ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΣΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ & «1-1»

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) f(x)=-x
ii) f(x)=2x-3
iii) f(x)=|x|
iv) $f(x)=5x^3-2$
v) $f(x)=x^2-8x+15$ στα διαστήματα (-∞,4] και [4,+∞)
vi) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ στα διαστήματα (-∞,-1) και (-1,+∞)
vii) f(x)=2|x|+3|x-2|+x.
viii) f(x)=2lnx-3

Λύση:

i) $A_f=R$.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2+x_1}{x_2-x_1}=-1<0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο R.

2ος τρόπος:
f '(x)=(-x)' =-1<0.
Άρα f γνησίως φθίνουσα στο R.

ii) $A_f=R$.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2-3-(2x_1-3)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2-2x_1}{x_2-x_1}=\frac{2\cancel{(x_2-x_1)}}{\cancel{x_2-x_1}}=2>0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

2ος τρόπος:
f '(x)=(2x-3)' =2>0.
Άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

iii) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\geq 0\\ -x, & \text{αν } x<0\end{cases}$.

•Στο [0,+∞) είναι λ=1>0 άρα γνησίως αύξουσα.
• Στο (-∞,0) είναι λ=-1<0 άρα γνησίως φθίνουσα.

iv) $A_f=R$.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{5x_2^3-2-(5x_1^3-2)}{x_2-x_1}=\frac{5x_2^3-5x_1^3}{x_2-x_1}=\frac{5(x_2^3-x_1^3)}{x_2-x_1}=\frac{5\cancel{(x_2-x_1)}(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)}{\cancel{x_2-x_1}}$$

2ος τρόπος:
f '(x)=($5x^3$-2)' =$15x^2$≥0,
με f '(x)=0 μόνο για x=0..
Άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

3ος τρόπος: $x_1<x_2\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1^3<x_2^3$
$\Rightarrow 5x_1^3<5x_2^3$
$\Rightarrow 5x_1^3-2<5x_2^3-2$
$\Rightarrow$ $f(x_1)<f(x_2)$ γνησίως αύξουσα στο R.

$=5(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)>0$ άρα f γνησίως αύξουσα, γιατί η παράσταση $x_2^2+x_2x_1+x_1^2$ αν θεωρηθεί ως τριώνυμο ως προς x_2, έχει διακρίνουσα Δ=$-3x_1^2<0$ και επομένως είναι θετικό για κάθε τιμή των x_1 και x_2.

v) $A_f=R$.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2-8x_2+15-(x_1^2-8x_1+15)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2-8x_2-x_1^2+8x_1}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)-8(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\cancel{(x_2-x_1)}(x_2+x_1-8)}{\cancel{x_2-x_1}}=x_2+x_1-8$$

2ος τρόπος: f '(x)=(x^2-8x+15)' =2x-8.
f '(x)=0⇔x=4.

x	-∞	4	+∞
f '(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

Άρα f γνησίως αύξουσα στο [4,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο (-∞,4].

•Στο διάστημα (-∞,4], έχουμε: $\begin{cases}x_1<4\\ x_2<4\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow} x_1+x_2<8\Rightarrow x_1+x_2-8<0\Rightarrow\lambda<0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

•Στο διάστημα [4,+∞), έχουμε: $\begin{cases}x_1>4\\ x_2>4\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow} x_1+x_2>8\Rightarrow x_1+x_2-8>0\Rightarrow\lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα.

vi) A_f=R-{-1}.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{2x_2-1}{x_2+1}-\frac{2x_1-1}{x_1+1}}{x_2-x_1}=\frac{(2x_2-1)(x_1+1)-(2x_1-1)(x_2+1)}{(x_2-x_1)(x_2+1)(x_1+1)}=\frac{-3x_1+3x_2}{(x_2-x_1)(x_2+1)(x_1+1)}=$$

$$\frac{3\cancel{(x_2-x_1)}}{\cancel{(x_2-x_1)}(x_2+1)(x_1+1)}=\frac{3}{(x_2+1)(x_1+1)}.$$

•Στο διάστημα (-∝,-1), έχουμε: $\begin{cases}x_1<-1\\x_2<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+1<0\\x_2+1<0\end{cases}\Rightarrow(x_1+1)(x_2+1)>0\Rightarrow\lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-∝,-1).

•Στο διάστημα (1,+∝), έχουμε: $\begin{cases}x_1>-1\\x_2>-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+1>0\\x_2+1>0\end{cases}\Rightarrow(x_1+1)(x_2+1)>0\Rightarrow\lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (1,+∝).

vii) Απαλείφουμε τις απόλυτες τιμές:

x	-∝ 0	2	+∝
x	-	+	+
x-2	-	-	+
|x|	-x	x	x
|x-2|	-x+2	-x+2	x-2
f(x)	2(-x)+3(-x+2)+x= =-4x+6	2x+3(-x+2)+x= =6	2x+3(x-2)+x= =6x-6

Άρα $f(x)=\begin{cases}-4x+6, & \text{αν } x\in(-\infty,0]\\ 6, & \text{αν } x\in[0,2]\\ 6x-6, & \text{αν } x\in[2,+\infty)\end{cases}$.

•Στο διάστημα (-∝,0], έχουμε λ=…=-4<0 και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-∝,0].
•Στο διάστημα [0,2], έχουμε λ=…=0 και η f είναι σταθερή στο διάστημα [0,2].
•Στο διάστημα [2,+∝), έχουμε λ=…=6>0 και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [2,+∝).

viii) A_f=(0,+∝).

$x_1<x_2$ ⇒ $\ln x_1<\ln x_2$
⇒ $\ln x_1-3<\ln x_2-3$
⇒ $f(x_1)<f(x_2)$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,+∝).

<u>2[ος] τρόπος</u>:

f ’(x)=(2lnx-3)’ = $\frac{2}{x}$>0, γιατί x>0.

Άρα f γνησίως αύξουσα στο (0,+∝).

2) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:
- **i)** f(x)=2x-1
- **ii)** f(x)=2x-1, x∈(-1,1)
- **iii)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1)
- **iv)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1]
- **v)** f(x)=x^2-5x+6
- **vi)** f(x)=x^2
- **vii)** f(x)=-3x^2+1
- **viii)** f(x)=3συνx-1
- **ix)** f(x)=$\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$.
- **x)** f(x)=$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.
- **xi)** f(x)=-x^2+6x-3.
- **xii)** f(x)=$\frac{x+2}{x^2+x+3}$.
- **xiii)** f(x)=5-2ημ$\left(\frac{x}{2}\right)$

<u>Λύση</u>:

i) Επειδή λ=…=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοικτό διάστημα (-∝,+∝), επομένως δεν έχει ακρότατα (παρατήρηση 16).

ii) Ομοίως επειδή λ=…=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοικτό διάστημα (-1,1), επομένως δεν έχει ακρότατα (παρατήρηση 16).

iii) Επειδή λ=…=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα -1≤x<1⇒f(-1)≤f(x)<f(1)1⇒-3≤y<1.
Επομένως η f έχει ελάχιστο για x=-1 το f(-1)=-3.
Μέγιστο δεν έχει.

iv) Επειδή λ=**…**=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα $-1\le x\le 1 \Rightarrow f(-1)\le f(x)\le f(1) \Rightarrow -3\le y\le 1$.
Επομένως η f έχει ελάχιστο για x=-1 το f(-1)=-3 και μέγιστο για x=1 το f(1)=1 (παρατήρηση 17).

v) $f(x)=x^2-5x+6$. Είναι $A_f=R$ ως πολυωνυμική.

$$=x^2-2\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge-\frac{1}{4}.$$

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{5}{2}$ το $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

2ος τρόπος: $f'(x)=(x^2-5x+6)'=2x-5$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$.

x	$-\infty$ ○ $^5/_2$	$+\infty$
f ′(x)	-	+
f (x)	↘	↗

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[^5/_2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,^5/_2]$.

Άρα παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\frac{5}{2}$ το $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ (παρατήρηση 18).

3ος τρόπος: Θέτω f(x)=y
$x^2-5x+6=y \Leftrightarrow x^2-5x+6-y=0$ …………(1)
Η (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\ge0 \Leftrightarrow 25-4(6-y)\ge0$.
$\Leftrightarrow y\ge -^1/_4$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο το $-\frac{1}{4}$ για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{5}{2}$.

vi) $f(x)=x^2\ge0$ για κάθε $x\in R$. Άρα παρουσιάζει ελάχιστο το 0 για x=0.

vii) $f(x)=-3x^2+1\le1$ για κάθε $x\in R$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο το 1 για x=0.

viii) $-1\le συνx\le1 \Leftrightarrow -3\le 3συνx\le3$
$\Leftrightarrow -3-1\le 3συνx-1\le 3-1$
$\Leftrightarrow -4\le f(x)\le 2$.
Επομένως παρουσιάζει ελάχιστο το -4 για x=2κπ+π, κ∈Z, και μέγιστο το 2 για x=2κπ, κ∈Z.

ix) $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4} \Leftrightarrow x^2-2x+4=yx^2+2xy+4y$

Επειδή $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in R$, γιατί Δ=-12<0, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R.

$\Leftrightarrow x^2-2x+4-yx^2-2xy-4y=0$
$\Leftrightarrow (1-y)x^2-2(1+y)x+4(1-y)=0$……………………………………………(1)
Η (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\ge0 \Leftrightarrow 4(1+y)^2-16(1-y)^2\ge0$
$\Leftrightarrow (1+y)^2-4(1-y)^2\ge0$
….
$\Leftrightarrow -3y^2+10y-3\ge0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le y\le 3$

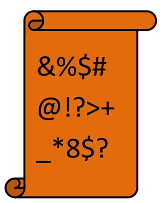
Δ′=64
$y=\dfrac{-10\pm8}{-6}=\begin{cases}\frac{1}{3}\\ 3\end{cases}$

y	$-\infty$ $^1/_3$ 3 $+\infty$
$-3y^2+10y-3$	- ○ + ○ -

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο το $\frac{1}{3}$ και μέγιστο το 3. Για να βρούμε για ποιες τιμές του x παρουσιάζονται, κάνουμε τα παρακάτω:

Για $y=\frac{1}{3}$ είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα $x=-\frac{\beta}{2a}=\frac{1+y}{1-y}\overset{y=\frac{1}{3}}{=\!=\!=}\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$.

Για y=3 είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα $x=-\frac{\beta}{2a}=\frac{1+y}{1-y}\overset{y=3}{=\!=\!=}\frac{1+3}{1-3}=-2$.



Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=2 το $f(2)=\frac{1}{3}$ και παρουσιάζει μέγιστο στο x=-2 το f(-2)=3.

x) $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ $\Leftrightarrow x^2-x+1=yx^2+xy+y$

$\Leftrightarrow x^2-x+1-yx^2-xy-y=0$

$\Leftrightarrow (1-y)x^2-(1+y)x+(1-y)=0$……………………………………………………(1)

Επειδή $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in R$, γιατί $\Delta=-3<0$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R.

Η (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow (1+y)^2-4(1-y)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (1+y)^2-4(1-y)^2\geq 0$

….

$\Leftrightarrow 3y^2-10y+3\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq y\leq 3$

$\Delta'=64$

$y=\frac{10\pm 8}{6}=$ $\frac{1}{3}$, 3

y	$-\infty$	$^1/_3$	3	$+\infty$
$3y^2-10y+3$	+	-	-	+

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο το $\frac{1}{3}$ και μέγιστο το 3. Για να βρούμε για ποιες τιμές του x παρουσιάζονται, κάνουμε τα παρακάτω:

Για $y=\frac{1}{3}$ είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα $x=-\frac{\beta}{2a}=\frac{1+y}{2(1-y)}\overset{y=\frac{1}{3}}{=\!=\!=}\frac{1+\frac{1}{3}}{2\left(1-\frac{1}{3}\right)}=1.$

Για y=3 είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα $x=-\frac{\beta}{2a}=\frac{1+y}{2(1-y)}\overset{y=3}{=\!=\!=}\frac{1+3}{2(1-3)}=-1.$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=1 το $f(1)=\frac{1}{3}$ και παρουσιάζει μέγιστο στο x=-1 το f(-1)=3.

xi) $f(x)=-x^2+6x-3$. Είναι $A_f=R$ ως πολυωνυμική.

$=-(x^2-6x+3)$

$=-(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+3)$

$=-[(x-3)^2-9+3]$

$=-[(x-3)^2-6]$

$=-(x-3)^2+6\leq 6$.

Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x=3 το $f(3)=6$.

<u>2ος τρόπος</u>: $f'(x)=(-x^2+6x-3)'=-2x+6$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f '(x)	+	0	-
f (x)	↗		↘

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει μέγιστο για x=3 το $f(3)=6$ (παρατήρηση 18).

<u>3ος τρόπος</u>: Θέτω f(x)=y

$-x^2+6x-3=y \Leftrightarrow x^2-6x+3+y=0$ …………(1)

Η (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 36-4(3+-y)\geq 0 \Leftrightarrow y\leq 6$.

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=-\frac{\beta}{2a}=\frac{6}{2}=3$ το $f(3)=6$.

xii) $y=\frac{x+2}{x^2+x+3}$ $\Leftrightarrow x+2=yx^2+xy+3y$

$\Leftrightarrow yx^2+xy+3y-x-2=0$

$\Leftrightarrow yx^2+(y-1)x+(3y-2)=0$…………………………………………………(1)

Επειδή $x^2+x+3>0$ για κάθε $x\in R$, γιατί $\Delta=-11<0$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R.

Η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2-4y(3y-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow (y-1)^2-4y(3y-2)\geq 0$

….

$\Leftrightarrow 11y^2-6y-1\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{5}}{11}\leq y\leq \frac{3+2\sqrt{5}}{11}$

$\Delta'=804$

$y=\frac{6\pm 4\sqrt{5}}{22}=$ $\frac{3+2\sqrt{5}}{11}$, $\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$

y	$-\infty$	$\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$	$\frac{3+2\sqrt{5}}{11}$	$+\infty$
$11y^2-6y-1$	-	+	+	-

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο το $\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$ και μέγιστο το $\frac{3+2\sqrt{5}}{11}$.

Για να βρούμε για ποιες τιμές του x παρουσιάζονται τα ακρότατα, κάνουμε τα παρακάτω:

Για y=$\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$ είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα x=$-\frac{\beta}{2a}=\frac{1-y}{2y}=\frac{1-\frac{3-2\sqrt{5}}{11}}{2\frac{3-2\sqrt{5}}{11}}=\cdots=\frac{4+\sqrt{5}}{3-2\sqrt{5}}=\cdots=-2-\sqrt{5}$.

Για y=$\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$ είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα x=$-\frac{\beta}{2a}=\frac{1-y}{2y}=\frac{1-\frac{3+2\sqrt{5}}{11}}{2\frac{3+2\sqrt{5}}{11}}=\cdots=\frac{4-\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}}=\cdots=-2+\sqrt{5}$.

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=$-2-\sqrt{5}$ το f($-2-\sqrt{5}$)=$\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$ και παρουσιάζει μέγιστο στο x=$-2+\sqrt{5}$ το f($-2+\sqrt{5}$)=$\frac{3+2\sqrt{5}}{11}$.

xiii) $-1\le ημ\frac{x}{2}\le 1$ $\Leftrightarrow 2\ge -2\,ημ\frac{x}{2}\ge -2$ ……………..(πολ/ζουμε με -2)

$\Leftrightarrow -2\le -2\,ημ\frac{x}{2}\le 2$

$\Leftrightarrow 5-2\le 5-2\,ημ\frac{x}{2}\le 5+2$………..(προσθέτουμε 5)

$\Leftrightarrow 3\le y\le 7$

Επομένως παρουσιάζει ελάχιστο το 3 για ημ$\frac{x}{2}$=1 $\Leftrightarrow$ $\frac{x}{2}$=2κπ+$\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ x=4κπ+π, κ∈Z, και μέγιστο το 7 για ημ$\frac{x}{2}$=-1 $\Leftrightarrow$ $\frac{x}{2}$=2κπ$-\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ x=4κπ-π, κ∈Z.

3) Να δείξετε ότι αν f, g γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) σε διάστημα Δ και ορίζονται οι συναρτήσεις f∘g και g∘f, να δείξετε ότι και αυτές είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) στα πεδία ορισμού τους.

Λύση: $x_1<x_2 \xRightarrow{f\uparrow} f(x_1)<f(x_2) \xRightarrow{g\uparrow} g(f(x_1))<g(f(x_2)) \Rightarrow (g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$. Άρα g∘f ↗

$x_1<x_2 \xRightarrow{g\uparrow} g(x_1)<g(x_2) \xRightarrow{f\uparrow} f(g(x_1))<f(g(x_2)) \Rightarrow (f\circ g)(x_1)<(f\circ g)(x_2)$. Άρα f∘g ↗

Ομοίως αν είναι ↘.

4) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να λύσετε την ανίσωση $(f\circ g)(x^2-2x)\ge(f\circ g)(x+4)$

Λύση:

$(f\circ g)(x^2-2x)\ge(f\circ g)(x+4)\Leftrightarrow f(g(x^2-2x))\ge f(g(x+4)) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} g(x^2-2x)\ge g(x+4) \overset{g\downarrow}{\Longleftrightarrow} x^2-2x\le x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4\le 0 \Leftrightarrow x\in[-1,4]$.

Δ=25

$x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2}=$ 4, -1

x	-∞	-1		4	+∞
x^2-3x-4	+	○	-	○	+

5) Εάν f συνάρτηση ΄΄1-1΄΄, να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+4x)=f(x+4)$.

Λύση: $f(x^2+4x)=f(x+4) \overset{f\ 1\text{-}1}{\Longleftrightarrow} x^2+4x=x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow$ **…** $\Leftrightarrow$ x=-1 ή x=4.

6) Αν η συνάρτηση f:R→R είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση $(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4)$.

Λύση:

$(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4)\Leftrightarrow f(f(x^2+4x))=f(f(x+4))$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι 1-1. Άρα $f(x^2+4x)=f(x+4)$ $\Leftrightarrow$ $x^2+4x=x+4 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$.

Δ=25 και $x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x_1=4$, $x_2=-1$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+2x+1$.

i) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $x^5+x^3+2x-4=0$.

Λύση:

i) Έστω $x_1<x_2$.

Τότε $\left.\begin{array}{l} 2x_1<2x_2 \\ x_1^3<x_2^3 \\ \text{και } x_1^5<x_2^5 \end{array}\right\}$ (+)

2ος τρόπος:

f ’(x)=$(x^5+x^3+2x+1)'=x^4+x^2+2>0$,

για κάθε x∈R.

Άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

$x_1^5+x_1^3+2x_1<x_2^5+x_2^3+2x_2 \Rightarrow \quad x_1^5+x_1^3+2x_1+1<x_2^5+x_2^3+2x_2+1 \Rightarrow$ $f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) $x^5+x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x+1-5=0$
$\Leftrightarrow f(x)-5=0$.

Θέτω $g(x)=f(x)-5$.
Αφού f γνησίως αύξουσα, θα είναι και g γνησίως αύξουσα.
Προφανής ρίζα $x=1$……………………………………….(1)

•Για $x<1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(1) \Leftrightarrow f(x)-5<0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x-4<0$ ……………………………………………………(2)

•Για $x>1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(1) \Leftrightarrow f(x)-5>0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x-4>0$ ……………………………………………………(3)

Από (1), (2) και (3) έπεται ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

2ος τρόπος:
$x^5+x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x+1=5 \Leftrightarrow$
$f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$, γιατί αφού f γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1-1.

8) Να λυθούν οι ανισώσεις:

a) $5^{x^2-x}<5^{2x-2}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x}<\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2}$

c) $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6$

Λύση:

a) $5^{x^2-x}<5^{2x-2} \Leftrightarrow x^2-x<2x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow x\in(1,2)$.

Γιατί η συνάρτηση $f(x)=5^x$ είναι ↗ αφού $α=5>1$.

Δ=1

$x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=$ 2, 1

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
x^2-3x+2	+ ○ - ○ +

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x}<\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2} \Leftrightarrow x^2-x>2x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

Γιατί η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ είναι ↘ αφού $0<α=\frac{3}{4}<1$.

c) $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε 3x)

$2^{3x-x^2}-x^2+3x>2^{6-2x}-5x+6+3x \Leftrightarrow$

$2^{3x-x^2}+(3x-x^2)>2^{6-2x}+(6-2x)$ ……………………………………………….(1)

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=2^x+x$. Αυτή είναι γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων $g(x)=2^x$ και $h(x)=x$ (παρατήρηση 10).

Τότε η (1) γίνεται: $f(3x-x^2)>f(6-2x)$ …(γιατί f γνησίως αύξουσα)
$\Leftrightarrow 3x-x^2>6-2x$
$\Leftrightarrow x^2-5x+6<0$
$\Leftrightarrow x\in(2,3)$.

Δ=1

$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}=$ 3, 2

x	$-\infty$ 2 3 $+\infty$
x^2-5x+6	+ ○ - ○ +

9) Έστω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, $x\in R$.

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R,
b) να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$,
c) να λυθεί η ανίσωση $3^x+4^x>5^x$.

Λύση:

a) Επειδή $0<\frac{3}{5}<1$ και $0<\frac{4}{5}<1$, οι συναρτήσεις $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες, άρα και το άθροισμά τους και επομένως και η f(x) θα είναι γνησίως φθίνουσα (παρατήρηση 10).

b) $3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow$ …………(διαιρούμε και τα δυο μέλη με 5^X)

$$\frac{3^x}{5^x}+\frac{4^x}{5^x}=\frac{5^x}{5^x}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0\Leftrightarrow$$

2ος τρόπος:
(1) $\Leftrightarrow$ f(x)=f(2) $\Leftrightarrow$ x=2, γιατί αφού f γνησίως φθίνουσα, θα είναι και 1-1.

f(x)=0…………………………………………………………………………………………(1)

Προφανής ρίζα της (1), x=2……...……………………………………………………………(2)

•Για x<2 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)>f(2) $\Leftrightarrow$ f(x)>0…………………… ……………………………………………(3)

•Για x>2 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)<f(2) $\Leftrightarrow$ f(x)<0…………………… ……………………………………………(4)

Από (2), (3) και (4) έπεται ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα την x=2.

c) $3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow$ ………… $\Leftrightarrow$ f(x)>0 ………. (όπως και στο προηγούμενο ερώτημα)
$\Leftrightarrow$ f(x)>f(2)
$\Leftrightarrow$ x<2………(γιατί f γνησίως φθίνουσα).

10) Έστω $f(x)=\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x-\alpha^2$, με $0<\alpha\neq1$ και $x\in R$.
a) Να δείξετε ότι αν α>1 (**0<α<1**) η f είναι γνησίως αύξουσα (**φθίνουσα**) στο R,
b) να λυθεί η εξίσωση $\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x=\alpha^2$, $0<\alpha\neq1$.

Λύση:

a) $\left.\begin{array}{l}\alpha>1\Leftrightarrow\alpha-1>0\\ \alpha>1\Leftrightarrow\alpha>0\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha(\alpha-1)>0\Rightarrow\alpha^2-\alpha>0.$

Επομένως οι συναρτήσεις α^x και $(\alpha^2-\alpha)x$ είναι γνησίως αύξουσες (?). Άρα και η f είναι γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων (παρατήρηση 10).
Ομοίως όταν 0<α<1.

b) $\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x=\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x-\alpha^2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$…………………………………………………(1)

Προφανής ρίζα της (1) x=1……………………………………………………………………(2)

i) Εάν α>1 τότε f γνησίως αύξουσα οπότε:

•Για x>1 $\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)>f(1) $\Leftrightarrow$ f(x)>0…………………… ……………………………………………(3)

•Για x<1 $\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)<f(1) $\Leftrightarrow$ f(x)<0…………………… ……………………………………………(4)

Από (2), (3) και (4) έπεται ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα την x=1.

ii) Εάν 0<α<1 τότε f γνησίως φθίνουσα οπότε:

2ος τρόπος:
(1) $\Leftrightarrow$ f(x)=f(1) $\Leftrightarrow$ x=1, γιατί αφού f γνησίως μονότονη, θα είναι και 1-1.

•Για x<1 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)>f(1) $\Leftrightarrow$ f(x)>0…………………… …………(5)

•Για x>1 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)<f(1) $\Leftrightarrow$ f(x)<0……………………………………………………………………(6)

Από (2), (5) και (6) έπεται ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα την x=1.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.
i) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.
ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}-e^{x+2}>\ln\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

Λύση:

i) Προφανές γιατί e^x και $\ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσες.

ii) $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1 \Leftrightarrow e^{x^2}+\ln(x^2+1)-1>0 \Leftrightarrow f(x^2)>f(0) \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$.

iii) Πρέπει $x>-3$……………………………………………………………………………………..(1)

$e^{x^2}-e^{x+2}>\ln\dfrac{x+3}{x^2+1} \Leftrightarrow e^{x^2}-e^{x+2}>\ln(x+3)-\ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow e^{x^2}+\ln(x^2+1)>e^{x+2}+\ln(x+3)$

$\Leftrightarrow e^{x^2}+\ln(x^2+1)-1>e^{x+2}+\ln(x+3)-1$

$\Leftrightarrow f(x^2)>f(x+2)$

$\Leftrightarrow x^2>x+2$ ……………………..(γιατί f γνησίως αύξουσα)

$\Leftrightarrow x^2-x-2>0$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$……………………………………………..(2)

Από (1) και (2) έχουμε $x\in(-3,-1)\cup(2,+\infty)$.

(*) $\Delta=9$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=$ 2, -1

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
x^2-x-2	+ ○ - ○ +

12) Έστω $g:(0,+\infty)\to R$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,-2)$, $B(2,-3)$ και η συνάρτηση $f(x)=\ln x-g(x)$, $x>0$.

i) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x<2+g(x^2)$.

Λύση:

i) $g(1)=-2$ και $g(2)=-3$

Άρα $1<2 \Leftrightarrow -2=g(1)>g(2)=-3$ και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Αφού g γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow$ -g γνησίως αύξουσα (παρατήρηση 8) και επειδή lnx επίσης γνησίως αύξουσα, το άθροισμά τους f(x) θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (παρατήρηση 10).

iii) $2\ln x<2+g(x^2) \Leftrightarrow \ln x^2<2+g(x^2)$

$\Leftrightarrow \ln x^2-g(x^2)<2$

$\Leftrightarrow f(x^2)<f(1)$……………………….γιατί $f(1)=\ln 1-g(1)=0-(-2)=2$

$\Leftrightarrow x^2<1$…………………………….γιατί f γνησίως αύξουσα

$\Leftrightarrow |x|<1$

$\Leftrightarrow -1<x<1$.

13) Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$.

ii) η f είναι περιττή.

iii) η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση:

i) Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$…………………………………………………………..(1)

για $x=y=0$ δίνει $f(0)=0$.

ii) $(1)\overset{y=-x}{\Rightarrow} f(x-x)=f(x)+f(-x)$

$\Rightarrow f(0)=f(x)+f(-x)$

$\Rightarrow 0=f(x)+f(-x)$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ άρα f περιττή.

iii) $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_2)=f(x_2-x_1+x_1)$

$=f(x_2-x_1)+f(x_1)$……………………λόγω της (1)

$>f(x_1)$…………………….. γιατί $f(x_2-x_1)>0$ επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

14) Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $f(x)+x\le x^2+1\le f(x+1)-x$ για κάθε $x\in R$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-x+1$.

ii) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

Λύση:

i) f(x)+x≤x^2+1 ⇔ f(x)≤x^2-x+1……………………………………………………………………..(1)

x^2+1≤f(x+1)-x ⇔ f(x+1)≥x^2+x+1 ⇔ f(y)≥$(y-1)^2$+(y-1)+1 ⇔ f(y)≥y^2-y+1

Από (1) και (2) ⇒ f(x)=x^2-x+1. ⇔ f(x)≥x^2-x+1………………..(2)

Θέτω x+1=y ⇔ x=y-1

Θέτω y=x

ii) Θέτω f(x)=y.

x^2-x+1=y ⇔ x^2-x+1-y=0 ……………………………………………………………………………(3)

Η (3) είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς x και επειδή x∈R, πρέπει Δ≥0 ⇔ 1-4(1-y)≥0 ⇔ y≥ $^3/_4$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο το $\frac{3}{4}$ για x=$-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{1}{2}$.

15) Να βρεθούν οι αντίστροφες των συναρτήσεων (εφόσον υπάρχουν):

a) f(x)=x^2+4, x≥0,

b) f(x)=$\sqrt{2x-1}$,

c) f(x)=3e^{x-2}- 5,

d) f(x)=$\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

f) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

g) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

h) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Λύση:

a) • Έστω x_1,x_2≥0. Τότε f(x_1)=f(x_2) ⇔ $x_1^2+4=x_2^2+4$

⇔ $x_1^2=x_2^2$

⇔ x_1=x_2…………(γιατί x_1,x_2≥0).

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• y= x^2+4 ⇔ x^2=y-4 ……………………………..(πρέπει y≥4)

⇔ $x=\sqrt{y-4}$ …………………………(γιατί x≥0)

⇔ $f^{-1}(y)=\sqrt{y-4}$,

⇔ $f^{-1}(x)=\sqrt{x-4}$, x≥4.

$2^{ος}$ τρόπος: Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (εύκολα αποδεικνύεται κατασκευαστικά), θα είναι και 1-1.

b) • A_f=[$^1/_2$,+∞).

f(A_f)=[0,+∞).

f(x_1)=f(x_2) ⇔ $\sqrt{2x_1-1}=\sqrt{2x_2-1}$

⇔ 2x_1-1=2x_2-1

⇔ 2x_1=2x_2

⇔ x_1=x_2 .

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• y=$\sqrt{2x-1}$ ⇔ y^2=2x-1

⇔ $x=\frac{y^2+1}{2}$

⇔ $f^{-1}(y)=\frac{y^2+1}{2}$

⇔ $f^{-1}(y)=\frac{y^2+1}{2}$, y≥0.

$2^{ος}$ τρόπος: Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (εύκολα αποδεικνύεται κατασκευαστικά), θα είναι και 1-1.

c) • A_f=R.

Επειδή e^{x-2}>0 για κάθε x∈R, f(x)=3e^{x-2}- 5>-5 ⇒ f(A_f)=(-5,+∞).

f(x_1)=f(x_2) ⇔ $3e^{x_1-2}=3e^{x_2-2}$

$2^{ος}$ τρόπος: Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (εύκολα αποδεικνύεται κατασκευαστικά), θα είναι και 1-1.

$\Leftrightarrow e^{x_1-2} = e^{x_2-2}$

$\Leftrightarrow x_1-2=x_2-2$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• $y=3e^{x-2}-5 \Leftrightarrow e^{x-2}=\frac{y+5}{3}$

$\Leftrightarrow x-2=\ln\frac{y+5}{3}$, για κάθε y≥-5

$\Leftrightarrow x=2+\ln\frac{y+5}{3}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=2+\ln\frac{y+5}{3}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=2+\ln\frac{x+5}{3}$, $x\in(-5,+\infty)$.

d) • Πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1$

$\Leftrightarrow e^x>e^0$

$\Leftrightarrow x>0$.

Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

Επειδή $\frac{e^x-1}{e^x+1}<1$, για κάθε $x\in R$, $\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}<\ln 1 \Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow f(A_f)=(-\infty,0)$……………….(1)

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \ln\frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\ln\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}$

$\Leftrightarrow (e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)=(e^{x_2}-1)(e^{x_1}+1)$

$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}+e^{x_1}-e^{x_2}-1=e^{x_1+x_2}-e^{x_1}+e^{x_2}-1$

$\Leftrightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2}$

$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• $y=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1} \Leftrightarrow e^y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

$\Leftrightarrow e^ye^x+e^y=e^x-1$

$\Leftrightarrow e^x-e^ye^x=1+e^y$

$\Leftrightarrow e^x(1-e^y)=1+e^y$ ………και επειδή $y\neq 0$ αφού $0\notin f(A_f)$ άρα $e^y\neq 1$

$\Leftrightarrow e^x=\frac{1+e^y}{1-e^y}$

$\Leftrightarrow x=\ln\frac{1+e^y}{1-e^y}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\frac{1+e^y}{1-e^y}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\frac{1+e^x}{1-e^x}$, $x\in(-\infty,0)$.

e) • $A_f=f(A_f)=R$

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}.$$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{2x_1}-1}{2e^{x_1}}=\frac{e^{2x_2}-1}{2e^{x_2}}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x_1}-1}{e^{x_1}}=\frac{e^{2x_2}-1}{e^{x_2}}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}-e^{x_2}=e^{2x_2+x_1}-e^{x_1}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}-e^{x_2}-e^{2x_2+x_1}+e^{x_1}=0$

$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}(e^{x_1}-e^{x_2})+(e^{x_1}-e^{x_2})=0$

$\Leftrightarrow (e^{x_1}-e^{x_2})(e^{x_1+x_2}+1)=0$ ……………………..και επειδή $e^{x_1+x_2}+1\neq 0$

$\Leftrightarrow e^{x_1}-e^{x_2}=0$

$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}$

$\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- $y=\frac{e^{2x}-1}{2e^x} \Leftrightarrow 2e^x y=e^{2x}-1$

$\Leftrightarrow e^{2x}-2e^x y-1=0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-2ye^x-1=0$ ………………………………………………….(1)

Η εξίσωση (1) είναι 2^{ου} βαθμού ως προς e^x και έχει λύσεις $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$.

Επειδή $e^x>0$, για κάθε $x\in R$, θα είναι $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$ γιατί $y-\sqrt{y^2+1}<0$ (?)

Άρα $lne^x = ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right) \Leftrightarrow$ x= $ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in R$.

f) • $A_f=f(A_f)=R$.

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}.$$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{2x_1}+1}{2e^{x_1}}=\frac{e^{2x_2}+1}{2e^{x_2}}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x_1}+1}{e^{x_1}}=\frac{e^{2x_2}+1}{e^{x_2}}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}+e^{x_2}=e^{2x_2+x_1}+e^{x_1}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}+e^{x_2}-e^{2x_2+x_1}-e^{x_1}=0$

$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}(e^{x_1}-e^{x_2})-(e^{x_1}-e^{x_2})=0$

$\Leftrightarrow (e^{x_1}-e^{x_2})(e^{x_1+x_2}-1)=0$

$\Leftrightarrow e^{x_1}-e^{x_2}=0$ ή $e^{x_1+x_2}-1=0$

$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}$ ή $e^{x_1+x_2}=1=e^0$

$\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$ ή $x_1+x_2=0$

$\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$ ή $x_1=-x_2$.

Άρα δεν είναι 1-1 και επομένως δεν αντιστρέφεται. Πχ f(2)=f(-2)= $\frac{e^2+e^{-2}}{2}$.

g) • $A_f=R$ και $f(A_f)=(-1,1)$..(?)

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{2x_1}-1}{e^{2x_1}+1}=\frac{e^{2x_2}-1}{e^{2x_2}+1}$

$\Leftrightarrow (e^{2x_1}-1)(e^{2x_2}+1)=(e^{2x_2}-1)(e^{2x_1}+1)$

$\Leftrightarrow \cancel{e^{2x_1+2x_2}}+e^{2x_1}-e^{2x_2}\cancel{-1}=\cancel{e^{2x_1+2x_2}}-e^{2x_1}+e^{2x_2}\cancel{-1}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1}-e^{2x_2}=-e^{2x_1}+e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x_1}=2e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1}=e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow 2x_1=2x_2$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• $y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow ye^{2x}+y=e^{2x}-1$

$\Leftrightarrow e^{2x}-ye^{2x}=y+1$

$\Leftrightarrow e^{2x}(1-y)=y+1$ και επειδή $y\neq1$ γιατί $1\notin f(A_f)=(-1,1)$

$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{y+1}{1-y}$

$\Leftrightarrow 2x=\ln\frac{y+1}{1-y}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{1-y}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$, $x\in(-1,1)$.

h) • $A_f=R^*$ και $f(A_f)=(1,+\infty)$..(?)

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{2x_1}+1}{e^{2x_1}-1}=\frac{e^{2x_2}+1}{e^{2x_2}-1}$

$\Leftrightarrow (e^{2x_1}+1)(e^{2x_2}-1)=(e^{2x_2}+1)(e^{2x_1}-1)$

$\Leftrightarrow \cancel{e^{2x_1+2x_2}}-e^{2x_1}+e^{2x_2}\cancel{-1}=\cancel{e^{2x_1+2x_2}}+e^{2x_1}-e^{2x_2}\cancel{-1}$

$\Leftrightarrow -e^{2x_1}+e^{2x_2}=e^{2x_1}-e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x_1} = 2e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1} = e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow 2x_1=2x_2$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- $y = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \Leftrightarrow ye^{2x} - y = e^{2x}+1$

$\Leftrightarrow ye^{2x} - e^{2x} = y+1$

$\Leftrightarrow e^{2x}(y-1) = y+1$ και επειδή $y \neq 1$ γιατί $1 \notin f(A_f)=(1,+\infty)$

$\Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{y+1}{y-1}$

$\Leftrightarrow 2x = \ln\dfrac{y+1}{y-1}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $x \in (1,+\infty)$.

16) Μια συνάρτηση $f:R \to R$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = f(x) + ax$ για κάθε $x \in R$, όπου $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι 1-1

ii) $f(0)=0$.

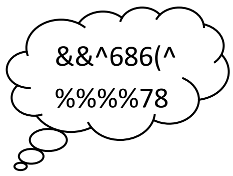
Λύση:

i) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1)+\alpha x_1=f(x_2)+\alpha x_2$

$\Rightarrow \alpha x_1=\alpha x_2$ ……………………….γιατί $f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1=x_2$ ……………………….γιατί $\alpha \neq 0$



Άρα η f είναι 1-1.

ii) $(f \circ f)(x) = f(x) + ax \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x) + ax$

$\overset{x=0}{\Leftrightarrow} (f \circ f)(x) = f(x) + ax$

$\Leftrightarrow f(f(0)) = f(0)$

$\Leftrightarrow f(0) = 0$ γιατί η f είναι 1-1.

17) Εάν $f(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}+x$, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

Λύση: $A_f=(0,+\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{e}{x^2} + 1 > 0$ γιατί $x>0$.

Παρατήρηση:
Η μονοτονία μπορεί να δειχθεί και κατασκευαστικά.

Άρα είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x$ ………………… γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα (παρατήρηση 25)

$\Leftrightarrow \ln x-\dfrac{e}{x}+x=x$

$\Leftrightarrow \ln x-\dfrac{e}{x}=0$ ……………………………………………………………………..(1)

Θέτω g(x)=lnx-$\frac{e}{x}$.

$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{e}{x^2}>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1.

(1)$\Leftrightarrow$ g(x)=0

$\Leftrightarrow$ g(x)=g(e)………………………………γιατί g(e)=lne-$\frac{e}{e}$ =1-1=0

$\Leftrightarrow$ x=e………………γιατί g είναι 1-1.

18) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f:R*→R αν γνωρίζουμε ότι είναι 1-1 και για κάθε x≠0 ικανοποιεί την σχέση $(f\circ f)(x)\cdot f(x)=\alpha$, όπου α≠0.

Λύση:

$(f\circ f)(x)\cdot f(x)=\alpha \Leftrightarrow$ f(f(x))·f(x)=α ……………………………………………………….(1)

Η (1) για x=f(x) γίνεται f(f(f(x)))·f(f((x))=α ………………………………………………….(2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ f(f(f(x)))·f(f((x))=f(f(x))·f(x)

$\Rightarrow$ f(f(f(x)))=f(x)

$\Rightarrow$ f(f(x))=x …………………………γιατί είναι 1-1 …………………….(3)

(1)$\overset{(3)}{\Rightarrow}$ xf(x)=α και επειδή x≠0, θα είναι $f(x)=\frac{a}{x}$.

19) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f: *R*→*R* διέρχεται από τα σημεία Α(4,2) και Β(6,1).

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα,

b) να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(1)$,

c) να λύσετε την εξίσωση $f(2+f^{-1}(x^2-x))=1$, x∈R,

d) να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2)-2) < 2$, x∈R.

Λύση:

a) f(4)=2, f(6)=1.

Άρα $x_1=4<6=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(4)=2>1=f(6)=f(x_2)$ και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

b) Επειδή είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

f(4)=2 $\Rightarrow f^{-1}(2)=4$ …………………………………………………………………………(1)

και f(6)=1 $\Rightarrow f^{-1}(1)=6$……………………………………………………………………...(2)

c) $f(2+f^{-1}(x^2-x))=1 \overset{f(6)=1}{\Longleftrightarrow} f(2+f^{-1}(x^2-x))=f(6)$

$\overset{f\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}$ $2+f^{-1}(x^2-x)=6$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(x^2-x)=4$

$\overset{f^{-1}(2)=4}{\Longleftrightarrow}$ $f^{-1}(x^2-x)=f^{-1}(2)$

$\Leftrightarrow$ $f(f^{-1}(x^2-x))=f(f^{-1}(2))$

$\Leftrightarrow$ $x^2-x=2$

$\Leftrightarrow$ $x^2-x-2=0$

Δ=9 και $x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1=2,\ x_2=-1$.

d) $f(f^{-1}(x^2)-2) < 2 \overset{f(4)=2}{\Longleftrightarrow} f(f^{-1}(x^2)-2) < f(4)$

$\overset{f\ \downarrow}{\Longleftrightarrow}$ $f^{-1}(x^2)-2 > 4$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(x^2) > 6$

$\overset{f^{-1}(1)=6}{\Longleftrightarrow}$ $f^{-1}(x^2) > f^{-1}(1)$

$\overset{f^{-1}\ \downarrow}{\Longleftrightarrow}$ $x^2<1$ ……………γιατί f^{-1} γνησίως φθίνουσα (παρατήρηση 27)

$\Leftrightarrow |x|<1$

$\Leftrightarrow -1<x<1$.

20) Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως μονότονη και $f(x+f(y))=f(x+y)+2$, για κάθε $x,y\in R$, να αποδείξετε ότι $f(x)=x+2$.

Λύση: Η σχέση $f(x+f(y))=f(x+y)+2$:……………………………………………………………(1)

- για $y=0$ δίνει $f(x+f(0))=f(x)+2$……………………………………………………………(2)
- για $x=0$ δίνει $f(f(y))=f(y)+2$ ή $f(f(x))=f(x)+2$…………………………………………(3)

Από (2) και (3) $\Rightarrow f(x+f(0))=f(f(x))$……………………………………………………………(4)

(4) $\overset{f\ \text{μονότ.}}{\underset{f\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}}$ $f(x)=x+f(0)$………………………………………………………………………(5)

(1) $\overset{x=y=0}{\Longleftrightarrow}$ $f(f(0)=f(0)+2$………………………………………………………………………(6)

(5) $\overset{x=2}{\Leftrightarrow}$ $f(2)=2+f(0)$………………………………………………………………………………(7)

Από (6) και (7) $\Rightarrow f(f(0))=f(2)$ $\overset{f\ \text{μονότ.}}{\underset{f\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}}$ $f(0)=2$.

(5) $\overset{f(0)=2}{\Longleftrightarrow}$ $f(x)=x+2$.

21) Μια συνάρτηση $f:R^*\to R$ έχει την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$, για κάθε $x,y\in R^*$. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα:

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$.

iv) Αν επιπλέον είναι $f(x)>0$, για κάθε $x>1$, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση:

i) Η σχέση $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ……………………………………………………………………(1)

για x=y δίνει $f(y)-f(y)=f\left(\dfrac{y}{y}\right) \Leftrightarrow f(1)=0$ …………………………………………………(2)

ii) $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=0$

$\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=1$ …..γιατί η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x=1$

$\Rightarrow x_1=x_2$ λόγω της (2)

Άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

iii) $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1) \Leftrightarrow f(x^2+3)-f(x^2+1)=f(x+1)-f(x)$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)=f\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2+1}=\frac{x+1}{x}$$ …………………γιατί είναι 1-1

………………………………

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

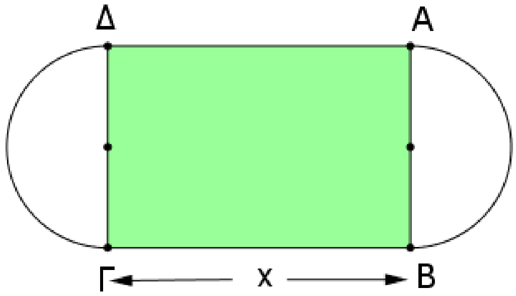
$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

iv) Έστω $x_1>x_2>0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}>1 \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)>0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $(x_1)-f(x_2)>0$ $(x_1)>f(x_2)$.

Άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

22) Θέλουμε να κατασκευάσουμε στάδιο ολυμπιακών διαστάσεων, με περίμετρο 400m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



i. Εάν ο αγωνιστικός χώρος (σκούρα περιοχή) έχει μήκος xm, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ δίνεται από τη συνάρτηση $AB(x)=\frac{400-2x}{\pi}$, με $0<x<200$.

ii. Να δείξετε ότι ο αγωνιστικός χώρος έχει εμβαδόν $E(x)=\frac{2}{\pi}(200x-x^2)$, με $0<x<200$.

iii. Να δείξετε ότι ο αγωνιστικός χώρος έχει μέγιστο εμβαδόν, όταν x=100m.

<u>Λύση</u>:

i. Εάν (ΑΒ)=y είναι το πλάτος του σταδίου, τότε τα δυο ημικύκλια έχουν ακτίνα $\rho=\frac{y}{2}$.

Τα δυο ημικύκλια δίνουν έναν κύκλο, με περίμετρο $L=2\pi\rho=2\pi\frac{y}{2}=\pi y$.

$\Pi=400 \Leftrightarrow (ΒΓ)+(ΑΔ)+L=400$

$\Leftrightarrow 2x+\pi y=400$

$\Leftrightarrow y=\frac{400-2x}{\pi}$, με $400-2x>0 \Leftrightarrow x<200$ και επειδή $x>0$, θα είναι $0<x<200$.

Άρα $AB(x)=\frac{400-2x}{\pi}$, με $0<x<200$.

ii. $E=xy=x\frac{400-2x}{\pi}=\frac{400x-2x^2}{\pi}=\frac{2}{\pi}(200x-x^2)$.

Άρα $E(x)=\frac{2}{\pi}(200x-x^2)$, με $0<x<200$.

iii. <u>*1ος τρόπος*</u>:

Το εμβαδόν E(x) γίνεται μέγιστο, όταν και η συνάρτηση $f(x)=200x-x^2$ γίνει μέγιστη.

$y=200x-x^2 \Leftrightarrow x^2-200x+y=0$……………………………………….(1)

Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή $0<x<200$, πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 40.000-4y\geq 0$

$\Leftrightarrow y\leq 10.000$.

Άρα η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή y=10.000, όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{200}{2}=100$m

και επομένως και το εμβαδόν του αγωνιστικού χώρου γίνεται μέγιστο, όταν x=100m.

<u>*2ος τρόπος*</u>:

$E'(x)=\frac{2}{\pi}(200-2x)$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=100$m

x	0	100	200
E΄(x)	+	0	-
E(x)	↗		↘

Το εμβαδόν του αγωνιστικού χώρου γίνεται μέγιστο, όταν x=100m.

23) Δίνεται η παραβολή $y=x^2$ και η ευθεία (ε): y=-x-1.

i. Εάν M(x,y) τυχαίο σημείο της παραβολής, να βρείτε την απόσταση d του σημείου Μ από την ευθεία (ε), ως συνάρτηση της τετμημένης x του σημείου Μ.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, για x=-1/2 και ότι η ελάχιστη απόσταση ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Λύση:

i. (ε): y=-x-1 ⇔ x+y+1=0. Άρα Α=1, Β=1 και Γ=1.

$M(x,x^2)$ ⇔ $x_0=x$ και $y_0=x^2$.

$d=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|x+x^2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2}}$, γιατί $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in R$, αφού Δ=-3<0.

Άρα $d(x)=\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2}}$.

ii. *1ος τρόπος*: Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, όταν ο αριθμητής $y=x^2+x+1$ γίνει ελάχιστος.

Έχουμε $y=x^2+x+1$ ⇔ $x^2+x+1-y=0$……………………………………………………..(1)

Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\geq 0$

⇔ $1-4(1-y)\geq 0$

⇔ $y\geq 4/3$.

Άρα ο αριθμητής παίρνει ελάχιστη τιμή το 4/3, όταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{1}{2}$.

Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(1/2)=\ldots=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

2ος τρόπος: Θέτω $f(x)=x^2+x+1$.

$f'(x)=2x+1$.

$f'(x)=0$ ⇔ $2x+1=0$ ⇔ $x=-\frac{1}{2}$.

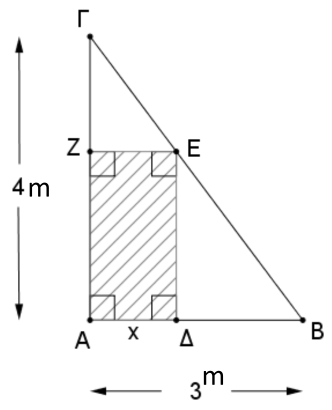
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f΄(x)	+	0	-
f(x)	↘		↗

Άρα ο αριθμητής παίρνει ελάχιστη τιμή, όταν $x=-\frac{1}{2}$.

24) Στην πλευρά ΑΒ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$, ΑΒ=3m, ΑΓ=4m), κινείται σημείο Δ. Στο τρίγωνο εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΔΕΖ όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Εάν ΑΔ=x, να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=4x-\frac{4}{3}x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ γίνεται μέγιστο, όταν τα Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα αντίστοιχα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση:

i. Από τα όμοια τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΒΓ έχουμε τις αναλογίες:

$$\frac{\Delta E}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{BA} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{4}=\frac{3-x}{3}$$

$\Leftrightarrow$ ΔΕ= $\frac{4}{3}$(3-x)................................(1)

(ΑΔΕΖ)=ΑΔ·ΔΕ

=x· $\frac{4}{3}$(3-x)......λόγω της (1)

=4x$-\frac{4}{3}x^2$.

Άρα Ε(x) = 4x$-\frac{4}{3}x^2$.

Επειδή το σημείο Δ κινείται μεταξύ Α και Β, είναι 0<x<3.

ii. *<u>1ος τρόπος</u>*: y=4x$-\frac{4}{3}x^2$ $\Leftrightarrow$ $4x^2$-12x+y=0...................(2)

Η εξίσωση (2) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή 0<x<3 πρέπει Δ≥0

$\Leftrightarrow$ 144-16y≥0

$\Leftrightarrow$ y≤9.

Άρα το εμβαδόν έχει μέγιστη τιμή y=9, όταν Δ=0 και η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα

x=$-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=\frac{AB}{2}$.

Άρα το Δ είναι μέσο του ΑΒ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\begin{Bmatrix} \Delta\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ AB \\ \Delta E\ //\ A\Gamma \end{Bmatrix} \Leftrightarrow E\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ B\Gamma$ και

$\begin{Bmatrix} E\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ B\Gamma \\ EZ\ //\ AB \end{Bmatrix} \Leftrightarrow Z\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ A\Gamma.$

<u>2ος τρόπος</u>:

Ε΄(x) = 4$-\frac{8}{3}$x.

Ε΄(x) = 0 $\Leftrightarrow$ 4$-\frac{8}{3}$x=0 $\Leftrightarrow$ x= $\frac{3}{2}$.

x	0	$\frac{3}{2}$	3
Ε΄(x)	+	0	-
Ε(x)	↗		↘

Άρα το εμβαδόν έχει μέγιστη τιμή, όταν x = $\frac{3}{2}$.

25) Δυο θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν άθροισμα 50.

i. Εάν ο ένας από τους δυο αριθμούς είναι x, να υπολογίσετε το γινόμενο των αριθμών, ως συνάρτηση του x.

ii. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο γίνεται μέγιστο, όταν οι αριθμοί είναι ίσοι με το μισό του αθροίσματός τους.

<u>Λύση</u>:

i. Ο άλλος αριθμός είναι y=50-x...............................(1)

Το γινόμενο των αριθμών είναι Γ=xy=x·(50-x)......λόγω της (1)

=50x-x^2.

Άρα Γ(x)=50x-x^2, με 0<x<50.

ii. *<u>1ος τρόπος</u>*: Γ=50x-x^2 $\Leftrightarrow$ x^2-50x+Γ=0....................................(2)

Η εξίσωση (2) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή 0<x<50 πρέπει Δ≥0

$\Leftrightarrow$ 2.500-4Γ≥0

$\Leftrightarrow \Gamma \leq 625$.

Άρα το γινόμενο Γ γίνεται μέγιστο $\Gamma_{max}=625$, όταν Δ=0 και η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα

$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{50}{2}=25$ και (1) $\Leftrightarrow$ y=50-25=25=x.

2ος τρόπος: Γ΄(x)=50-2x.

Γ΄(x)=0 $\Leftrightarrow$ 50-2x=0 $\Leftrightarrow$ x=25.

x	0	25	50
Γ΄(x)	+	0	-
Γ(x)	↗		↘

Άρα το γινόμενο Γ γίνεται μέγιστο, όταν x=25 και (1) $\Leftrightarrow$ y=50-25=25=x.

26) Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κατοικία, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εμβαδού 100m^2 και ύψους 2,5m.

i. Να αποδείξετε ότι η ολική επιφάνεια της κατοικίας (τοίχων και πλάκας) δίνεται από την συνάρτηση $E_{ολ}(x)=\frac{5x^2+100x+500}{x}$, όπου x είναι η μια πλευρά της βάσης της κατοικίας.

ii. Βάσει των απαιτήσεών μας προς τον μηχανικό, πρέπει να έχουμε την μικρότερη εκπομπή θερμότητας από την κατοικία προς το περιβάλλον. Να αποδείξετε ότι αυτή η συνθήκη πληρούται, όταν η βάση της κατοικίας είναι τετράγωνο.

Λύση:

i. Εάν y η άλλη πλευρά της βάσης, τότε xy=100……………………..(1)

$\Leftrightarrow y=\frac{100}{x}$ ……………………..(2)

Η ολική επιφάνεια της κατοικίας (τοίχων και πλάκας) είναι:

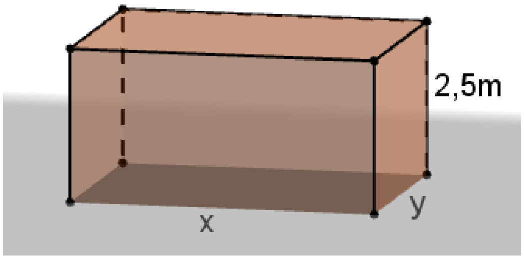
$E_{ολ}=E_{π}+E_{πλακας}$

$=2(2,5\cdot x+2,5\cdot y)+xy$

$=5x+5y+100$……………………... λόγω της (1)

$=5x+\frac{500}{x}+100$……………………... λόγω της (2)

$=\frac{5x^2+100x+500}{x}$, με x>0.



Άρα $E_{ολ}(x)=\frac{5x^2+100x+500}{x}$, x>0.

ii. Για να έχουμε την μικρότερη εκπομπή θερμότητας από την κατοικία προς το περιβάλλον, πρέπει η $E_{ολ}$ να γίνει ελάχιστη.

1ος τρόπος: $E_{ολ}=\frac{5x^2+100x+500}{x} \Leftrightarrow 5x^2+(100-E_{ολ})x+500=0$……………………..(3)

Η εξίσωση (3) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή x>0 πρέπει Δ≥0

$\Leftrightarrow (100-E_{ολ})^2-10.000\geq 0$

$\Leftrightarrow (100-E_{ολ})^2\geq 10.000$

$\Leftrightarrow |100-E_{ολ}|\geq 100$

$\Leftrightarrow 100-E_{ολ}\geq 100$ ή $100-E_{ολ}\leq -100$

$\Leftrightarrow E_{ολ}\leq 0$ ή $E_{ολ}\geq 200$

και επειδή $E_{ολ}\geq 0$

$\Leftrightarrow E_{ολ}\geq 200$.

Άρα το $E_{ολ}$ γίνεται ελάχιστο $E_{min}=200m^2$, όταν Δ=0 και η εξίσωση (3) έχει διπλή ρίζα:

x=$-\frac{\beta}{2\alpha}$ = $\frac{E_{min}-100}{10} = \frac{200-100}{10}$ =10m και η σχέση (2) δίνει y= $\frac{100}{10}$ =10m=x και η βάση της κατοικίας είναι τετράγωνο πλευράς 10m.

2ος τρόπος: $E_{ολ}(x)=\frac{5x^2+100x+500}{x}$ =5x+100+$\frac{500}{x}$, x>0.

$E'_{ολ}(x)=5-\frac{500}{x^2}$, x>0.

$E'_{ολ}(x)=0 \Leftrightarrow 5-\frac{500}{x^2}=0 \Leftrightarrow$ x=10m.

$E'_{ολ}(x)>0 \Leftrightarrow 5-\frac{500}{x^2}>0 \Leftrightarrow x^2>100 \Leftrightarrow x>10$, γιατί x>0.

$E'_{ολ}(x)<0 \Leftrightarrow 5-\frac{500}{x^2}<0 \Leftrightarrow x^2<100 \Leftrightarrow 0<x<10$, γιατί x>0.

x	0	10	+∞
$E'_{ολ}(x)$	-	0	+
$E_{ολ}(x)$	↘		↗

Άρα το $E_{ολ}$ γίνεται ελάχιστο, όταν x=10m και η σχέση (2) δίνει y= $\frac{100}{10}$ =10m=x και η βάση της κατοικίας είναι τετράγωνο πλευράς 10m.

27) Ένας κτηνοτρόφος θέλει να περιφράξει μια έκταση 10 στρεμμάτων σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου για βοσκή (1στρέμμα=1.000m²). Να τον βοηθήσετε ώστε να διαλέξει τις διαστάσεις της έκτασης με τέτοιο τρόπο, ώστε η περίφραξη να του στοιχίσει όσο το δυνατόν φθηνότερα.

Λύση:

i. Εάν x και y οι διαστάσεις της έκτασης, τότε xy=10.000……………………..(1)

$\Leftrightarrow$ y= $\frac{10.000}{x}$ ………………………(2)

Η περίφραξη (περίμετρος) είναι:

Π=2x+2y

=2x+$\frac{20.000}{x}$ …………………….. λόγω της (2)

=$\frac{2x^2+20.000}{x}$, με x>0.

Άρα Π(x)= $\frac{2x^2+20.000}{x}$, με x>0.

ii. *1ος τρόπος*: Π=$\frac{2x^2+20.000}{x} \Leftrightarrow$ 2x²-Πx+20.000=0……………………..(3)

Η εξίσωση (3) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή x>0 πρέπει Δ≥0

$\Leftrightarrow$ Π²-160.000≥0

$\Leftrightarrow$ Π²≥160.000

και επειδή Π> 0

$\Leftrightarrow$ Π ≥ 400.

Άρα η περίφραξη Π γίνεται ελάχιστη $Π_{min}$=400m², όταν Δ=0 και η εξίσωση (3) έχει διπλή ρίζα:

x=$-\frac{\beta}{2\alpha}$ = $\frac{Π_{min}}{4} = \frac{400}{4}$ =100m και η σχέση (2) δίνει y= $\frac{10.000}{100}$ =100m=x και η έκταση είναι τετράγωνο πλευράς 100m.

2ος τρόπος: Π(x)= $\frac{2x^2+20.000}{x} = 2x + \frac{20.000}{x}$, με x>0.

Π΄(x)=$2-\frac{20.000}{x^2}$, x>0.

Π΄(x)=0 ⇔ $2-\frac{20.000}{x^2}=0$ ⇔ x=100m.

Π΄(x)>0 ⇔ $2-\frac{20.000}{x^2}$>0 ⇔ x^2>10.000 ⇔ x>100, γιατί x>0.

Π΄(x)<0 ⇔ $2-\frac{20.000}{x^2}$<0 ⇔ x^2<10.000 ⇔ 0<x<100, γιατί x>0.

x	0	100	+∞
$E'_{ολ}(x)$	-	o	+
$E_{ολ}(x)$	↘		↗

Άρα η περίφραξη Π γίνεται ελάχιστη, όταν x=100m και η σχέση (2) δίνει y= $\frac{10.000}{100}$ =100m=x και η έκταση είναι τετράγωνο πλευράς 100m.

28) Δίνεται η ευθεία (ε): x-2y+2=0.

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση της αρχής Ο(0,0) του συστήματος συντεταγμένων από τυχαίο σημείο Μ(x,y) της ευθείας, δίνεται από τη συνάρτηση d(x)=$\frac{1}{2}\sqrt{5x^2+4x+4}$, x∈R.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, όταν x=$-\frac{2}{5}$ και ότι τότε ΟΜ ⊥ (ε).

__Λύση__:

i. (ε): x-2y+2=0 ⇔ y=$\frac{x+2}{2}$...............................(1)

Έστω $M\left(x,\frac{x+2}{2}\right)$ τυχαίο σημείο της ευθείας (ε).

Τότε (ΟΜ)=$\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}$

=$\sqrt{x^2+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}$

= **...** =

=$\frac{1}{2}\sqrt{5x^2+4x+4}$, x∈R.

Άρα d(x)=$\frac{1}{2}\sqrt{5x^2+4x+4}$, x∈R.

ii. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, όταν η παράσταση κ=5x^2+4x+4 (2) γίνει ελάχιστη.

__1ος τρόπος__: (2) ⇔ 5x^2+4x+4-κ=0...(3)

Η εξίσωση (3) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή x∈R, πρέπει Δ≥0

⇔ 16-20(4-κ)≥0

⇔ κ ≥ $\frac{16}{5}$.

Άρα η παράσταση κ και επομένως η απόσταση d γίνεται ελάχιστη $κ_{min}$ = $\frac{16}{5}$, όταν Δ=0 και η εξίσωση (3) έχει διπλή ρίζα x=$-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}$.

__2ος τρόπος__: Θέτω f(x)=5x^2+4x+4.

f΄(x)=10x+4.

f΄(x)=0 ⇔ 10x+4=0 ⇔ x=$-\frac{2}{5}$.

x	-∞	$-\frac{2}{5}$	+∞
f΄(x)	-	o	+
f(x)	↘		↗

Άρα η συνάρτηση f και επομένως η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, όταν x=$-\frac{2}{5}$.

Από την (1) για x=$-\frac{2}{5}$ βρίσκουμε y=$\frac{4}{5}$.

Άρα $M\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$.

Είναι $\lambda_{OM}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{2}{5}}$ =-2 και $\lambda_{\varepsilon}=-\frac{A}{B}=\frac{1}{2}$ οπότε $\lambda_{OM}\cdot\lambda_{\varepsilon}$=-1 και ΟΜ $\perp$ (ε).

29) END.