ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

1) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

Λύση: $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1$

$\Leftrightarrow |x|\leq 1$

$\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Άρα $A_f=[-1,1]$.

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$f''(x)=\frac{-4x\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

=……

$$=\frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

x	$-\sqrt{3/2}$	-1	0	1	$\sqrt{3/2}$
f´´(x)		-	0	+	
f(x)		Κ.Κ.	Σ.Κ.	Κ.Α	

Το σημείο Α(0,f(0)) =Α(0,0) είναι σημείο καμπής.

2) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x+\eta\mu x$.

Λύση: $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x$

$f''(x)=-\eta\mu x$

f´´(x)=0 $\Leftrightarrow$ ημx=0

$\Leftrightarrow$ x=κπ, κ∈Ζ.

x	2κπ		2κπ+π		2κπ+2π
f´´(x)	0	+	0	-	0
f(x)		Κ.Α.		Κ.Κ.	
	Σ.Κ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.

Άρα έχει Σ.Κ. στα σημεία με τετμημένες x=2κπ και x=2κπ+π τα σημεία Α(2κπ,2κπ) και Β(2κπ+π,2κπ+π).

3) Να βρείτε τα Σ.Κ. της συνάρτησης $f(x)=x^2e^x$.

Λύση: $f'(x)=2xe^x+x^2e^x$

$f''(x)=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x$

$=e^x(x^2+4x+2)$.

f´´(x)=0 $\Leftrightarrow$ $e^x(x^2+4x+2)=0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+4x+2=0$……………..γιατί $e^x\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x=-2-\sqrt{2}$ ή $x=-2+\sqrt{2}$.

x	-∞		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		+∞
f´´(x)		+		-		+	
f(x)		Κ.Α.		Κ.Κ.		Κ.Α.	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Παρουσιάζει Σ.Κ. τα σημεία $A(-2-\sqrt{2},f(-2-\sqrt{2}))$ και $B(-2+\sqrt{2},f(-2+\sqrt{2}))$.

4) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά.

Λύση: $f'(x)=\dfrac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ και

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+1)^2+4x(x^2+2x-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)[(x^2+1)(-2x-2)+4x(x^2+2x-1)]}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)(-2x-2)+4x(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}.$$

f´´(x)=0 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}=0$

$\Leftrightarrow$ $2x^3+6x^2-6x-2=0$

2	6	-6	-2	1
↓	2	8	2	
2	8	2	0	

Horner

$\overset{Horner}{\Longleftrightarrow}$ $(x-1)(2x^2+8x+2)=0$

$\Leftrightarrow$ x=1 ή $x=-2-\sqrt{3}$ ή $x=-2+\sqrt{3}$.

x	-∞		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1		+∞
f´´(x)		-		+		-		+	
f(x)		Κ.Κ.		Κ.Α.		Κ.Κ.		Κ.Α.	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Παρουσιάζει Σ.Κ. στα σημεία:

$$A\left(-2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)\ ,\ \ B\left(-2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

και Γ(1,1).

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{1-\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}}{1+2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$$

και

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}}{-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\dfrac{2\sqrt{3}}{4}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{4}.$$

Άρα $\lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma} \Leftrightarrow$ ΑΒ//ΑΓ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Α συμπίπτουν.

Άρα τα σημεία Α,Β και Γ είναι συνευθειακά.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Να υπολογίσετε τα α, β, $\gamma\in R$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο Α(2,7), να έχει ελάχιστο στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ και να έχει Σ.Κ. στο σημείο της Α(3,f(3)).

__Λύση__: $f(x)=x^3-\alpha x^2+\beta x+\gamma$

$f'(x)=3x^2-2\alpha x+\beta$

$f''(x)=6x-2\alpha$.

$$\begin{Bmatrix} f(2)=7 \\ f'(1)=0 \\ f''(3)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4\alpha-2\beta-\gamma=1 \\ 2\alpha-\beta=3 \\ 18-2\alpha=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=9 \\ \beta=15. \\ \gamma=5 \end{cases}$$

6) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x)=x^4-2\lambda x^3+6(\lambda^2-2\lambda+3)x^2+x+2008$, $x\in R$,

δεν έχει Σ.Κ.

__Λύση__: $f(x)=x^4-2\lambda x^3+6(\lambda^2-2\lambda+3)x^2+x+2008$

$f'(x)=4x^3-6\lambda x^2+12(\lambda^2-2\lambda+3)x+1$

$f''(x)=12x^2-12\lambda x+12(\lambda^2-2\lambda+3)$

$=12(x^2-\lambda x+\lambda^2-2\lambda+3)$.

Εάν είχε Σ.Κ. στο σημείο με τετμημένη x_0, επειδή είναι πολυωνυμική, θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0,, άρα $f''(x_0)=0$

$\Leftrightarrow x^2-\lambda x+\lambda^2-2\lambda+3=0$.......(1)

Η 2ου βαθμού ως προς x εξίσωση (1) είναι όμως αδύνατη γιατί έχει διακρίνουσα:

$\Delta=\lambda^2-4(\lambda^2-2\lambda+3)$

$=-3\lambda^2+8\lambda-12<0$

αφού η τελευταία είναι 2ου βαθμού ως προς λ με $\Delta'=-80<0$.

Άτοπο.

Άρα η f δεν έχει Σ.Κ..

7) Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού που ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) έχει παράγοντα το x+1,

ii) έχει Σ.Κ. στο σημείο της με τετμημένη x=-2,

iii) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη x=-2 έχει εξίσωση 2y-6x=5.

__Λύση__: Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$

$f''(x)=6\alpha x+2\beta$

- $2y-6x=5 \overset{x=-2}{\Leftrightarrow} y=-7/2 \Leftrightarrow f(-2)=-7/2$

  $\Leftrightarrow -8\alpha+4\beta-2\gamma+\delta=-7/2$.....................(1)
- $2y-6x=5 \Leftrightarrow y=3x+5/2 \Leftrightarrow f'(-2)=3$

  $\Leftrightarrow 12^{\alpha}-4\beta+\gamma=3$..............................(2)
- Αφού έχει παράγοντα το x+1, έχει ρίζα το -1, δηλαδή f(-1)=0

  $\Leftrightarrow -\alpha+\beta-\gamma+\delta=0$..............................(3)
- Αφού έχει Σ.Κ. στο σημείο της με τετμημένη x=-2, θα είναι $f''(-2)=0$

  $\Leftrightarrow -12\alpha+2\beta=0$...............................(4)

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2),(3) και (4) βρίσκουμε $\alpha=\frac{1}{2}$, β=3, γ=9 και $\delta=\frac{13}{2}$.

Άρα $f(x)=\frac{1}{2}x^3+3x^2+9x+\frac{13}{2}$.

8) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2$ με $\alpha,\beta\neq0$, έχει δυο ακρότατα και ένα Σ.Κ. τα οποία είναι συνευθειακά και μάλιστα το Σ.Κ. διχοτομεί το τμήμα που ορίζουν τα ακρότατα.

__Λύση__: $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x$

$f''(x)=6\alpha x+2\beta$.

__Ακρότατα__:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2+2\beta x=0$

$\Leftrightarrow x_1=0$ ή $x_2=-\frac{2\beta}{3\alpha}$.

Επειδή η $f'(x)$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού, εκατέρωθεν των ριζών x_1 και x_2 αλλάζει πρόσημο, οπότε παρουσιάζει ακρότατα στα $x_1=0$ το $f(x_1)=0$ και στο $x_2=-\frac{2\beta}{3\alpha}$ το $f(x_2)=\frac{4\beta^3}{27\alpha^2}$.

__Κυρτότητα__:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6\alpha x+2\beta=0$

$\Leftrightarrow x_3=-\frac{\beta}{3\alpha}$.

Επειδή η $f'(x)$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού, εκατέρωθεν της ρίζας x_3 αλλάζει πρόσημο, οπότε παρουσιάζει Σ.Κ. στο $x_3=-\frac{\beta}{3\alpha}$ το

$f(x_3)=\frac{2\beta^3}{27\alpha^2}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο $M_3(x_3,y_3)$ είναι μέσο του τμήματος που ορίζουν τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0-\frac{2\beta}{3\alpha}}{2}=-\frac{\beta}{3\alpha}=x_3 \text{ και}$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{0+\frac{4\beta^3}{27\alpha^2}}{2}=\frac{2\beta^3}{27\alpha^2}=f(x_3).$$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\lambda x^2+x-1$. Να υπολογίσετε το $\lambda\in R$, ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο Σ.Κ. της.

__Λύση__: $f'(x)=3x^2-2\lambda x+1$.

$f''(x)=6x-2\lambda$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-2\lambda=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda}{3}$.

Επειδή η f΄΄(x) είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού, εκατέρωθεν της ρίζας $x=\dfrac{\lambda}{3}$ αλλάζει πρόσημο, οπότε παρουσιάζει Σ.Κ. στο $x=\dfrac{\lambda}{3}$.

$$f'\left(\frac{\lambda}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2-2\lambda\cdot\frac{\lambda}{3}+1$$

$$=-\frac{\lambda^2}{3}+1.$$

Για να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο Σ.Κ. της, πρέπει $f'\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\lambda^2}{3}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}.$$

10) Να δείξετε ότι αν μια άρτια συνάρτηση f: R→R στρέφει τα Κ.Α. στο [0,+∞), τότε στρέφει επίσης τα Κ.Α. στο (-∞,0].

Λύση: Αφού f άρτια, f(-x)=f(x) για κάθε x∈R, την οποία παραγωγίζουμε:

[f(-x)]΄=f΄(x) ⇔ f΄(-x)·(-x)΄=f΄(x).

⇔ f΄(-x)=-f(x)................................(1)

Παραγωγίζουμε την (1):

[f΄(-x)]΄=[-f(x)]΄ ⇔ f΄΄(-x)·(-x)΄=-f΄(x)

⇔ -f΄΄(-x)=-f΄(x)

⇔ f΄΄(-x)=f΄(x)..........................(2)

Η (2) σημαίνει ότι η συνάρτηση f΄΄ είναι άρτια και επομένως έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄Oy. Επομένως αν f΄΄(x)≥0 στο (-∞,0], θα είναι και f΄΄(x)≥0 στο [0,+∞), οπότε εάν στρέφει τα Κ.Α. στο (-∞,0], τότε στρέφει επίσης τα Κ.Α. στο [0,+∞).

11) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+11x+9$, x∈R, έχει το Σ.Κ. της και κέντρο συμμετρίας.

Λύση: $f'(x)=3x^2-12x+11$

$f''(x)=6x-12$.

• f΄΄(x)=0 ⇔ 6x-12=0

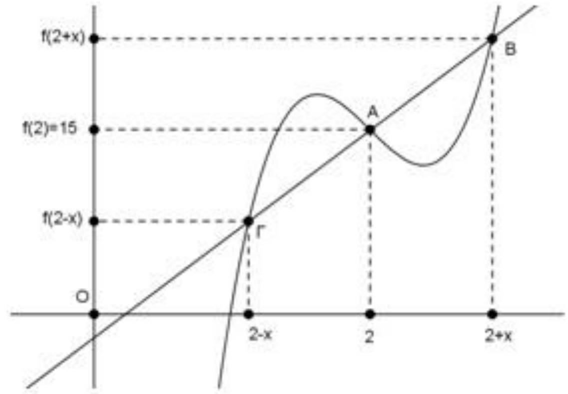
⇔ x=2.

x	-∞	2	+∞
f΄΄(x)	-		+
f(x)	Κ.Κ.		Κ.Α.

Σ.Κ.

Στο σημείο Α(2,f(2)) ή Α(2,15), έχει Σ.Κ.

Για να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει το Σ.Κ. της Α και κέντρο συμ-



μετρίας, αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{f(2-x)+f(2+x)}{2}=15$ για κάθε x∈R (βλέπε σχήμα παραπάνω).

Έχουμε $\dfrac{f(2-x)+f(2+x)}{2}=$

$$=\frac{(2-x)^3-6(2-x)^2+11(2-x)+9+(2+x)^3-6(2+x)^2+11(2+x)+9}{2}$$

$$=\frac{8-\cancel{12x}+\cancel{6x^2}-\cancel{x^3}-24+\cancel{24x}-\cancel{6x^2}+22-\cancel{11x}+9+8+\cancel{12x}+\cancel{6x^2}+\cancel{x^3}-24-\cancel{24x}-\cancel{6x^2}+22+\cancel{11x}+9}{2}$$

$$=\frac{30}{2}=15.$$

12) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ στρέφει τα Κ.Κ. στο (0,π/2).

Λύση: $f'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$

$$f''(x)=\frac{-x^2\eta\mu x-2x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x}{x^3}.$$

Έστω $g(x)=-x^2\eta\mu x-2x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x$.

$g'(x)=-\cancel{2x\eta\mu x}-x^2\sigma\upsilon\nu x-\cancel{2\sigma\upsilon\nu x}+\cancel{2x\eta\mu x}+\cancel{2\sigma\upsilon\nu x}$.

$=-x^2\sigma\upsilon\nu x<0$ στο (0,π/2).

Άρα g ↘ στο (0,π/2) και επομένως

x>0 ⇔ g(x)<g(0) ⇔ $-x^2\eta\mu x-2x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x<0$

Άρα f΄΄(x)<0 και η f στρέφει τα Κ.Κ. στο (0,π/2).

13) Έστω οι συναρτήσεις f,g:R→R δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και στρέφουν τα Κ.Κ. στο R. Αν f΄(x)>0 για κάθε x∈R, να δείξετε ότι η σύνθεσή τους f∘g στρέφει τα Κ.Κ. στο R.

Λύση: [(f∘g)(x)]΄=[f(g(x))]΄

=f΄(g(x))·g΄(x).

[(f∘g)(x)]΄΄=[f΄(g(x))·g΄(x)]΄

=[f΄(g(x))]΄·g΄(x)+f΄(g(x))·g΄΄(x).

$=f''(g(x))\cdot[g'(x)]^2+f'(g(x))\cdot g''(x)\le 0$

γιατί: f΄΄(g(x))≤0 αφού f στρέφει Κ.Κ.,

$[g'(x)]^2(x)\ge 0$,

f΄(x)>0 ⇒ f΄(g(x))>0

και $g''(x)\le 0$ αφού g στρέφει Κ.Κ..
Άρα η συνάρτηση $f\circ g$ στρέφει τα Κ.Κ. στο R.

14) Δίνεται η συνάρτηση f: $\Delta\to R$, συνεχής στο διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

i) αν η f στρέφει τα Κ.Α. στο Δ, τότε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1\ne x_2$ ισχύει $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

ii) αν η f στρέφει τα Κ.Κ. στο Δ, τότε για κάθε x_1, $x_2\in\Delta$ με $x_1\ne x_2$ ισχύει $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω σχέσεων.

Εφαρμογή:

i) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in[0,\pi/2]$ ισχύει $\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{2}\le\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $\frac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{2}\ge e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Λύση:

i) Αρκεί να δείξουμε ότι:

$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_1)+f(x_2)$ ή

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_1)+f(x_2)$ ή

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)<f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ ή

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}<\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}\quad\text{....................(1)}$$

Εφαρμόζουμε το **Θ.Μ.Τ.** για την f στα διαστήματα $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$.

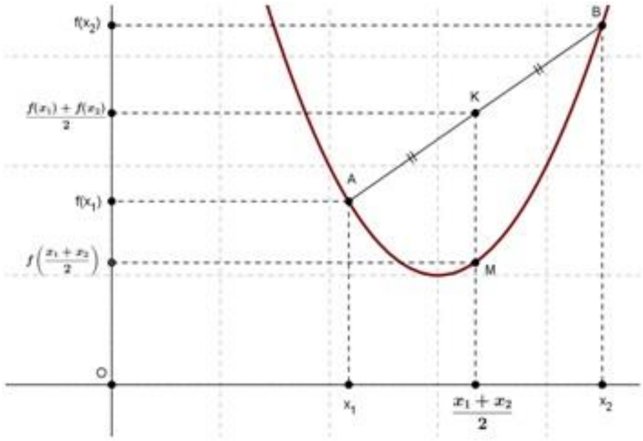
Προφανώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\xi_2\in\left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$, άρα $\xi_1<\xi_2$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}\ \text{ και }\ f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Επειδή η f στρέφει τα Κ.Α. στο Δ, τότε f΄ ↗ στο Δ. Άρα $\xi_1<\xi_2\Leftrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}<\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$, το μέσο Κ του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, είναι

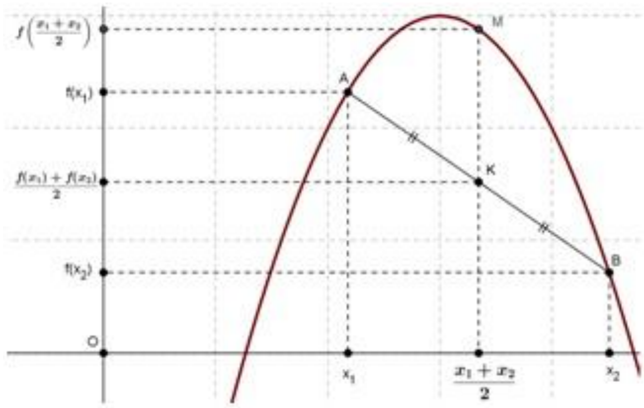


πάνω από το σημείο $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ της γραφικής παράστασης της f.

ii) Επειδή η f στρέφει τα Κ.Κ. στο Δ, τότε f΄ ↘ στο Δ. Άρα $\xi_1<\xi_2\Leftrightarrow f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}>\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$, το μέσο Κ του ευθύγραμμου τμήματος που ορί-



ζουν τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, είναι κάτω από το σημείο $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ της γραφικής παράστασης της f.

Εφαρμογή:

i) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση f(x)= =ημx στρέφει τα Κ.Κ. στο (0,π/2). Πράγματι f΄(x)=συνx και
f΄΄(x)=-ημx<0 στο (0,π/2).

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση f(x)= $=e^x$ στρέφει τα Κ.Α. στο R. Πράγματι:
$f'(x)=e^x$ και
$f''(x)=e^x>0$ στο R.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

15) Να υπολογίστε το $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\left(\alpha-\frac{2}{3}\right)x^3-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)x^2-10x+7$ να παρουσιάζει Σ.Κ. στο x=3/2. Μετά για την τιμή του α που βρήκατε, να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών. (Α δέσμη 1990)

Λύση: $f'(x)=(3\alpha-2)x^2-(2\alpha+1)x-10$

$f''(x)=2(3\alpha-2)x-(2\alpha+1)$.

Επειδή παραγωγίζεται στο R ως πολυωνυμική, $f''(3/2)=0 \Leftrightarrow 3(3\alpha-2)-2\alpha-1=0$

$\Leftrightarrow \alpha=1$.

Άρα $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-10x+7$

$f'(x)=x^2-3x-10$

$f''(x)=2x-3$.

x	−∞		−2		3/2		5		+∞
f′(x)		+		−		−		+	
f′′(x)		−		−		+		+	
f(x)		Κ.Κ.		Κ.Κ.		Κ.Α.		Κ.Α.	
			Τ.Μ.		Σ.Κ.		Τ.Ε.		

16) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+(\alpha^3+7)x-5\alpha^2$ δεν παρουσιάζει Σ.Κ. για καμιά τιμή του $\alpha \in R$. (Α δέσμη 1991)

Λύση:

$$f'(x)=\frac{4x^3}{3}+2\alpha x^2+\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)x+(\alpha^3+7)$$

$$f''(x)=4x^2+4\alpha x+\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right).$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2+4\alpha x+\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)=0$ .....(1)

Η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς x και είναι αδύνατη, γιατί έχει διακρίνουσα $\Delta=16\alpha^2-16(2\alpha^2-4\alpha+5)=16(\alpha^2-2\alpha^2+4\alpha-5)$

$=16(-\alpha^2+4\alpha-5)<0$

αφού $-\alpha^2+4\alpha-5<0$ γιατί $\Delta'=-4<0$.

Άρα δεν παρουσιάζει Σ.Κ. για καμιά τιμή του $\alpha \in R$.

17) (Θέμα $4^{ον}$ 2003) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha,\beta)$, $\delta \in (\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β). Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$. Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 8

Λύση:

α. Είναι $\gamma \neq \delta$, διότι αν γ = δ τότε $f(\gamma)f(\gamma)<0 \Rightarrow (f(\gamma))^2<0$, άτοπο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω γ < δ.

Η f είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta] \subset [\alpha,\beta]$ και $f(\gamma)f(\delta)<0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του **Bolzano** υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα $(\gamma,\delta) \subset (\alpha,\beta)$.

β. Εφαρμόζουμε για την f το θεώρημα μέσης τιμής διαδοχικά στα διαστήματα [α,γ], [γ,ρ], [ρ,δ] και [δ,β] και παίρνουμε αντίστοιχα :

- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_1 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}$.
- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_2 \in (\gamma,\rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_2)=\frac{f(\rho)-f(\gamma)}{\rho-\gamma}=\frac{-f(\gamma)}{\rho-\gamma}$.
- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_3 \in (\rho,\delta)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_3)=\frac{f(\delta)-f(\rho)}{\delta-\rho}=\frac{f(\delta)}{\delta-\rho}$.
- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_4 \in (\delta,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_4)=\frac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}=\frac{-f(\delta)}{\beta-\delta}$.

Επειδή είναι $f(\gamma)f(\delta)<0$ θα είναι : (**f(γ)<0 και f(δ)>0**) ή (**f(γ)>0 και f(δ)<0**).

Αν **f(γ)<0 και f(δ)>0** τότε : $f'(\lambda_1)<0$, $f'(\lambda_2)>0$, $f'(\lambda_3)>0$, $f'(\lambda_4)<0$.

Εφαρμόζουμε για την f′ το **Θ.Μ.Τ.** διαδοχικά στα διαστήματα $[\lambda_1,\lambda_2]$, $[\lambda_3,\lambda_4]$ και παίρνουμε αντίστοιχα:

- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\lambda_1,\lambda_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2)=\frac{f'(\lambda_2)-f'(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}>0$.
- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\lambda_3,\lambda_4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=\frac{f'(\lambda_4)-f'(\lambda_3)}{\lambda_4-\lambda_3}<0$.

Αν **f(γ) > 0 και f(δ) < 0** τότε : $f'(\lambda_1)>0$, $f'(\lambda_2)<0$, $f'(\lambda_3)<0$, $f'(\lambda_4)>0$.

Εφαρμόζουμε για την f′ το θεώρημα μέσης τιμής διαδοχικά στα διαστήματα $[\lambda_1,\lambda_2]$, $[\lambda_3,\lambda_4]$ και παίρνουμε αντίστοιχα :

- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\lambda_1,\lambda_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=\frac{f'(\lambda_2)-f'(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}<0$.
- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\lambda_3,\lambda_4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2)=\frac{f'(\lambda_4)-f'(\lambda_3)}{\lambda_4-\lambda_3}>0$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν υπάρχουν σημεία ξ_1 , $\xi_2 \in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

γ) Επειδή η f΄΄ είναι συνεχής στο (α,β) θα έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαδοχι-κά διαστήματα που ορίζονται από τις το πολύ πεπερασμένες σε πλήθος ρίζες της $f''(x)=0$.

Όμως επειδή από το (β) η f΄΄ αλλάζει πρόσημο στο (α,β), υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαδοχικά διαστήματα με διαφορετικό πρόσημο και έστω x_α το σημείο αλλαγής του προσήμου.

Στο x_α ορίζεται η $f'(x_\alpha)$ (δηλαδή ορίζεται εφα-πτομένη της C_f στο x_α) και η f΄΄ αλλάζει πρόσημο άρα στο σημείο $A(x_\alpha,f(x_\alpha))$ η C_f παρουσιάζει καμπή .

18) (ΘΕΜΑ **2**ο 2004) Δίνεται η συνάρτηση f με τύ-πο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τι μών της f. Μονάδες 7

Λύση:

α) Πρέπει $x>0 \Leftrightarrow A_f=(0,+\infty)$

$f'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}$

$=2x\ln x+x$

$=x(2\ln x+1)$.

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0$

$\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 2\ln x+1=0$

$\Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$.

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1)>0$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x+1>0$

$\Leftrightarrow \ln x>-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2}}$.

και $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<e^{-\frac{1}{2}}$.

x	**0** $\quad\sqrt{\frac{1}{e}}$	**+∞**
f΄(x)	**-**	**+**
f(x)	↘	↗

Μονοτονία: Στο διάστημα $\left(0,\sqrt{\frac{1}{e}}\right]$ είναι ↘ και στο διάστημα $\left[\sqrt{\frac{1}{e}},+\infty\right)$ είναι ↗.

Ακρότατα: Στο $x_0=\sqrt{\frac{1}{e}}$ παρουσιάζει Τ.Ε. το $f\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

β) $f''(x)=2\ln x+1+\cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}}$

$=2\ln x+3$.

• $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+3=0$

$\Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$.

• $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\ln x+3>0$

$\Leftrightarrow \ln x>-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$.

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<e^{-\frac{3}{2}}$.

x	**0** $\quad\sqrt{\frac{1}{e^3}}$	**+∞**
f΄΄(x)	**-**	**+**
f(x)	Κ.Κ.	Κ.Α.

Στο διάστημα $\left(0,\sqrt{\frac{1}{e^3}}\right]$ στρέφει τα Κ.Κ. και στο $\left[\sqrt{\frac{1}{e^3}},+\infty\right)$ στρέφει τα Κ.Α.

Στο $x_1=\sqrt{\frac{1}{e^3}}$ έχει Σ.Κ. το $f\left(\sqrt{\frac{1}{e^3}}\right)=-\frac{3}{2e^3}$.

γ) $f\left(\left(0,\sqrt{\frac{1}{e}}\right]\right)\overset{f\downarrow}{=}\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)$

$=\left[-\frac{1}{2e},0\right)$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)$

$\overset{0\cdot(-\infty)}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right)$

$$\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{===}} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

$$f\left(\left(\sqrt{\frac{1}{e}},+\infty\right)\right) \overset{f\uparrow}{=} \left(f\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2e},+\infty\right)$$

γιατί $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\ln x\right)$

$=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$.

Άρα $f((0,+\infty))=\left(-\frac{1}{2e},0\right)\cup\left(-\frac{1}{2e},+\infty\right)$

$=\left(-\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

19) (Θέμα 3ον 2007) Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$

όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\pi/2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής — Μονάδες 7

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο πεδίο ορισμού της. — Μονάδες 8

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. — Μονάδες 3

Λύση:

i) $f'(x)=3x^2-3$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm1$.

x	-∞	-1		1	+∞
f΄(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Άρα παρουσιάζει Τ.Μ. στο $x_1=-1$ το $f(-1)=2-2\eta\mu^2\theta=$ $=2(1-\eta\mu^2\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ και Τ.Ε. στο $x_2=1$ το $f(1)=-2-2\eta\mu^2\theta$.

$f''(x)=6x$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	-∞	0	+∞
f΄΄(x)	-		+
f(x)	Κ.Κ.		Κ.Α.
		Σ.Κ.	

Άρα έχει σημείο καμπής στο $x_3=0$ το $f(0)=-2\eta\mu^2\theta$.

ii) Έστω $A_1=(-\infty,-1)$, $A_2=[-1,1]$ και $A_3=(1,+\infty)$ •

$f(A_1) \overset{f\uparrow}{\underset{\sigma\tau o\ (-\infty,-1)}{==}} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-1)\right) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$.

Επειδή $\theta\neq\kappa\pi+\pi/2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta\neq0$ και $0\in(-\infty,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1 και επειδή είναι ↗ είναι μοναδική.

• $f(A_2) \overset{f\downarrow}{\underset{\sigma\tau o\,[-1,1]}{==}} [f(1),f(-1)]=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$.

Επειδή $0\in\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή είναι ↘ είναι μοναδική.

• $f(A_3) \overset{f\uparrow}{\underset{\sigma\tau o\ (1,+\infty)}{==}} \left(f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty\right]$.

Επειδή $0\in\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty\right]$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_3 και επειδή είναι ↗ είναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

iii) $A(-1,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$B(1,-2-2\eta\mu^2\theta)$

$\Gamma(0,-2\eta\mu^2\theta)$

(ε): $y=-2x-2\eta\mu^2\theta \overset{x=-1}{\Rightarrow} y=2-2\eta\mu^2\theta$

$=2(1-\eta\mu^2\theta)$

$=2\sigma\upsilon\nu^2\theta$. Άρα $A\in(\varepsilon)$.

(ε): $y=-2x-2\eta\mu^2\theta \overset{x=0}{\Rightarrow} y=-2\eta\mu^2\theta$. Άρα $\Gamma\in(\varepsilon)$.

(ε): $y=-2x-2\eta\mu^2\theta \overset{x=1}{\Rightarrow} y=-2-2\eta\mu^2\theta$. Άρα $B\in(\varepsilon)$.

20) (Θέμα 3ο 2009) Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$

όπου α σταθερός πραγματικός με $0<\alpha\neq1$.

Α) Αν ισχύει $f(x)\geq1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι α=e. — Μονάδες 8

Β) Για α=e,

i) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή. Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ↘ στο διάστημα (-1,0] και ↗ στο διάστημα [0,+∞) — Μονάδες 6

iii) αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2). — Μονάδες 6

Λύση:

Α. $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha-\frac{1}{x+1}$

$f(x)\geq1 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$.

Επομένως παρουσιάζει Τ.Ε. στο x=0 και επειδή είναι παραγωγίσιμη, από το θ. **Fermat** θα έχουμε f΄(0)=0 ⇔ lnα-1=0

⇔ lnα=1

⇔ lnα=lne

⇔ α=e.

Β. Για α=e,

i. $f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$

άρα η f είναι κυρτή.

ii. Επειδή η f είναι κυρτή, η f΄ είναι ↗.

- Η εξίσωση f΄(x)=0 έχει προφανή ρίζα το 0.
- Για x<0 $\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f΄(x)<f΄(0)

  ⇔ f΄(x)<0 άρα η f είναι ↘ στο (-1,0]
- Για x>0 $\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f΄(x)>f΄(0)

  ⇔ f΄(x)>0 άρα η f είναι ↗ στο [0,+∞).

iii. Για x∈(1,2) έχουμε:

$\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow$

(f(β)-1)(x-2)+(f(γ)-1)(x-1)=0.

Εφαρμόζουμε για την συνάρτηση

g(x)=(f(β)-1)(x-2)+(f(γ)-1)(x-1)

το θ. **Bolzano** στο διάστημα [1,2].

- g συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική.
- g(1)=-f(β)+1<0 γιατί f(x)≥1 για κάθε x>-1

  g(2)=f(γ)-1>0 γιατί f(x)≥1 για κάθε x>-1

με f(x)=1 μόνο για x=0∉[1,2] λόγω του (i) ερωτήματος.

⇒ g(1)·g(2)<0.

Άρα εφαρμόζεται το θ. Bolzano και η εξίσωση g(x)=0 ⇔ (f(β)-1)(x-2)+(f(γ)-1)(x-1)=0

$$\Leftrightarrow \frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

21) (Θέμα Γ 2010) Δίνεται η συνάρτηση:

f(x)=2x+ln(x²+1), x∈R.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$. Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δυο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής της παράστασης στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψψ΄. Μονάδες 6

__Λύση__:

Γ1. $f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}$

$=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0$ γιατί το τριώνυμο $x^2+x+1>0$ αφού Δ=-3<0.

Άρα f ↗ στο R.

Γ2. $2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$

⇔ $2x^2-6x+4=\ln[(3x-2)^2+1]-\ln(x^4+1)$

⇔ $2x^2+\ln(x^4+1)=6x-4+\ln[(3x-2)^2+1]$

⇔ $2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln[(3x-2)^2+1]$

⇔ $f(x^2)=f(3x-2)$

$\underset{f\,\text{"1–1"}}{\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}}$ $x^2=3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

⇔ x=1 ή x=2.

Γ3. $f''(x)=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

x	-∞	-1		1	+∞
f΄΄(x)	-	0	+	0	-
f(x)	∩		∪		∩
		Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Έχουμε δυο σημεία καμπής Α(1,2+ln2) και Β(-1,-2+ln2).

f΄(1)=3

f΄(-1)=1

Εξισώσεις εφαπτομένων:

ε_A: y-f(1)=f΄(1)(x-1) ⇔ y-(2+ln2)=3(x-1)

$\overset{x=0}{\Rightarrow}$ y=-1+ln2.

ε_B: y-f(-1)=f΄(-1)(x+1) ⇔ y-(-2+ln2)=x+1

$\overset{x=0}{\Rightarrow}$ y=-1+ln2.

Άρα οι εφαπτομένες τέμνονται στο σημείο Γ(0,-1+ln2) του άξονα ψψ΄.

22) (Θέμα Γ 2011) Δίνεται η συνάρτηση f:R→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f΄(0)= f(0)=0 η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$e^x\big(f'(x)+f''(x)-1\big)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε x∈R.

A. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-x)$, x∈R

Μονάδες 8

B. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 3

C. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

D. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$\ln(e^x-x)=$ συνx

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 7

__Λύση__: **A.** $e^x\big(f'(x)+f''(x)-1\big)=f'(x)+xf''(x)$

⇔ $e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)$

$\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-f'(x)-xf''(x)=e^x$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x-1)+f''(x)(e^x-x)=e^x$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)'+f''(x)(e^x-x)=e^x$

$\Leftrightarrow [f'(x)(e^x-x)]'=(e^x)'$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x+c$……………………(1)

$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow} c=-1$.

Άρα $f'(x)(e^x-x)=e^x-1$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{(e^x-x)'}{e^x-x}$

γιατί $e^x-x\neq 0$ δικ/ση στο τέλος

$\Leftrightarrow f'(x)=(\ln(e^x-x))'$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-x)+k$

………………………(2)

$(2) \overset{x=0}{\Rightarrow} k=0$

Άρα $f(x)=\ln(e^x-x)$.

Θέτω $g(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε $g'(x)=e^x-1$

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1=e^0 \Leftrightarrow x=0$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>0$
  $g'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
g΄(x)	-	○	+
g(x)	↘		↗

Άρα η g παρουσιάζει Τ.Ε. στο x=0 επομένως $g(x)\geq g(0) \Leftrightarrow e^x-x\geq 1$. Άρα $e^x-x\neq 0$.

B. $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ και επειδή $e^x-x>0$ οι ρίζες και το πρόσημο της f΄ είναι ίδια με τις ρίζες και το πρόσημο του e^x-1 που το έχουμε εξετάσει στο ένθετο προηγουμένως.

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
f΄(x)	-	○	+
f(x)	↘		↗

Άρα η συνάρτηση f είναι ↘ στο $(-\infty,0]$ και ↗ στο $[0,+\infty)$.

Στο $x_0=0$ έχει Τ.Ε. το $f(0)=0$.

C. $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow$

$$f''(x)=\ldots=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$$

Για να έχει δυο ακριβώς Σ.Κ. πρέπει η συνάρτηση $h(x)=2e^x-xe^x-1$ να έχει ακριβώς δυο ρίζες στις οποίες να αλλάζει πρόσημο.

$h'(x)=(1-x)e^x$.

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της h΄ είναι ίδιο με το πρόσημο του 1-x.

x	$-\infty$	**1**	$+\infty$
h΄(x)	+	○	-
h(x)	↗		↘

Ολικό max

$h((-\infty,1)) \overset{h\uparrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} h(x), h(1)\right)=(-1,e-1)$.

Επειδή $0\in(-1,e-1)$ η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty,0)$ που λόγω μονοτονίας είναι μοναδική και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής.

$h((1,+\infty)) \overset{h\downarrow}{=} \left(h(1), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right)=(-\infty,e-1)$.

Επειδή $0\in(-\infty,e-1)$ η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$ που λόγω μονοτονίας είναι μοναδική και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής.

Άρα η h έχει δυο ακριβώς δυο ρίζες στις οποίες να αλλάζει πρόσημο.

D. $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \ln(e^x-x)-\sigma\upsilon\nu x=0$

$\Leftrightarrow f(x)-\sigma\upsilon\nu x=0$.

Έστω $h(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x$ συνεχής στο $[0,\pi/2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1 \\ h(\pi/2)=-\sigma\upsilon\nu(\pi/2)=-(-1)=1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h(0)\cdot h(\pi/2)<0$ και από το θ. **Bolzano** η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow \ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi/2)$ και επειδή $h'(x)=f'(x)+\eta\mu x>0$ στο $(0,\pi/2)$ είναι μοναδική.

γιατί ημx>0 στο (0,π/2) και f΄(x)>0 όταν x>0.

23) Xgxx