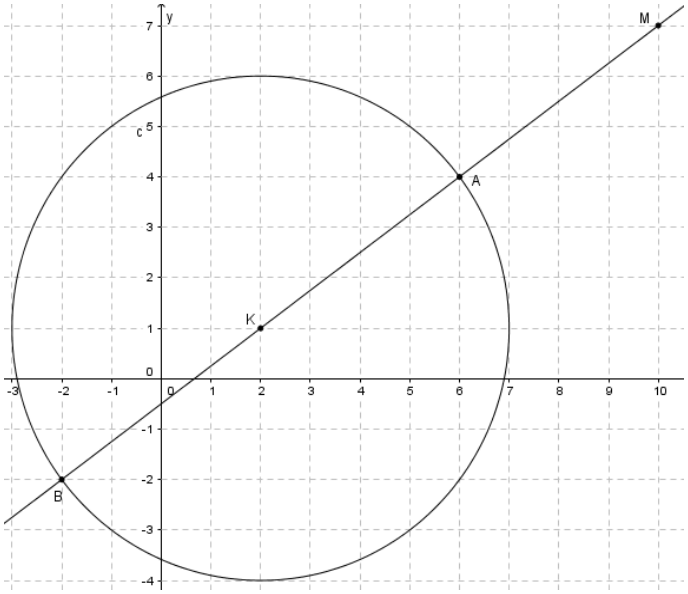
$\rho^2=(MB)^2=(11-3)^2+(-13-2)^2=289$.

Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $(x-11)^2+(y+13)^2=289$ $\Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2-22x+26y+1=0$.

12) Να βρεθεί η μεγαλύτερη και η μικρότερη απόσταση του σημείου Μ(10,7) από την περιφέρεια $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

Λύση: $x^2+y^2-4x-2y-20=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=5^2$ άρα έχει κέντρο Κ(2,1) και ακτίνα ρ=5 (διπλα-νό σχήμα).

Εάν η διάκεντρος ΜΚ τέμνει την περιφέρεια στα Α και Β (σχήμα), τότε η ελάχιστη απόσταση d_{min} του σημείου Μ από την περι-φέρεια είναι η απόσταση (ΜΑ) και η μέγιστη απόσταση d_{max} είναι η (ΜΒ).



$(MK)=\sqrt{(10-2)^2+(7-1)^2}=10$.

d_{min} = (ΜΚ)-ρ=10-5=5.

d_{max} = (ΜΚ)+ρ=10+5=15.

13) Έστω α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τον γ.τ. του σημείου τομής των ευθειών (ε_1): χσυνθ+ημθ=α και (ε_2): χημθ-ψσυνθ=β, όταν το θ μεταβάλλεται.

Λύση: Το σημείο τομής είναι η λύση του συστήματος των (ε_1) και (ε_2). Απαλείφουμε από αυτές το θ, λύνοντας ως προς ημθ και συνθ:

$$\begin{cases}x\sigma\upsilon\nu\theta+y\eta\mu\theta=\alpha\\-y\sigma\upsilon\nu\theta+x\eta\mu\theta=\beta\end{cases}$$

$D=\begin{vmatrix}x & y\\-y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2$.

$D_{\sigma\upsilon\nu\theta}=\begin{vmatrix}\alpha & y\\\beta & x\end{vmatrix}=\alpha x-\beta y$.

$D_{\eta\mu\theta}=\begin{vmatrix}x & \alpha\\-y & \beta\end{vmatrix}=\beta x+\alpha y$.

$\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{D_{\sigma\upsilon\nu\theta}}{D}=\dfrac{\alpha x-\beta y}{x^2+y^2}$. ..... (1)

$\eta\mu\theta=\dfrac{D_{\eta\mu\theta}}{D}=\dfrac{\beta x+\alpha y}{x^2+y^2}$. ..... (2)

$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1 \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \left(\dfrac{\alpha x-\beta y}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\dfrac{\beta x+\alpha y}{x^2+y^2}\right)^2=1 \Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow x^2+y^2=\alpha^2+\beta^2$ (?).

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

14) Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των περιφερειών $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+4=0$, εάν ξέρουμε ένα εξ' αυτών, το (6,2) και ότι ο γ.τ. είναι πάνω σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο.

Λύση: $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+4=0 \Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-4$.

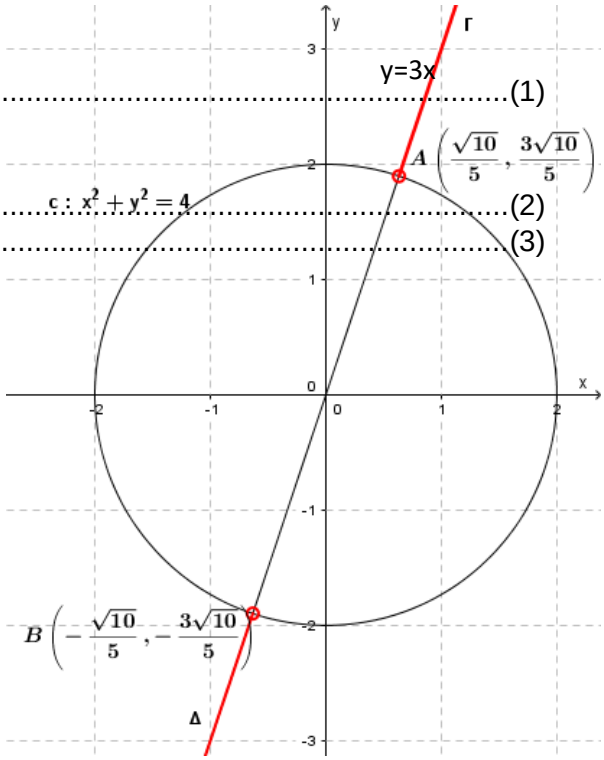
Άρα ο κύκλος έχει κέντρο Κ(α,β) και ακτίνα ρ= $=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4}$, με $\alpha^2+\beta^2-4>0$.....(1)

Εάν x=α και y=β, και (ε): y=λx ο ζητούμενος γ.τ., επειδή (6,2)∈(ε) ⇔ λ=3.

Άρα y=3x. .....(2)

Η (1) ⇔ $x^2+y^2-4>0$ .....(3)

Ο γ.τ. είναι το τμήμα της ευθείας y=3x που είναι εκτός του κύκλου $x^2+y^2-4=0$ (ημιευθείες ΑΓ και ΒΔ στο διπλανό σχήμα?).



15) Στο επίπεδο θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy και σημείο Α τέτοιο ώστε $\left|\overrightarrow{OA}\right|=3$. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, τέτοια ώστε $\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=7$.

Λύση: $\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=7$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM})(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{OA})=7$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM})(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{OA})=7$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=7$ και επειδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|=3$, θα έχουμε $\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=16 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|=4$.

Ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ρ=4.

16) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας υπό την οποία φαίνεται ο κύκλος κέντρου Κ(4,5) και ρ=1, από την αρχή Ο του συστήματος συν/νων.

Λύση: Εάν (ε_1): $y=\lambda_1 x$ η εξίσωση της εφαπτομένης(ε_1) και (ε_2): $y=\lambda_2 x$ η εξίσωση της εφαπτομένης(ε_2), το σύστημα $\begin{cases}(x-4)^2+(y-5)^2=1\\ y=\lambda_i x\end{cases}(\Sigma)$, i=1, 2 πρέπει να έχει μοναδική λύση.

$(x-4)^2+(\lambda_i x-5)^2=1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\lambda_i^2+1)x^2-2(4+5\lambda_i)x+40=0$…(1)

Η (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και για να έχει μοναδική λύση πρέπει Δ=0

$\Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma=0$

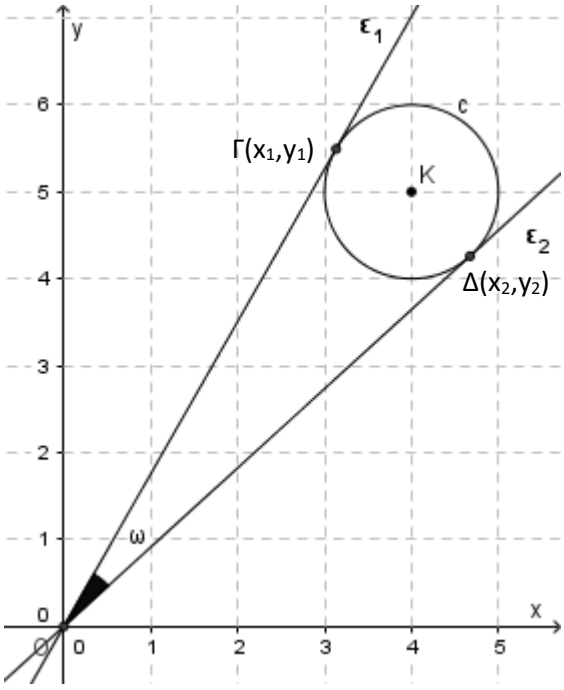
$\Leftrightarrow 4(4+5\lambda_i)^2-160(\lambda_i^2+1)=0$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow 15\lambda_i^2-40\lambda_i+24=0$……..(2)

Οι λύσεις της (2)είναι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα (διπλανό σχήμα).

Οι λύσεις x_i , i=1, 2 της (1) είναι οι τετμημένες των σημείων επαφής Γ και Δ των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα με τον κύκλο (διπλανό σχήμα).



Δυο διανύσματα παράλληλα στις (ε_1) και (ε_2) είναι αντίστοιχα τα $\vec{u}=(x_1,y_1)$ και $\vec{v}=(x_2,y_2)$ και το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν είναι συνω= $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ ……..(διαιρούμε με x_1x_2)

$$=\frac{1+\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{y_2}{x_2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\cdot\sqrt{1+\lambda_2^2}}$$

$$= \frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\cdot\sqrt{1+\lambda_2^2}}$$

$$= \frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}}$$

$$= \frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_2^2}}$$

$$= \frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+(\lambda_1+\lambda_2)^2-2\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1\lambda_2)^2}}$$

$$\overset{Vieta}{=} \frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{\sqrt{1+\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha}+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2}}$$ …(αντικαθιστούμε από την (2))

$$= \frac{1+\frac{24}{15}}{\sqrt{1+\left(\frac{40}{15}\right)^2-2\frac{24}{15}+\left(\frac{24}{15}\right)^2}} = \ldots = \frac{39}{\sqrt{1.681}}.$$

17) Να ορίσετε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α(1,4) και με τον κύκλο (c): $(x-2)^2+(y-2)^2=10$ ορίζει χορδή ΒΓ που έχει μέσον το Α.

Λύση: Ο κύκλος έχει κέντρο Κ(2,2) και ακτίνα ρ= $\sqrt{10}$.

(ΚΑ)= $\sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2}$ =…= $\sqrt{5}<\sqrt{10}$ άρα το σημείο Α είναι εσωτερικό του κύκλου.

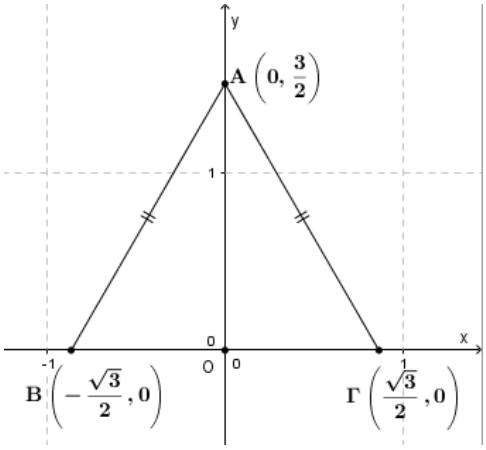
Η ζητούμενη ευθεία (ε) διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ΑΚ (γιατί ?).

$\lambda_{AK}=\frac{4-2}{1-2}=-2$ και επειδή ΑΚ⊥(ε) ⇔ $\lambda_{AK}\cdot\lambda_\varepsilon=-1$ ⇔ $\lambda_\varepsilon={}^1/_2$.

Άρα η (ε) έχει εξίσωση y-4= $\frac{1}{2}$ (x-1) ⇔…⇔ x-2y+7=0.

18) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α= $\sqrt{3}$. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, τέτοια ώστε $2\vec{MA}^2+\vec{MA}\cdot\vec{MB}+\vec{MA}\cdot\vec{M\Gamma}=\frac{9}{8}$.

Λύση: Θεωρούμε σύστημα συν/νων Οxy με άξονα xx΄ την ευθεία ΒΓ και άξονα yy΄ την ευθεία του ύψους ΑΟ.



Επειδή α= $\sqrt{3}$, το ύψος θα έχει μέτρο υ= $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$.

Επομένως οι κορυφές έχουν συν/νες $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ και $\Gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

Τότε $\vec{MA}=\left(-x,\frac{3}{2}-y\right)$, $\vec{M'B}=\left(-x-\frac{\sqrt{3}}{2},-y\right)$ και $\vec{M\Gamma}=\left(-x+\frac{\sqrt{3}}{2},-y\right)$

Η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$2\vec{MA}^2+\vec{MA}\cdot\vec{MB}+\vec{MA}\cdot\vec{M\Gamma}=\frac{9}{8}\Leftrightarrow\vec{MA}\left(2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}\right)=\frac{9}{8}$$

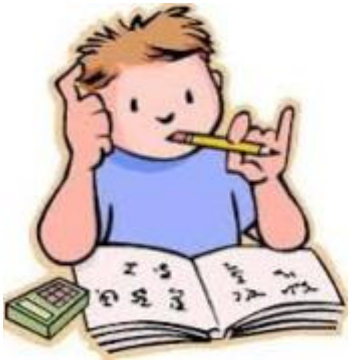
$$\Leftrightarrow \left(-x,\frac{3}{2}-y\right)\cdot(-4x,3-4y)=\frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+\left(\frac{3}{2}-y\right)\cdot(3-4y)=\frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+\frac{9}{2}-6y-3y+4y^2-\frac{9}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-9y+\frac{27}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{9}{4}y+\frac{27}{32}=0$$



Εξετάζουμε εάν η εξίσωση παριστάνει κύκλο:

A=0, B=$-\frac{9}{4}$ και Γ=$\frac{27}{32}$.

$A^2+B^2-4\Gamma=0^2+\left(-\frac{9}{4}\right)^2-4\frac{27}{32}$

$=\frac{81}{16}-\frac{27}{8}$

=…=$\frac{27}{16}$>0, άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι κύκλος κέντρου $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ ή $K\left(0,\frac{9}{8}\right)$ και ακτίνας

ρ=$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{16}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

19) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με Α=60^0 και πλευράς α.

a) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Delta})\vec{M\Gamma}=3\kappa^2$, όπου κ∈$R_+$,

b) να υπολογίσετε το κ, ώστε το σημείο Α να είναι σημείο του παραπάνω γ.τ.,

c) να δείξετε ότι υπάρχει σημείο Σ του επιπέδου, τέτοιο ώστε $\vec{\Sigma A}-2\vec{\Sigma B}+4\vec{\Sigma\Gamma}=\vec{0}$,

d) Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων Ρ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $\left|\vec{PA}-2\vec{PB}+4\vec{P\Gamma}\right|=3\left|\vec{P\Delta}\right|$.

Λύση:

a) Θεωρούμε σύστημα συν/νων όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Εξηγούμε τον τρόπο υπολογισμού των συντεταγμένων των κορυφών του:

Στον ρόμβο κάθε διαγώνιος διχοτομεί κάθε γωνία του.

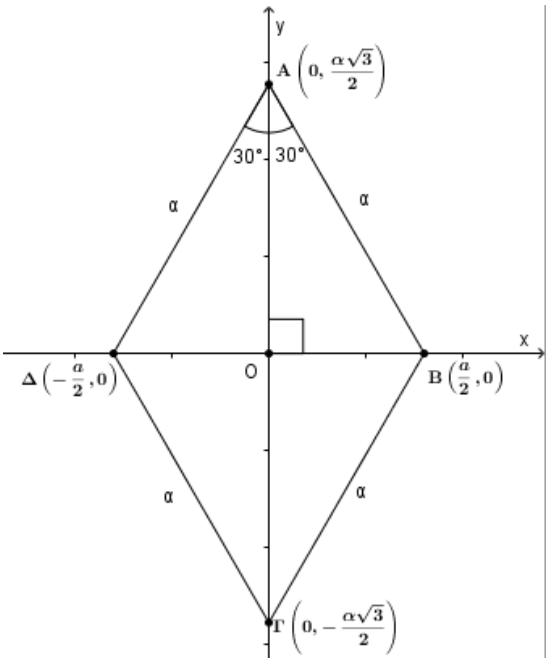
Άρα $O\hat{A}B=O\hat{A}\Delta=30^0$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ επειδή $O\hat{A}B=30^0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (OB)=\frac{(AB)}{2}=\frac{\alpha}{2}$ επομένως $B\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$.

Ομοίως στο τρίγωνο ΟΑΔ βρίσκουμε $\Delta\left(-\frac{\alpha}{2},0\right)$.

Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ έχει μια γωνία 60^0. Άρα είναι ισόπλευρο πλευράς α και (ΟΑ)=υ=$\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επομένως $A\left(0,\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)$. Ομοίως $\Gamma\left(0,-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)$.



$(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Delta})\vec{M\Gamma}=3\kappa^2\Leftrightarrow(\vec{MA}+2\vec{MO})\vec{M\Gamma}=3\kappa^2$

$$\Leftrightarrow \left(-3x, \frac{a\sqrt{3}}{2} - 3y\right) \cdot \left(-x, -\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right) = 3\kappa^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - 3y\right)\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2} - y\right) = 3\kappa^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + a\sqrt{3}y - \left(\frac{3a^2}{4} + 3\kappa^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{a\sqrt{3}}{3}y - \left(\frac{a^2}{4} + \kappa^2\right) = 0 .$$

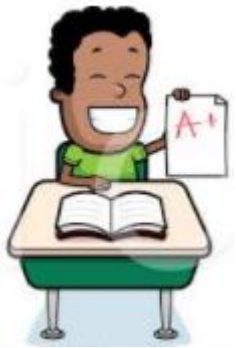
Εξετάζουμε εάν η εξίσωση παριστάνει κύκλο:

Α=0, Β=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$ και Γ=$-\left(\frac{a^2}{4} + \kappa^2\right)$.

$A^2+B^2-4\Gamma = 0^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{a^2}{4} + \kappa^2\right)$

$= \frac{4a^2}{3} + 4\kappa^2 > 0$, άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι κύκλος c κέντρου $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ή $K\left(0, -\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)$

και ακτίνας ρ=$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{3} + 4\kappa^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \kappa^2}$.



b) $A \in c \xLeftrightarrow[y=\frac{a\sqrt{3}}{2}]{x=0} 3\frac{3a^2}{4} + a\sqrt{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{3a^2}{4} - 3\kappa^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ $\kappa^2=\alpha^2$ και επειδή κ>0, κ=α.

c) Έστω Σ(x,y).

Τότε $\vec{\Sigma A} = \left(-x, \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - y\right)$, $\vec{\Sigma' B} = \left(\frac{\alpha}{2} - x, -y\right)$ και $\vec{\Sigma\Gamma} = \left(-x, -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - y\right)$.

$\vec{\Sigma A} - 2\vec{\Sigma B} + 4\vec{\Sigma\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(-x, \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - y\right) - 2\left(\frac{\alpha}{2} - x, -y\right) + 4\left(-x, -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - y\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(-3x - \alpha, \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - 2\alpha\sqrt{3} - 3y\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - \alpha = 0 \\ \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - 2\alpha\sqrt{3} - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\alpha}{3} \\ y = -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$. Επομένως $\Sigma\left(-\frac{\alpha}{3}, -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Έστω P(x,y).

Τότε $\vec{PA} = \left(-x, \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - y\right)$, $\vec{PB} = \left(\frac{\alpha}{2} - x, -y\right)$, $\vec{P\Gamma} = \left(-x, -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - y\right)$ και $\vec{P\Delta} = \left(-\frac{\alpha}{2} - x, -y\right)$.

$\vec{PA} - 2\vec{PB} + 4\vec{P\Gamma} = \ldots = \left(-3x - \alpha, -\frac{3\alpha\sqrt{3}}{2} - 3y\right)$ οπότε η δοθείσα σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\left|\vec{PA} - 2\vec{PB} + 4\vec{P\Gamma}\right| = 3\left|\vec{P\Delta}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{PA} - 2\vec{PB} + 4\vec{P\Gamma}\right|^2 = 9\left|\vec{P\Delta}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow (3x+a)^2+\left(\frac{3\alpha\sqrt{3}}{2}+3y\right)^2=9\left[\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+y^2\right]$$

$\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ 6x-18$\sqrt{3}$ y-11α=0 (ευθεία).

Σημείο αναφοράς το Σ

2ος τρόπος: $\left|\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{P\Gamma}\right|=3\left|\overrightarrow{P\Delta}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{P\Sigma}+\overrightarrow{\Sigma A}-2\left(\overrightarrow{P\Sigma}+\overrightarrow{\Sigma B}\right)+4\left(\overrightarrow{P\Sigma}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)\right|=3\left|\overrightarrow{P\Delta}\right|$

$$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{P\Sigma}+\underbrace{\left(\overrightarrow{\Sigma A}-2\overrightarrow{\Sigma B}+4\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)}_{\vec{0}}\right|=3\left|\overrightarrow{P\Delta}\right|$$

$$\Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{P\Sigma}\right|=3\left|\overrightarrow{P\Delta}\right|$$

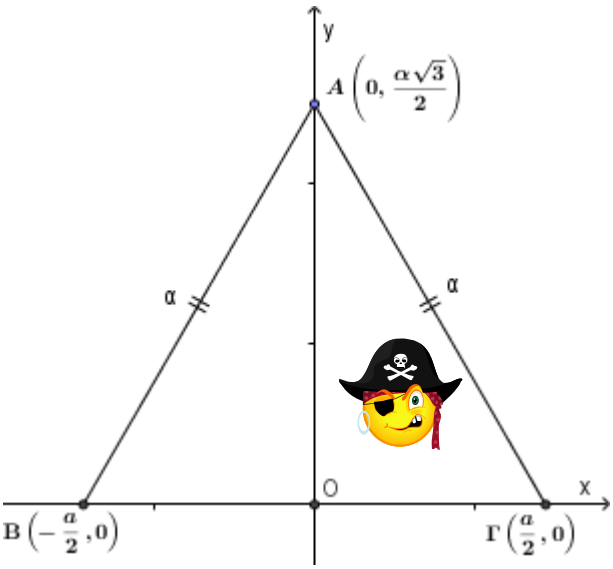
Λόγω του b ερωτήματος

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{P\Sigma}\right|=\left|\overrightarrow{P\Delta}\right|$$

Άρα ο γ.τ. είναι η μεσοκάθετος ευθεία του τμήματος ΣΔ.

20) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, τέτοια ώστε $4(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{M\Gamma})=\alpha^2$.

Λύση: Κατασκευάζουμε σύστημα συν/νων όπως αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα (?)



Έστω Μ(x,y). Τότε $\overrightarrow{MA}=\left(-x,\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}-y\right)$, $\overrightarrow{M'B}=\left(-\frac{\alpha}{2}-x,-y\right)$

και $\overrightarrow{M\Gamma}=\left(\frac{\alpha}{2}-x,-y\right)$.

Η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$4(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{M\Gamma})=\alpha^2\Leftrightarrow$$

$$4\left[x\left(\frac{a}{2}+x\right)+y\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)+\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+y^2+x\left(x-\frac{a}{2}\right)+y\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\right]=a^2$$

$\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{a\sqrt{3}}{3}y-\frac{a^2}{6}=0$.

Εξετάζουμε εάν η τελευταία εξίσωση παριστάνει κύκλο:

Α=0, Β=$-\frac{a\sqrt{3}}{3}$ και Γ=$-\frac{\alpha^2}{6}$.

$A^2+B^2-4\Gamma=0^2+\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\frac{\alpha^2}{6}$

=…=$\alpha^2>0$, άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι κύκλος με κέντρου $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ ή $K\left(0,\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)$ και ακτίνας ρ=$\frac{\alpha}{2}$.

21) Να βρεθούν οι τιμές του λ∈R, ώστε η εξίσωση: (C_λ): $x^2+y^2-2\lambda x-2(\lambda+1)y+4\lambda^2-\lambda+2=0$ να παριστάνει κύκλο. Στην συνέχεια να δείξετε ότι ο γ.τ. των κέντρων των παραπάνω κύκλων όταν το λ μεταβάλλεται, είναι ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση: $A=-2\lambda$, $B=-2(\lambda+1)$ και $\Gamma=4\lambda^2-\lambda+2$.

$A^2+B^2-4\Gamma=4\lambda^2+4(\lambda+1)^2-4(4\lambda^2-\lambda+2)$

$=\ldots=4(-2\lambda^2+3\lambda-1)$.

Για να παριστάνει κύκλο, πρέπει $A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow 4(-2\lambda^2+3\lambda-1)>0$

$\Leftrightarrow -2\lambda^2+3\lambda-1>0$……(1)

$\Delta=1$, $\lambda_1={}^1/_2$ και $\lambda_2=1$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της (1) και από αυτόν βρίσκουμε $\frac{1}{2}<\lambda<1$.

Ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ ή $K(\lambda,\lambda+1)$.

Θέτω $x=\lambda$ και $y=\lambda+1$. Απαλείφουμε από αυτές το λ (αφαιρώντας κατά μέλη) και βρίσκουμε $y=x+1$.

Επειδή $\frac{1}{2}<\lambda<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<1$ και $\frac{3}{2}<y<2$

Άρα ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, $B(1,2)$ μήκους (ΑΒ)=

$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2}=\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22) Δίνεται η εξίσωση:

(C_λ): $x^2+y^2+4\lambda x-2(\lambda-2)y+4(\lambda^2-\lambda+1)=0$. (1)

i) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, $\forall\lambda\in R^*$.

ii) Να βρείτε τον γ.τ. των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

iii) Για ποιά τιμή του λ ο κύκλος που προκύπτει εφάπτεται:

iiiα) στον άξονα xOx΄,

iiiβ) στον άξονα yOy΄,

iv) δείξτε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) έχουν δυο κοινές εφαπτομένες.

Λύση:

i) $A=4\lambda$, $B=-2(\lambda-2)$ και $\Gamma=4(\lambda^2-\lambda+1)$.

$A^2+B^2-4\Gamma=16\lambda^2+4(\lambda-2)^2-16(\lambda^2-\lambda+1)$

$=\ldots=4\lambda^2>0$.

Άρα παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ ή $K(-2\lambda,\lambda-2)$ και ακτίνας $\rho=|\lambda|$.

ii) $\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=\lambda-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\lambda\\ \lambda=y+2\end{cases} \Leftrightarrow x=-2(y+2) \Leftrightarrow x+2y+4=0$.

Ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων είναι η ευθεία $x+2y+4=0$.

iii) **iiiα)** $d(K,xx')=\rho \Leftrightarrow |\lambda-2|=|\lambda|$

$\Leftrightarrow \lambda-2=\lambda$ ή $\lambda-2=-\lambda$

$\Leftrightarrow -2=0$ (αδύνατη) ή $\lambda=1$. Άρα ο κύκλος εφάπτεται του άξονα xx΄, όταν $\lambda=1$.

iiiβ) $d(K,yy')=\rho \Leftrightarrow |-2\lambda|=|\lambda|$

$\Leftrightarrow \lambda=0$, απορρίπτεται γιατί $\lambda\in R^*$. Άρα ο κύκλος δεν εφάπτεται του άξονα yy΄ για καμμιά τιμή του λ.

iv) Εάν (δ): $Ax+By+\Gamma=0$ εφαπτομένη του κύκλου, τότε:

$d(K,\delta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|-2\lambda A+(\lambda-2)B+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=|\lambda|$

$\Leftrightarrow (-2\lambda A+(\lambda-2)B+\Gamma)^2=\lambda^2(A^2+B^2)$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow (3A^2-4AB)\lambda^2+(8AB-4B^2-4A\Gamma+2B\Gamma)\lambda+(2B-\Gamma)^2=0$……(1)

Για να ισχύει η (1) για κάθε $\lambda\in R^*$, πρέπει $\left\{\begin{array}{l}3A^2-4AB=0\\ 8AB-4B^2-4A\Gamma+2B\Gamma=0\\ 2B-\Gamma=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A=0 \\ \Gamma=2B \end{Bmatrix}$ ή , $\begin{Bmatrix} A=\dfrac{4B}{3} \\ \Gamma=2B \end{Bmatrix}$, οπότε (δ): y+2=0 ή 4x+3y+6=0.

23) Δίνονται η ευθεία (ε): 5x+3y+2=0 και ο κύκλος (c): $x^2+y^2-x-2=0$ που τέμνονται στα σημεία Μ και Ν.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0$…..(1), $\lambda\in R$, παριστάνει κύκλο που διέρχεται από τα σημεία Μ και Ν,

ii) να βρείτε το λ, ώστε ο κύκλος (1) να διέρχεται από το Ο,

iii) να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων (1) όταν το λ μεταβάλλεται, διαγράφουν ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Λύση:

i) (1) $\Leftrightarrow x^2+y^2+(5\lambda-1)x+3\lambda y+2\lambda-2=0$.

$A=5\lambda-1$, $B=3\lambda$ και $\Gamma=2\lambda-2$.

$A^2+B^2-4\Gamma=(5\lambda-1)^2+9\lambda^2-4(2\lambda-2)$

$=\ldots=34\lambda^2-18\lambda+9>0$, γιατί $\Delta=-900<0$.

Άρα παριστάνει κύκλο (c_1) κέντρου $K\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ ή $K\left(-\dfrac{5\lambda-1}{2},-\dfrac{3\lambda}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho=\dfrac{\sqrt{34\lambda^2-18\lambda+9}}{2}$.

Τα σημεία Μ και Ν ικανοποιούν τις εξισώσεις 5x+3y+2=0 και $x^2+y^2-x-2=0$, άρα θα ικανοποιούν και την εξίσωση $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0$, γιατί $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0+\lambda\cdot 0=0$. Επομένως ανήκουν και στον κύκλο (c_1).

ii) Η εξίσωση (1) για x=y=0 δίνει λ=1.

iii) $\begin{cases} x=\dfrac{1-5\lambda}{2} \\ y=-\dfrac{3\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1-2x}{5} \\ \lambda=-\dfrac{2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{5}=-\dfrac{2y}{3} \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$ 6x-10y-3=0.

24) Δίνεται η εξίσωση κύκλου (c): $x^2+y^2+2Ax+2By+\Gamma=0$……(1), με $A^2+B^2-\Gamma>0$.

i) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του $P(x_0,y_0)$ δίνεται από την εξίσωση $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+\Gamma=0$. *Εφαρμογή*: Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2-4x+2y=0$ που διέρχεται από το σημείο Ρ(1,1).

ii) Εάν $M(x_0,y_0)$ τυχαίο σημείο εξωτερικό του κύκλου και ΜΚ, ΜΛ τα εφαπτόμενα τμήματα από το Μ προς τον κύκλο, να δείξετε ότι η ΚΛ έχει εξίσωση $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+\Gamma=0$. *Εφαρμογή*: Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+4x+8y+16=0$ και το σημείο $M_0(-4,1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο και ότι το σημείο M_0 είναι εξωτερικά του κύκλου. Εάν οι εφαπτομένες από το Μ προς τον κύκλο, τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Κ και Λ, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ.

iii) Αφού αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+(\lambda+2)x-2=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή της παραμέτρου λ και $M_0(x_0,y_0)$ τυχαίο σημείο εξωτερικό του κύκλου, να δείξετε ότι οι ευθείες ΚΛ του (ii) ερωτήματος διέρχονται από σταθερό σημείο, ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου λ, το οποίο και να βρείτε.

Λύση:

i) Είναι $(2A)^2+(2B)^2-4\Gamma=4(A^2+B^2-\Gamma)>0$, γιατί $A^2+B^2-\Gamma>0$. Άρα η (1) παριστάνει κύκλο κέντρου Ο(-A,-B).

Εάν Μ(x,y) τυχαίο σημείο της εφαπτομένης, τότε $\overrightarrow{PM}=(x-x_0,y-y_0)$, $\overrightarrow{OP}=(x_0+A,y_0+B)$.

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AP}=0\Leftrightarrow (x-x_0)(x_0+A)+(y-y_0)(y_0+B)=0$ ……..(1)

$P\in(c)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+2Ax_0+2By_0+\Gamma=0$ ..... (2)

Από (1) και (2) βρίσκουμε $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+\Gamma=0$.

Εφαρμογή: $x^2+y^2-4x+2y=0\Leftrightarrow\ldots$

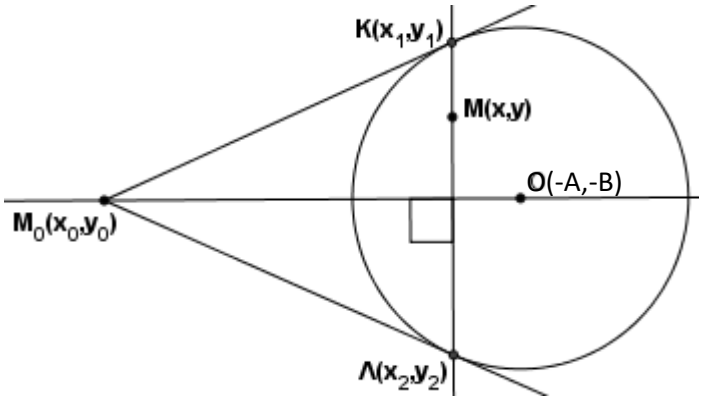
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=5$. Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο κέντρου Ο(2,-1) και ακτίνας $\rho=\sqrt{5}$.Το σημείο Ρ(1,1) είναι σημείο του κύκλου, γιατί $x^2+y^2-4x+2y=0 \overset{x=1}{\underset{y=1}{\Leftrightarrow}}$

$1^2+1^2-4\cdot1+2\cdot1=0\Leftrightarrow 0=0$ αληθής.

Η σχέση $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+\Gamma=0$ για A=-2, B=1, Γ=0 και $x_0=y_0=1$ δίνει την εξίσωση της εφαπτομένης x-2y+1=0.

ii) Έστω $K(x_1,y_1)$, $\Lambda(x_2,y_2)$ τα σημεία επαφής (σχήμα παρακάτω).

Επειδή $K\in(c)\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2+2Ax_1+2By_1+\Gamma=0$..... (3)



Εάν M(x,y) τυχαίο σημείο της ΚΛ, τότε $\overrightarrow{KM}=(x-x_1,y-y_1)$, $\overrightarrow{OM_0}=(x_0+A,y_0+B)$

.KM⊥OM₀ ⇔

$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{OM_0}=0 \Leftrightarrow$

$(x-x_1)(x_0+A)+(y-y_1)(y_0+B)=0$..... (4)

Από τις (3) και (4) βρίσκουμε $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+Γ=0$.

Εφαρμογή: $x^2+y^2+4x+8y+16=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+4)^2=4$. Άρα παριστάνει κύκλο κέντρου O(-2,-4) και ακτίνας ρ=2.

Επειδή $(OM_0)=\sqrt{(-2+4)^2+(-4-1)^2}=...=\sqrt{29}>ρ=2$, το σημείο M_0 είναι εξωτερικό του κύκλου.

Η σχέση $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+Γ=0$ για A=2, B=4, Γ=16, $x_0=-4$ και $y_0=1$ δίνει την εξίσωση της ΚΛ: -2x+5y+12=0.

iii) $x^2+y^2+(λ+2)x-2=0 \Leftrightarrow$ **...** $\Leftrightarrow$

Η σχέση $xx_0+yy_0+A(x+x_0)+B(y+y_0)+Γ=0$ για $A=\frac{\lambda+2}{2}$, B=0, Γ=-2, δίνει την εξίσωση της ΚΛ:

$xx_0+yy_0+\frac{\lambda+2}{2}(x+x_0)-2=0 \Leftrightarrow 2xx_0+2yy_0+(λ+2)(x+x_0)-4=0$

$\Leftrightarrow (x+x_0)λ+(2xx_0+2yy_0+2x+2x_0-4)=0$.....(5)

Η σχέση (5) θεωρούμενη πολυώνυμο ως προς λ, για να ισχύει για κάθε λ∈R, πρέπει

$$\left.\begin{cases} x+x_0=0 \\ 2xx_0+2yy_0+2x+2x_0-4=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=-x_0 \\ y=\dfrac{2+x_0^2}{y_0} \end{cases}\right\}.$$

Άρα οι ευθείες ΚΛ του (ii) ερωτήματος διέρχονται από το σημείο $N\left(-x_0,\frac{2+x_0^2}{y_0}\right)$.

25) Θεωρούμε τους κύκλους
(c_1): $x^2+y^2+A_1x+B_1y+Γ_1=0$ και
(c_2): $x^2+y^2+A_2x+B_2y+Γ_2=0$.

i) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): $(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(Γ_1-Γ_2)=0$ είναι κάθετη στην διάκεντρό τους.

ii) Εάν M είναι τυχαίο σημείο της (ε), να δείξετε ότι $\Delta_{c_1}^M=\Delta_{c_2}^M$, δηλαδή η (ε) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων.

Λύση:

i) Τα σημεία τομής Δ και Ε των κύκλων επαληθεύουν τις εξισώσεις των κύκλων, άρα και την διαφορά τους $(c_1)-(c_2)$: $(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(Γ_1-Γ_2)=0$, δηλαδή την ευθεία (ε). Άρα είναι κάθετη στην διάκεντρο.

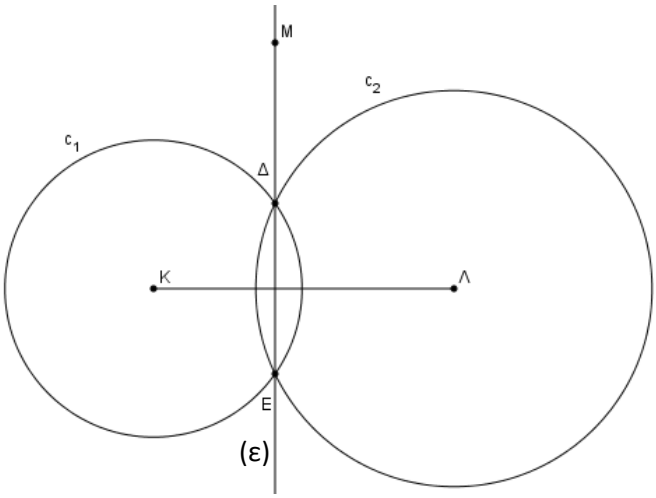
ii) Εάν M τυχαίο σημείο της (ε), τότε:

$\Delta_{c_1}^M=(MK)^2-ρ_1^2=MΔ\cdot ME$.....(1)

$\Delta_{c_2}^M=(MK)^2-ρ_2^2=MΔ\cdot ME$ .....(2)

όπου $ρ_1$ και $ρ_2$ οι ακτίνες των κύκλων (c_1) και (c_2) αντίστοιχα (διπλανό σχήμα).

Από (1) και (2) $\Leftrightarrow \Delta_{c_1}^M=\Delta_{c_2}^M$.



26) Να δείξετε ότι ο γ.τ. των μέσων των χορδών του κύκλου (c): $x^2+y^2+2gx+c=0$, με g,c∈R και $g^2>c$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, είναι το τόξο της περιφέρειας $x^2+y^2+gx=0$ που βρίσκεται εντός του κύκλου (c).

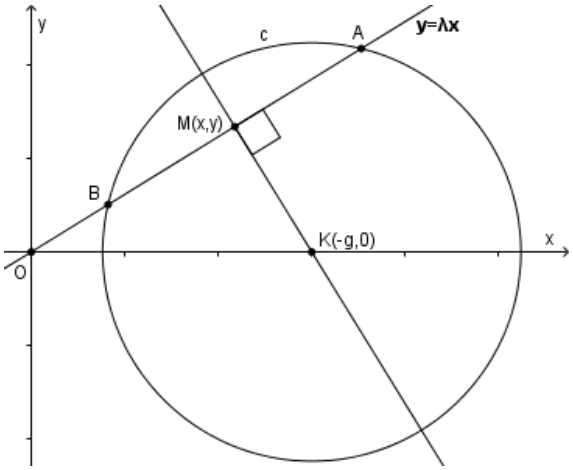
Λύση: $x^2+y^2+2gx+c=0 \Leftrightarrow (x+g)^2+y^2=g^2-c>0$ γιατί $g^2>c$. Άρα παριστάνει κύκλο κέντρου K(-g,0) και ακτίνας $ρ=\sqrt{g^2-c}$.

Έστω M(x,y) το μέσο της χορδής AB (διπλανό σχήμα).
Τότε KM⊥OM……(1)

$\overrightarrow{KM} = (x+g, y)$, $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.

(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$
$\Leftrightarrow (x+g)x+y^2=0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+gx=0$.

Η τελευταία γράφεται $\left(x+\frac{g}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{g^2}{4}$, που παριστάνει κύκλο κέντρου $\Lambda\left(-\frac{g}{2},0\right)$ K και ακτίνας $\frac{|g|}{2}$.



Προφανώς το M βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (c), απ' όπου προκύπτει ο ζητούμενος γ.τ..

27) Θεωρούμε κύκλο (K,R) και σταθερό σημείο του A. Αν ΓΔ τυχαία διάμετρός του που δεν διέρχεται από το A και οι εφαπτόμενες του στα Γ και Δ τέμνουν την εφαπτομένη του κύκλου στο A, στα σημεία M και N αντίστοιχα, να δείξετε ότι το γινόμενο $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ είναι σταθερό, ανεξάρτητα της θέσης του σημείου A.

Λύση: Θεωρούμε σύστημα συν/νων Oxy με άξονα xx΄ την ευθεία της διαμέτρου ΓΔ και κέντρο O το κέντρο του κύκλου K (διπλανό σχήμα).

Τότε ο κύκλος έχει εξίσωση $x_1^2 + y_1^2 = R^2$……(1)

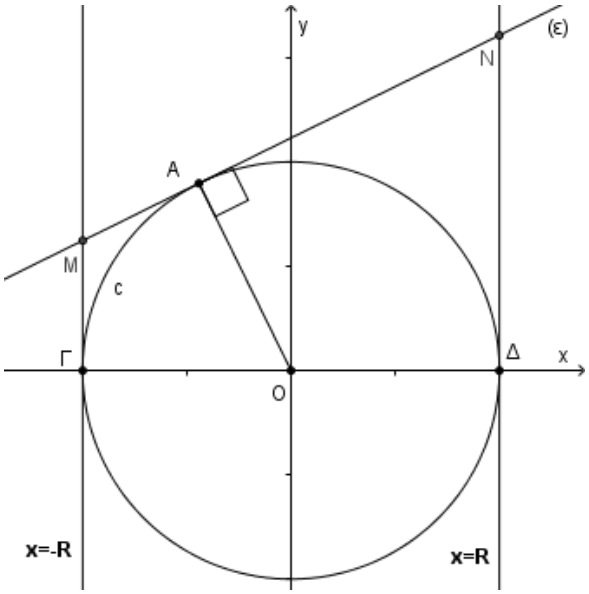
Εάν $A(x_1,y_1)$, τότε (ε): $xx_1+yy_1=R^2$.

$$\begin{cases} xx_1 + yy_1 = R^2 \\ x = -R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -Rx_1 + yy_1 = R^2 \\ x = -R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{R^2 + Rx_1}{y_1} \\ x = -R \end{cases}.$$

Άρα $M\left(-R, \dfrac{R^2 + Rx_1}{y_1}\right)$.

$$\begin{cases} xx_1 + yy_1 = R^2 \\ x = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Rx_1 + yy_1 = R^2 \\ x = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{R^2 - Rx_1}{y_1} \\ x = -R \end{cases}.$$

Άρα $N\left(-R, \dfrac{R^2 - Rx_1}{y_1}\right)$.



$$\overrightarrow{AM} = \left(-R - x_1, \frac{R^2 + Rx_1}{y_1} - y_1\right) = \left(-R - x_1, \frac{R^2 + Rx_1 - y_1^2}{y_1}\right) = \left(-R - x_1, \frac{x_1^2 + Rx_1}{y_1}\right) = \left(-R - x_1, \frac{x_1(x_1 + R)}{y_1}\right)$$

γιατί $R^2 - y_1^2 = x_1^2$, λόγω της (1).

και $\overrightarrow{AN} = \left(R - x_1, \dfrac{R^2 - Rx_1}{y_1} - y_1\right) = \left(R - x_1, \dfrac{x_1^2 - Rx_1}{y_1}\right) = \left(R - x_1, \dfrac{x_1(x_1 - R)}{y_1}\right)$, για τον ίδιο λόγο.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (-R - x_1)(R - x_1) + \frac{x_1(x_1 + R)}{y_1} \cdot \frac{x_1(x_1 - R)}{y_1}$$

$$= -R^2 + x_1^2 + \frac{x_1^2(x_1^2 - R^2)}{y_1^2}$$

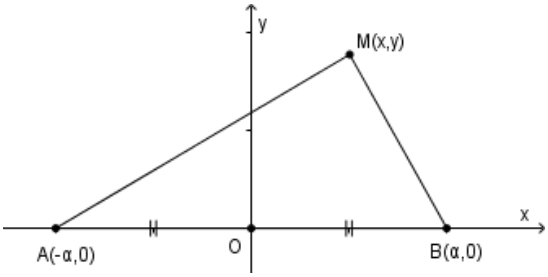
$$= -R^2 + x_1^2 - \frac{x_1^2 \cdot y_1^2}{y_1^2} \text{ ……γιατί } x_1^2 - R^2 = -y_1^2$$

$$= -R^2 + x_1^2 - x_1^2$$

$$= -R^2.$$

28) Δίνονται δυο σταθερά σημεία Α και Β με (ΑΒ)=2α=const. Να βρείτε τον γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=\lambda$, λ∈R με λ≥-α².

Λύση: Θεωρούμε σύστημα συν/νων Οxy με άξονα xx΄ την ευθεία ΑΒ και κέντρο Ο το μέσο του ΑΒ (διπλανό σχήμα).



$\vec{MA}=(-a-x,-y)$ και $\vec{MB}=(a-x,-y)$.

$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=\lambda \Leftrightarrow$ (-α-x)(α-x)+y²=λ

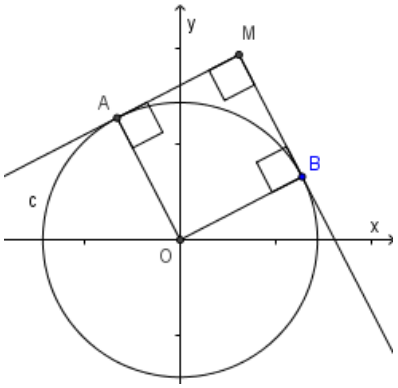
$\Leftrightarrow$ x²-α²+y²=λ

$\Leftrightarrow$ x²+y²=α²+λ,

που παριστάνει κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ= $\sqrt{\alpha^2+\lambda}$, γιατί λ≥-α².

29) Δίνεται ο κύκλος x²+y²=R², R>0. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου, για τα οποία οι εφαπτόμενες από το Μ προς τον δοθέντα κύκλο να είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση: Το τετράπλευρο ΟΑΜΒ είναι ορθογώνιο παρ/μο (διπλανό σχήμα) , γιατί έχει τρείς γωνίες ορθές ($\hat{A}=\hat{M}=\hat{B}$=90⁰). Επίσης είναι ρόμβος γιατί είναι παρ/μο με δυο διαδοχικές πλευρές ίσες (ΟΑ= =ΟΒ=R). Άρα είναι τετράγωνο.



(ΟΜ)²=(ΑΒ)²=(ΟΑ)²+(ΟΒ)²

=R²+R²

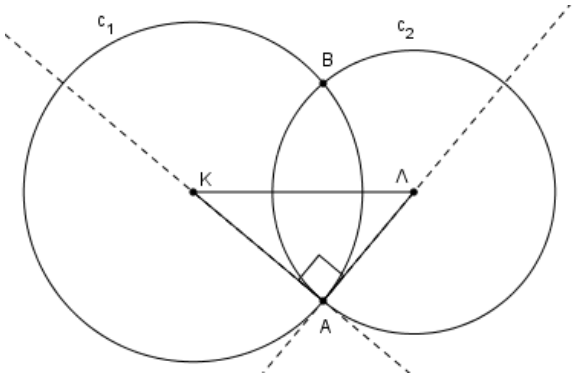
=2R².

Επομένως (ΟΜ)=R$\sqrt{2}$ και το Μ βρίσκεται σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ=R$\sqrt{2}$.

30) Να δείξετε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι κύκλοι:
(c₁): x²+y²+A₁x+B₁y+Γ₁=0 και
(c₂): x²+y²+A₂x+B₂y+Γ₂=0
να τέμνονται ορθογωνίως, είναι η A₁A₂+B₁B₂=2(Γ₁+Γ₂).

(***Σημείωση***: Δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια, εάν οι εφαπτόμενές τους στα κοινά τους σημεία είναι κάθετες.)

Λύση: Εάν $K\left(-\frac{A_1}{2},-\frac{B_1}{2}\right)$ και $\Lambda\left(-\frac{A_2}{2},-\frac{B_2}{2}\right)$ είναι τα κέντρα των κύκλων και Α(x₁,y₁) το ένα από τα δύο σημεία τομής (διπλανό σχήμα), τότε:



☛ x₁²+y₁²+A₁x₁+B₁y₁+Γ₁=0……(1)

☛ x₁²+y₁²+A₂x₁+B₂y₁+Γ₂=0……(2)

☛ ΚΑ ⊥ ΛΑ ……(3)

☛ $\vec{KA}=\left(x_1+\frac{A_1}{2},y_1+\frac{B_1}{2}\right)$, $\vec{\Lambda A}=\left(x_1+\frac{A_2}{2},y_1+\frac{B_2}{2}\right)$

και $\vec{K\Lambda}=\left(\frac{A_1-A_2}{2},\frac{B_1-B_2}{2}\right)$.

Η σχέση (3) γράφεται ισοδύναμα:

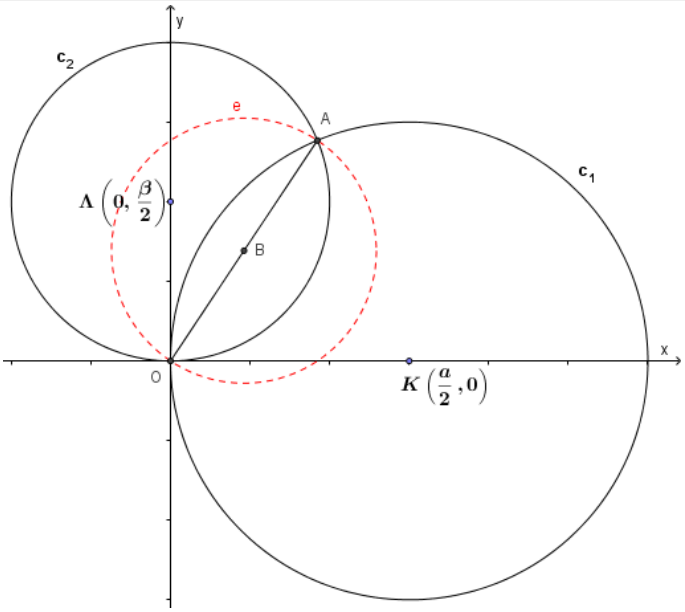
$$(KA)^2+(\Lambda A)^2=(K\Lambda)^2 \Leftrightarrow \left(x_1+\frac{A_1}{2}\right)^2+\left(y_1+\frac{B_1}{2}\right)^2+\left(x_1+\frac{A_2}{2}\right)^2+\left(y_1+\frac{B_2}{2}\right)^2=\left(\frac{A_1-A_2}{2}\right)^2+\left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2+x_1A_1+\cancel{\frac{A_1^2}{4}}+y_1^2+y_1B_1+\cancel{\frac{B_1^2}{4}}+x_1^2+x_1A_2+\cancel{\frac{A_2^2}{4}}+y_1^2+y_1B_2+\cancel{\frac{B_2^2}{4}}=\cancel{\frac{A_1^2}{4}}-\frac{A_1A_2}{2}+\cancel{\frac{A_2^2}{4}}+\cancel{\frac{B_1^2}{4}}-\frac{B_1B_2}{2}+\cancel{\frac{B_2^2}{4}}$$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_1A_1+y_1^2+y_1B_1+x_1^2+x_1A_2+y_1^2+y_1B_2=-\frac{A_1A_2}{2}-\frac{B_1B_2}{2}$ η οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) δίνει

$-\Gamma_1-\Gamma_2=-\frac{A_1A_2}{2}-\frac{B_1B_2}{2} \Leftrightarrow$ A₁A₂+B₁B₂=2(Γ₁+Γ₂).

31) Να δείξετε ότι η περιφέρεια που έχει διάμετρο την κοινή χορδή των κύκλων (c_1): $x^2+y^2-\alpha x=0$ και (c_2): $x^2+y^2-\beta y=0$, είναι $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=\alpha\beta(\beta x+\alpha y)$.



Λύση: $x^2+y^2-\alpha x=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$.

Επομένως ο κύκλος (c_1) έχει κέντρο $K\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{|\alpha|}{2}$.

$x^2+y^2-\beta y=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\beta^2}{4}$.

Επομένως ο κύκλος (c_2) έχει κέντρο $\Lambda\left(0,\frac{\beta}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{|\beta|}{2}$.

Ο πρώτος κύκλος εφάπτεται του άξονα yy΄ στο σημείο Ο(0,0) και ο δεύτερος κύκλος εφάπτεται του άξονα xx΄ στο Ο(0,0) (διπλανό σχήμα).

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2-ax=0 \\ x^2+y^2-\beta y=0 \end{cases}\right\}\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}(-)$$

$\beta y-\alpha x=0 \Leftrightarrow y=\frac{a}{\beta}x$ .....(3)

$(1)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^2+\frac{a^2}{\beta^2}x^2-ax=0 \Leftrightarrow \beta^2x^2+\alpha^2x^2-\alpha\beta^2x=0$

$\Leftrightarrow x[(\alpha^2+\beta^2)x-\alpha\beta^2]=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $(\alpha^2+\beta^2)x-\alpha\beta^2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{a\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

☛ Για x=0, η σχέση (3) δίνει y=0.

☛ Για $x=\frac{a\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$, η σχέση (3) δίνει $y=\frac{a^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}$.

Άρα τα σημεία τομής τους είναι τα Ο(0,0) και $A\left(\frac{a\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},\frac{a^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει διάμετρο ΟΑ. Επομένως:

☛ Η ακτίνα του είναι $\rho=\frac{1}{2}(OA)=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2+\left(\frac{a^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^4+\alpha^4\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2\beta^4+\alpha^4\beta^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}}{2(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{|\alpha\beta|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

☛ Το κέντρο του είναι το μέσον Β του ΟΑ, με συν/νες $B\left(\frac{a\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)},\frac{a^2\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)$.

Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση

$$\left(x-\frac{a\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)^2+\left(y-\frac{a^2\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)^2=\left(\frac{|\alpha\beta|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left(2(\alpha^2+\beta^2)x-a\beta^2\right)^2+\left(2(\alpha^2+\beta^2)y-a^2\beta\right)^2=\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)\Leftrightarrow$$

$$4(\alpha^2+\beta^2)^2x^2-4(\alpha^2+\beta^2)xa\beta^2+\cancel{a^2\beta^4}+4(\alpha^2+\beta^2)^2y^2-4(\alpha^2+\beta^2)ya^2\beta+\cancel{a^4\beta^2}=\cancel{\alpha^4\beta^2}+\cancel{\alpha^2\beta^4}\Leftrightarrow$$

$$4(\alpha^2+\beta^2)^2x^2-4(\alpha^2+\beta^2)xa\beta^2+4(\alpha^2+\beta^2)^2y^2-4(\alpha^2+\beta^2)ya^2\beta=0\Leftrightarrow$$

$$4(\alpha^2+\beta^2)^2x^2+4(\alpha^2+\beta^2)^2y^2=4(\alpha^2+\beta^2)xa\beta^2+4(\alpha^2+\beta^2)ya^2\beta\Leftrightarrow$$

$$\cancel{4}(\alpha^2+\beta^2)^{\cancel{2}}(x^2+y^2)=\cancel{4(\alpha^2+\beta^2)}\alpha\beta(\beta x+ay)\Leftrightarrow$$

$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=\alpha\beta(\beta x+\alpha y)$.

32) ασδασδαδ