ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΣΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ & «1-1»

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) f(x)=-x
ii) f(x)=2x-3
iii) f(x)=|x|
iv) $f(x)=5x^3-2$
v) $f(x)=x^2-8x+15$ στα διαστήματα (-∞,4] και [4,+∞)
vi) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ στα διαστήματα (-∞,-1) και (-1,+∞)
vii) f(x)=2|x|+3|x-2|+x.
viii) f(x)=2lnx-3

Λύση:

i) A_f=R.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2+x_1}{x_2-x_1}=-1<0$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο R.

2ος τρόπος:
f ’(x)=(-x)’ =-1<0.
Άρα f γνησίως φθίνουσα στο R.

ii) A_f=R.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2-3-(2x_1-3)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{2x_2-2x_1}{x_2-x_1}=\frac{2\cancel{(x_2-x_1)}}{\cancel{x_2-x_1}}=2>0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

2ος τρόπος:
f ’(x)=(2x-3)’ =2>0.
Άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

iii) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0 \\ -x, & \text{αν } x<0 \end{cases}$.

•Στο [0,+∞) είναι λ=1>0 άρα γνησίως αύξουσα.
• Στο (-∞,0) είναι λ=-1<0 άρα γνησίως φθίνουσα.

iv) A_f=R.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{5x_2^3-2-(5x_1^3-2)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{5x_2^3-5x_1^3}{x_2-x_1}=\frac{5(x_2^3-x_1^3)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{5\cancel{(x_2-x_1)}(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)}{\cancel{x_2-x_1}}$$

2ος τρόπος:
f ’(x)=($5x^3$-2)’ =$15x^2$≥0,
με f ’(x)=0 μόνο για x=0..
Άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

3ος τρόπος: $x_1<x_2\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1^3<x_2^3$
$\Rightarrow 5x_1^3<5x_2^3$
$\Rightarrow 5x_1^3-2<5x_2^3-2$
$\Rightarrow$ $f(x_1)<f(x_2)$ γνησίως αύξουσα στο R.

$=5(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)>0$ άρα f γνησίως αύξουσα, γιατί η παράσταση $x_2^2+x_2x_1+x_1^2$ αν θεωρηθεί ως τριώνυμο ως προς x_2, έχει διακρίνουσα Δ=$-3x_1^2<0$ και επομένως είναι θετικό για κάθε τιμή των x_1 και x_2.

v) A_f=R.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2-8x_2+15-(x_1^2-8x_1+15)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{x_2^2-8x_2-x_1^2+8x_1}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)-8(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{\cancel{(x_2-x_1)}(x_2+x_1-8)}{\cancel{x_2-x_1}}=x_2+x_1-8$$

2ος τρόπος: f ’(x)=(x^2-8x+15)’ =2x-8.
f ’(x)=0⇔x=4.

x	-∞	4	+∞
f ’(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

Άρα f γνησίως αύξουσα στο [4,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο (-∞,4].

•Στο διάστημα (-∞,4], έχουμε: $\begin{cases} x_1<4 \\ x_2<4 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1+x_2<8\Rightarrow x_1+x_2-8<0\Rightarrow \lambda<0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

•Στο διάστημα [4,+∞), έχουμε: $\begin{cases} x_1>4 \\ x_2>4 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1+x_2>8\Rightarrow x_1+x_2-8>0\Rightarrow \lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα.

vi) A_f=R-{-1}.

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{2x_2-1}{x_2+1}-\frac{2x_1-1}{x_1+1}}{x_2-x_1}=\frac{(2x_2-1)(x_1+1)-(2x_1-1)(x_2+1)}{(x_2-x_1)(x_2+1)(x_1+1)}=\frac{-3x_1+3x_2}{(x_2-x_1)(x_2+1)(x_1+1)}=$$

$$\frac{3\cancel{(x_2-x_1)}}{\cancel{(x_2-x_1)}(x_2+1)(x_1+1)}=\frac{3}{(x_2+1)(x_1+1)}.$$

•Στο διάστημα (-∞,-1), έχουμε: $\begin{cases}x_1<-1\\ x_2<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+1<0\\ x_2+1<0\end{cases}\Rightarrow(x_1+1)(x_2+1)>0\Rightarrow\lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-∞,-1).

•Στο διάστημα (1,+∞), έχουμε: $\begin{cases}x_1>-1\\ x_2>-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+1>0\\ x_2+1>0\end{cases}\Rightarrow(x_1+1)(x_2+1)>0\Rightarrow\lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (1,+∞).

vii) Απαλείφουμε τις απόλυτες τιμές:

x	-∞ 0	2	+∞
x	- 0	+	+
x-2	-	- 0	+
|x|	-x 0	x	x
|x-2|	-x+2	-x+2 0	x-2
f(x)	2(-x)+3(-x+2)+x= =-4x+6	2x+3(-x+2)+x= =6	2x+3(x-2)+x= =6x-6

Άρα $f(x)=\begin{cases}-4x+6, & \text{αν x} \in (-\infty,0]\\ 6, & \text{αν x} \in [0,2]\\ 6x-6, & \text{αν x} \in [2,+\infty)\end{cases}$.

•Στο διάστημα (-∞,0], έχουμε λ=…=-4<0 και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-∞,0].
•Στο διάστημα [0,2], έχουμε λ=…=0 και η f είναι σταθερή στο διάστημα [0,2].
•Στο διάστημα [2,+∞), έχουμε λ=…=6>0 και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [2,+∞).

viii) A_f=(0,+∞).

$x_1<x_2$ ⇒ $\ln x_1<\ln x_2$
⇒ $\ln x_1-3<\ln x_2-3$
⇒ $f(x_1)<f(x_2)$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,+∞).

2ος τρόπος:

f ’(x)=(2lnx-3)’ $=\frac{2}{x}$>0, γιατί x>0.

Άρα f γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

2) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:
- **i)** f(x)=2x-1
- **ii)** f(x)=2x-1, x∈(-1,1)
- **iii)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1)
- **iv)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1]
- **v)** $f(x)=x^2-5x+6$
- **vi)** $f(x)=x^2$
- **vii)** $f(x)=-3x^2+1$
- **viii)** f(x)=3συνx-1
- **ix)** $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$.

Λύση:

i) Επειδή λ=…=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοικτό διάστημα (-∞,+∞), επομένως δεν έχει ακρότατα (παρατήρηση 16).

ii) Ομοίως επειδή λ=…=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοικτό διάστημα (-1,1), επομένως δεν έχει ακρότατα (παρατήρηση 16).

iii) Επειδή λ=…=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα -1≤x<1⇒f(-1)≤f(x)<f(1)1⇒-3≤y<1.
Επομένως η f έχει ελάχιστο για x=-1 το f(-1)=-3.
Μέγιστο δεν έχει.

iv) Επειδή λ=…=2>0, η f είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα -1≤x≤1⇒f(-1)≤f(x)≤f(1)⇒-3≤y≤1.
Επομένως η f έχει ελάχιστο για x=-1 το f(-1)=-3 και μέγιστο για x=1 το f(1)=1 (παρατήρηση 17).

v) $f(x)=x^2-5x+6$

$$=x^2-2\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}.$$

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο για x=$\frac{5}{2}$ το $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

<u>2ος τρόπος</u>: $f'(x)=(x^2-5x+6)'=2x-5$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$.

x	$-\infty$	$^5/_2$	$+\infty$
f ’(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[^5/_2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,^5/_2]$.

Άρα παρουσιάζει ελάχιστο για x=$\frac{5}{2}$ το $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ (παρατήρηση 18).

<u>3ος τρόπος</u>: Θέτω f(x)=y

$x^2-5x+6=y \Leftrightarrow x^2-5x+6-y=0$ …………(1)

Η (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\geq0 \Leftrightarrow 25-4(6-y)\geq0$.

$\Leftrightarrow y\geq-^1/_4$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο το $-\frac{1}{4}$ για x=$-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{5}{2}$.

vi) $f(x)=x^2\geq0$ για κάθε $x\in R$. Άρα παρουσιάζει ελάχιστο το 0 για x=0.

vii) $f(x)=-3x^2+1\leq1$ για κάθε $x\in R$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο το 1 για x=0.

viii) $-1\leq$ συνx $\leq1 \Leftrightarrow -3\leq3$συνx$\leq3$

$\Leftrightarrow -3-1\leq3$συνx$-1\leq3-1$

$\Leftrightarrow -4\leq f(x)\leq2$.

Επομένως παρουσιάζει ελάχιστο το -4 για x=2κπ+π, κ∈Z, και μέγιστο το 2 για x=2κπ, κ∈Z.

ix) $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4} \Leftrightarrow x^2-2x+4=yx^2+2xy+4y$

$\Leftrightarrow x^2-2x+4-yx^2-2xy-4y=0$

$\Leftrightarrow (1-y)x^2-2(1+y)x+4(1-y)=0$……………………………………………………(1)

Η (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\geq0 \Leftrightarrow 4(1+y)^2-16(1-y)^2\geq0$

$\Leftrightarrow (1+y)^2-4(1-y)^2\geq0$

….

$\Leftrightarrow -3y^2+10y-3\geq0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq y\leq3$

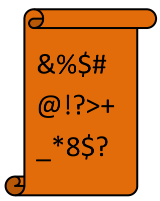
Δ΄=64

y=$\dfrac{-10\pm8}{-6}=$ $\frac{1}{3}$, 3

y	$-\infty$	$^1/_3$		3	$+\infty$
$-3y^2+10y-3$	-	0	+	0	-

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο το $\frac{1}{3}$ και μέγιστο το 3. Για να βρούμε για ποιες τιμές του x παρουσιάζονται, κάνουμε τα παρακάτω:

Για y=$\frac{1}{3}$ είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα x=$-\dfrac{\beta}{2a}=\dfrac{1+y}{1-y}\overset{y=\frac{1}{3}}{=\!=\!=}\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$.



Για y=3 είναι Δ=0 και η (1) έχει διπλή ρίζα x=$-\dfrac{\beta}{2a}=\dfrac{1+y}{1-y}\overset{y=3}{=\!=\!=}\dfrac{1+3}{1-3}=-2$.

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=2 το f(2)=$\frac{1}{3}$ και παρουσιάζει μέγιστο στο x=-2 το f(-2)=3.

3) Να δείξετε ότι αν f, g γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) σε διάστημα Δ και ορίζονται οι συναρτήσεις f∘g και g∘f, να δείξετε ότι και αυτές είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) στα πεδία ορισμού τους.

Λύση: $x_1<x_2 \xRightarrow{f\uparrow} f(x_1)<f(x_2) \xRightarrow{g\uparrow} g(f(x_1))<g(f(x_2)) \Rightarrow (g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$. Άρα g∘f ↗

$x_1<x_2 \xRightarrow{g\uparrow} g(x_1)<g(x_2) \xRightarrow{f\uparrow} f(g(x_1))<f(g(x_2)) \Rightarrow (f\circ g)(x_1)<(f\circ g)(x_2)$. Άρα f∘g ↗

Ομοίως αν είναι ↘.

4) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να λύσετε την ανίσωση $(f\circ g)(x^2-2x)\geq(f\circ g)(x+4)$

Λύση:

$(f\circ g)(x^2-2x)\geq(f\circ g)(x+4) \Leftrightarrow f(g(x^2-2x))\geq f(g(x+4)) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} g(x^2-2x)\geq g(x+4) \overset{g\downarrow}{\Longleftrightarrow} x^2-2x\leq x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,4]$.

Δ=25

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm5}{2}=$ 4, -1

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
x^2-3x-4	+	0	-	0	+

5) Εάν f συνάρτηση ΄΄1-1΄΄, να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+4x)=f(x+4)$.

Λύση: $f(x^2+4x)=f(x+4) \overset{f\ 1\text{-}1}{\Longleftrightarrow} x^2+4x=x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=4$.

6) Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση $(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4)$.

Λύση:

$(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4) \Leftrightarrow f(f(x^2+4x))=f(f(x+4))$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι 1-1. Άρα $f(x^2+4x)=f(x+4) \Leftrightarrow x^2+4x=x+4 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$.

Δ=25 και $x_{1,2}=\dfrac{3\pm5}{2} \Leftrightarrow x_1=4,\ x_2=-1$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+2x+1$.

i) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο R.
ii) Να λύσετε την εξίσωση $x^5+x^3+2x-4=0$.

Λύση:

i) Έστω $x_1<x_2$.

Τότε
$$\left.\begin{aligned} 2x_1&<2x_2\\ x_1^3&<x_2^3\\ \text{και}\quad x_1^5&<x_2^5 \end{aligned}\right\}(+)$$

$x_1^5+x_1^3+2x_1<x_2^5+x_2^3+2x_2 \Rightarrow x_1^5+x_1^3+2x_1+1<x_2^5+x_2^3+2x_2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

2ος τρόπος:
$f'(x)=(x^5+x^3+2x+1)'=x^4+x^2+2>0$, για κάθε $x\in R$.
Άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

ii) $x^5+x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x+1-5=0$

$\Leftrightarrow f(x)-5=0$.

Θέτω $g(x)=f(x)-5$.
Αφού f γνησίως αύξουσα, θα είναι και g γνησίως αύξουσα.
Προφανής ρίζα x=1……………………………………(1)

•Για $x<1 \overset{g\uparrow}{\Longleftrightarrow} g(x)<g(1) \Leftrightarrow f(x)-5<0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x-4<0$ ………………………………………………(2)

•Για $x>1 \overset{g\uparrow}{\Longleftrightarrow} g(x)>g(1) \Leftrightarrow f(x)-5>0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x-4>0$ ………………………………………………(3)

Από (1), (2) και (3) έπεται ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την x=1.

2ος τρόπος:
$x^5+x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^5+x^3+2x+1=5 \Leftrightarrow$
$f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$, γιατί αφού f γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1-1.

8) Να λυθούν οι ανισώσεις:

a) $5^{x^2-x} < 5^{2x-2}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2}$

c) $2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6$

Λύση:

a) $5^{x^2-x} < 5^{2x-2} \Leftrightarrow x^2-x<2x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow x\in(1,2)$.

Γιατί η συνάρτηση $f(x)=5^x$ είναι $\nearrow$ αφού α=5>1.

Δ=1

$x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=$ 2, 1

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2} \Leftrightarrow x^2-x>2x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

Γιατί η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ είναι $\searrow$ αφού $0<α=\frac{3}{4}<1$.

c) $2^{3x-x^2} - x^2 > 2^{6-2x} - 5x + 6 \Leftrightarrow$ (προσθέτουμε 3x)

$2^{3x-x^2} - x^2 + 3x > 2^{6-2x} - 5x + 6 + 3x \Leftrightarrow$

$2^{3x-x^2} + (3x - x^2) > 2^{6-2x} + (6-2x)$ ……………………………………………….(1)

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=2^x+x$. Αυτή είναι γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων $g(x)=2^x$ και $h(x)=x$ (παρατήρηση 10).

Τότε η (1) γίνεται: $f(3x-x^2)>f(6-2x)$ …(γιατί f γνησίως αύξουσα)

$\Leftrightarrow 3x-x^2>6-2x$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6<0$

$\Leftrightarrow x\in(2,3)$.

Δ=1

$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}=$ 3, 2

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

9) Έστω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, x∈R.

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R,
b) να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$,
c) να λυθεί η ανίσωση $3^x+4^x>5^x$.

Λύση:

a) Επειδή $0<\frac{3}{5}<1$ και $0<\frac{4}{5}<1$, οι συναρτήσεις $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ και $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες, άρα και το άθροισμά τους και επομένως και η f(x) θα είναι γνησίως φθίνουσα (παρατήρηση 10).

b) $3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow$ …………(διαιρούμε και τα δυο μέλη με 5^x)

$\frac{3^x}{5^x}+\frac{4^x}{5^x}=\frac{5^x}{5^x} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0 \Leftrightarrow$

2ος τρόπος:
(1) $\Leftrightarrow$ f(x)=f(2) $\Leftrightarrow$ x=2, γιατί αφού f γνησίως φθίνουσα, θα είναι και 1-1.

f(x)=0……………………………………………………………………………………………….(1)

Προφανής ρίζα της (1), x=2………...………………………………………………………….(2)

•Για x<2 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)>f(2) $\Leftrightarrow$ f(x)>0…………………… ……………………………………….(3)

•Για x>2 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)<f(2) ⇔ f(x)<0…………………… ……………………………………………(4)

Από (2), (3) και (4) έπεται ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα την x=2.

c) $3^x+4^x=5^x$ ⇔ ……….. ⇔ f(x)>0 ………. (όπως και στο προηγούμενο ερώτημα)
⇔ f(x)>f(2)
⇔ x<2……….(γιατί f γνησίως φθίνουσα).

10) Έστω $f(x)=\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x-\alpha^2$, με 0<α≠1 και x∈R.
a) Να δείξετε ότι αν α>1 (**0<α<1**) η f είναι γνησίως αύξουσα (**φθίνουσα**) στο R,
b) να λυθεί η εξίσωση $\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x=\alpha^2$, 0<α≠1.

Λύση:

a) $\left.\begin{array}{l}\alpha>1\Leftrightarrow\alpha-1>0\\ \alpha>1\Leftrightarrow\alpha>0\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha(\alpha-1)>0\Rightarrow\alpha^2-\alpha>0.$

Επομένως οι συναρτήσεις α^x και $(\alpha^2-\alpha)x$ είναι γνησίως αύξουσες (?). Άρα και η f είναι γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων (παρατήρηση 10).
Ομοίως όταν 0<α<1.

b) $\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x=\alpha^2$ ⇔ $\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x-\alpha^2=0$ ⇔ f(x)=0……………………………………………(1)
Προφανής ρίζα της (1) x=1…………………………………………………………………(2)

i) Εάν α>1 τότε f γνησίως αύξουσα οπότε:

•Για x>1 $\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)>f(1) ⇔ f(x)>0…………………… ……………………………………………(3)

•Για x<1 $\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)<f(1) ⇔ f(x)<0…………………… ……………………………………………(4)

Από (2), (3) και (4) έπεται ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα την x=1.

ii) Εάν 0<α<1 τότε f γνησίως φθίνουσα οπότε:

•Για x<1 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)>f(1) ⇔ f(x)>0…………………… ………..(5)

•Για x>1 $\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ f(x)<f(1) ⇔ f(x)<0………………………………………………………………(6)

Από (2), (5) και (6) έπεται ότι η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα την x=1.

2ος τρόπος:
(1) ⇔ f(x)=f(1) ⇔ x=1, γιατί αφού f γνησίως μονότονη, θα είναι και 1-1.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.
i) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,+∞).
ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1$.
iii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}-e^{x+2}>\ln\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

Λύση:
i) Προφανές γιατί e^x και ln(x+1) είναι γνησίως αύξουσες.
ii) $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1$ ⇔ $e^{x^2}+\ln(x^2+1)-1>0$ ⇔ $f(x^2)>f(0)$ ⇔ $x^2>0$ ⇔ x≠0.
iii) Πρέπει x>-3……………………………………………………………………………(1)

$$e^{x^2}-e^{x+2}>\ln\frac{x+3}{x^2+1}.\Leftrightarrow e^{x^2}-e^{x+2}>\ln(x+3)-\ln(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}+\ln(x^2+1)>e^{x+2}+\ln(x+3)$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}+\ln(x^2+1)-1>e^{x+2}+\ln(x+3)-1$$

⇔ $f(x^2)>f(x+2)$
⇔ $x^2>x+2$ ……………………(γιατί f γνησίως αύξουσα)
⇔ $x^2-x-2>0$

(*) Δ=9

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm3}{2}=$ 2, -1

x	-∞ -1 2 +∞
x^2-x-2	+ ○ - ○ +

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $x\in(-\infty,-1)U(2,+\infty)$……………………………………………(2)

Από (1) και (2) έχουμε $x\in(-3,-1)U(2,+\infty)$.

12) Έστω $g:(0,+\infty)\to R$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,-2), Β(2,-3) και η συνάρτηση $f(x)=\ln x-g(x)$, $x>0$.

- **i)** Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
- **ii)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x<2+g(x^2)$.

Λύση:

i) $g(1)=-2$ και $g(2)=-3$

Άρα $1<2 \Leftrightarrow -2=g(1) > g(2)=-3$ και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Αφού g γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow$ -g γνησίως αύξουσα (παρατήρηση 8) και επειδή lnx επίσης γνησίως αύξουσα, το άθροισμά τους f(x) θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (παρατήρηση 10).

iii) $2\ln x<2+g(x^2)$ $\Leftrightarrow$ $\ln x^2<2+g(x^2)$

$\Leftrightarrow$ $\ln x^2- g(x^2)< 2$

$\Leftrightarrow$ $f(x^2)<f(1)$……………………….γιατί $f(1)=\ln 1-g(1)=0-(-2)=2$

$\Leftrightarrow$ $x^2<1$……………………………γιατί f γνησίως αύξουσα

$\Leftrightarrow |x|<1$

$\Leftrightarrow$ $-1<x<1$.

13) Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι:

- **i)** $f(0)=0$.
- **ii)** η f είναι περιττή.
- **iii)** η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση:

i) Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$……………………………………………………….(1)

για x=y=0 δίνει f(0)=0.

ii) $(1) \overset{y=-x}{\Rightarrow}$ $f(x-x)=f(x)+f(-x)$

$\Rightarrow f(0)=f(x)+f(-x)$

$\Rightarrow 0=f(x)+f(-x)$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ άρα f περιττή.

iii) $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_2)=f(x_2-x_1+x_1)$

$=f(x_2-x_1)+f(x_1)$……………………λόγω της (1)

$>f(x_1)$…………………….. γιατί $f(x_2-x_1)>0$ επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

14) Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $f(x)+x\le x^2+1\le f(x+1)-x$ για κάθε $x\in R$.

- **i)** Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-x+1$.
- **ii)** Να βρείτε τα ακρότατα της f.

Λύση:

i) $f(x)+x\le x^2+1 \Leftrightarrow f(x)\le x^2-x+1$…………………………………………………………………...(1)

$x^2+1\le f(x+1)-x \Leftrightarrow f(x+1)\ge x^2+x+1 \Leftrightarrow$ $f(y)\ge (y-1)^2+(y-1)+1 \Leftrightarrow$ $f(y)\ge y^2-y+1$

Από (1) και (2) $\Rightarrow f(x)=x^2-x+1$. $\Leftrightarrow$ $f(x)\ge x^2-x+1$………………..(2)

Θέτω $x+1=y \Leftrightarrow x=y-1$

Θέτω $y=x$

ii) Θέτω f(x)=y.

$x^2-x+1=y \Leftrightarrow x^2-x+1-y=0$ ……………………………………………………………………………(3)

Η (3) είναι 2[ου] βαθμού ως προς x και επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow 1-4(1-y)\ge 0 \Leftrightarrow y\ge {}^3/_4$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο το $\frac{3}{4}$ για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{1}{2}$.

15) Να βρεθούν οι αντίστροφες των συναρτήσεων (εφόσον υπάρχουν):

a) f(x)=x^2+4, x≥0,

b) f(x)=$\sqrt{2x-1}$,

c) f(x)=$3e^{x-2}-5$,

d) f(x)=$\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

f) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

g) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

h) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Λύση:

a) • Έστω $x_1,x_2\geq 0$. Τότε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2+4=x_2^2+4$

$\Leftrightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$…………(γιατί $x_1,x_2\geq 0$).

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• y= $x^2+4 \Leftrightarrow x^2=y-4$ ……………………………...(πρέπει y≥4)

$\Leftrightarrow x=\sqrt{y-4}$ ………………………...(γιατί x≥0)

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{y-4}$,

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-4}$, x≥4.

2ος τρόπος: Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (εύκολα αποδεικνύεται κατασκευαστικά), θα είναι και 1-1.

b) • $A_f=[1/2,+\infty)$.

$f(A_f)=[0,+\infty)$.

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{2x_1-1}=\sqrt{2x_2-1}$

$\Leftrightarrow 2x_1-1=2x_2-1$

$\Leftrightarrow 2x_1=2x_2$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• y=$\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y^2=2x-1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{y^2+1}{2}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{y^2+1}{2}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{y^2+1}{2}$, y≥0.

2ος τρόπος: Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (εύκολα αποδεικνύεται κατασκευαστικά), θα είναι και 1-1.

c) • $A_f=R$.

Επειδή $e^{x-2}>0$ για κάθε $x\in R$, $f(x)=3e^{x-2}-5>-5 \Rightarrow f(A_f)=(-5,+\infty)$.

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 3e^{x_1-2}=3e^{x_2-2}$

$\Leftrightarrow e^{x_1-2}=e^{x_2-2}$

$\Leftrightarrow x_1-2=x_2-2$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

• $y=3e^{x-2}-5 \Leftrightarrow e^{x-2}=\dfrac{y+5}{3}$

$\Leftrightarrow x-2=\ln\dfrac{y+5}{3}$, για κάθε y≥-5

$\Leftrightarrow x=2+\ln\dfrac{y+5}{3}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=2+\ln\dfrac{y+5}{3}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=2+\ln\dfrac{x+5}{3}$, $x\in(-5,+\infty)$.

2ος τρόπος: Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (εύκολα αποδεικνύεται κατασκευαστικά), θα είναι και 1-1.

d) • Πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1$

$\Leftrightarrow e^x>e^0$

$\Leftrightarrow$ x>0.

Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

Επειδή $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}<1$, για κάθε x∈R, $\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}<\ln 1$ $\Leftrightarrow$ f(x)<0 $\Leftrightarrow$ $f(A_f)=(-\infty,0)$……………….(1)

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \ln\dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\ln\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}$

$\Leftrightarrow (e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)=(e^{x_2}-1)(e^{x_1}+1)$

$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}+e^{x_1}-e^{x_2}-1=e^{x_1+x_2}-e^{x_1}+e^{x_2}-1$

$\Leftrightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2}$

$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- $y=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \Leftrightarrow e^y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

$\Leftrightarrow e^ye^x+e^y=e^x-1$

$\Leftrightarrow e^x-e^ye^x=1+e^y$

$\Leftrightarrow e^x(1-e^y)=1+e^y$ ………και επειδή y≠0 αφού $0\notin f(A_f)$ άρα $e^y\neq 1$

$\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1+e^y}{1-e^y}$

$\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1+e^y}{1-e^y}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\dfrac{1+e^y}{1-e^y}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$, x∈(-∞,0).

e) • $A_f=f(A_f)=R$

$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^x-\dfrac{1}{e^x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$.

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x_1}-1}{2e^{x_1}}=\dfrac{e^{2x_2}-1}{2e^{x_2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{2x_1}-1}{e^{x_1}}=\dfrac{e^{2x_2}-1}{e^{x_2}}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}-e^{x_2}=e^{2x_2+x_1}-e^{x_1}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}-e^{x_2}-e^{2x_2+x_1}+e^{x_1}=0$

$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}(e^{x_1}-e^{x_2})+(e^{x_1}-e^{x_2})=0$

$\Leftrightarrow (e^{x_1}-e^{x_2})(e^{x_1+x_2}+1)=0$ ……………………και επειδή $e^{x_1+x_2}+1\neq 0$

$\Leftrightarrow e^{x_1}-e^{x_2}=0$

$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- $y=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^{x}} \Leftrightarrow 2e^{x}y=e^{2x}-1$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}y-1=0$$
$$\Leftrightarrow (e^{x})^{2}-2ye^{x}-1=0 \text{ ....(1)}$$

Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού ως προς e^x και έχει λύσεις $e^{x}=y\pm\sqrt{y^{2}+1}$.

Επειδή $e^x>0$, για κάθε $x\in R$, θα είναι $e^{x}=y+\sqrt{y^{2}+1}$ γιατί $y-\sqrt{y^{2}+1}<0$ (?)

Άρα $lne^x=ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right) \Leftrightarrow$ x= $ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right)$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=ln\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R.$$

f) • $A_f=f(A_f)=R$.

$$f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}.$$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x_1}+1}{2e^{x_1}}=\dfrac{e^{2x_2}+1}{2e^{x_2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x_1}+1}{e^{x_1}}=\frac{e^{2x_2}+1}{e^{x_2}}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}+e^{x_2}=e^{2x_2+x_1}+e^{x_1}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x_1+x_2}+e^{x_2}-e^{2x_2+x_1}-e^{x_1}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}(e^{x_1}-e^{x_2})-(e^{x_1}-e^{x_2})=0$$
$$\Leftrightarrow (e^{x_1}-e^{x_2})(e^{x_1+x_2}-1)=0$$
$$\Leftrightarrow e^{x_1}-e^{x_2}=0 \text{ ή } e^{x_1+x_2}-1=0$$
$$\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \text{ ή } e^{x_1+x_2}=1=e^{0}$$
$\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1+x_2=0$
$\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1=-x_2$.

Άρα δεν είναι 1-1 και επομένως δεν αντιστρέφεται. Πχ f(2)=f(-2)= $\dfrac{e^{2}+e^{-2}}{2}$.

g) • $A_f=R$ και $f(A_f)=(-1,1)$..(?)

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}-\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x_1}-1}{e^{2x_1}+1}=\dfrac{e^{2x_2}-1}{e^{2x_2}+1}$

$$\Leftrightarrow (e^{2x_1}-1)(e^{2x_2}+1)=(e^{2x_2}-1)(e^{2x_1}+1)$$
$$\Leftrightarrow \cancel{e^{2x_1+2x_2}}+e^{2x_1}-e^{2x_2}\cancel{-1}=\cancel{e^{2x_1+2x_2}}-e^{2x_1}+e^{2x_2}\cancel{-1}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x_1}-e^{2x_2}=-e^{2x_1}+e^{2x_2}$$
$$\Leftrightarrow 2e^{2x_1}=2e^{2x_2}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x_1}=e^{2x_2}$$
$\Leftrightarrow 2x_1=2x_2$
$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow ye^{2x}+y=e^{2x}-1$

$\Leftrightarrow e^{2x}-ye^{2x}=y+1$

$\Leftrightarrow e^{2x}(1-y)=y+1$ και επειδή $y\neq 1$ γιατί $1\notin f(A_f)=(-1,1)$

$\Leftrightarrow e^{2x}=\dfrac{y+1}{1-y}$

$\Leftrightarrow 2x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{1-y}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$, $x\in(-1,1)$.

h) • $A_f=R^*$ και $f(A_f)=(1,+\infty)$……………………………………………………………………(?)

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x_1}+1}{e^{2x_1}-1}=\dfrac{e^{2x_2}+1}{e^{2x_2}-1}$

$\Leftrightarrow (e^{2x_1}+1)(e^{2x_2}-1)=(e^{2x_2}+1)(e^{2x_1}-1)$

$\Leftrightarrow \cancel{e^{2x_1+2x_2}}-e^{2x_1}+e^{2x_2}\cancel{-1}=\cancel{e^{2x_1+2x_2}}+e^{2x_1}-e^{2x_2}\cancel{-1}$

$\Leftrightarrow -e^{2x_1}+e^{2x_2}=e^{2x_1}-e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x_1}=2e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow e^{2x_1}=e^{2x_2}$

$\Leftrightarrow 2x_1=2x_2$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

- $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \Leftrightarrow ye^{2x}-y=e^{2x}+1$

$\Leftrightarrow ye^{2x}-e^{2x}=y+1$

$\Leftrightarrow e^{2x}(y-1)=y+1$ και επειδή $y\neq 1$ γιατί $1\notin f(A_f)=(1,+\infty)$

$\Leftrightarrow e^{2x}=\dfrac{y+1}{y-1}$

$\Leftrightarrow 2x=\ln\dfrac{y+1}{y-1}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1}$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$, $x \in (1, +\infty)$.

16) Μια συνάρτηση f:R→R έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = f(x) + ax$ για κάθε x∈R, όπου α≠0. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι 1-1

ii) f(0)=0.

Λύση:

i) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1)+αx_1=f(x_2)+αx_2$

$\Rightarrow αx_1=αx_2$ ……………………….γιατί $f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1=x_2$ ……………………….γιατί α≠0

Άρα η f είναι 1-1.

ii) $(f \circ f)(x) = f(x) + ax \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x) + ax$

$\overset{x=0}{\Leftrightarrow} (f \circ f)(x) = f(x) + ax$

$\Leftrightarrow f(f(0)) = f(0)$

$\Leftrightarrow f(0) = 0$ γιατί η f είναι 1-1.

17) Εάν f(x)=lnx-$\frac{e}{x}$+x, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

Λύση: Af=(0,+∞).

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} + 1 > 0$ γιατί x>0.

> **Παρατήρηση**:
> Η μονοτονία μπορεί να δειχθεί και κατασκευαστικά.

Άρα είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$f(x) = f^{-1}(x)$ ⇔ f(x)=x ………………… γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα (παρατήρηση 25)

⇔ lnx-$\frac{e}{x}$+x=x

⇔ lnx-$\frac{e}{x}$=0 …………………………………………………………………….(1)

Θέτω g(x)=lnx-$\frac{e}{x}$.

$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1.

(1)⇔ g(x)=0

⇔ g(x)=g(e)………………………………….γιατί g(e)=lne-$\frac{e}{e}$=1-1=0

⇔ x=e……………..γιατί g είναι 1-1.

18) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f:R*→R αν γνωρίζουμε ότι είναι 1-1 και για κάθε x≠0 ικανοποιεί την σχέση $(f \circ f)(x) \cdot f(x) = \alpha$, όπου α≠0.

Λύση:

$(f \circ f)(x) \cdot f(x) = \alpha \Leftrightarrow$ f(f(x))·f(x)=α …………………………………………………………(1)

Η (1) για x=f(x) γίνεται f(f(f(x)))·f(f((x))=α ………………………………………………………(2)

Από (1) και (2) ⇒ f(f(f(x)))·f(f((x))=f(f(x))·f(x)

⇒ f(f(f(x)))=f(x)

⇒ f(f(x))=x …………………………γιατί είναι 1-1 ……………………(3)

(1) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ xf(x)=α και επειδή x≠0, θα είναι $f(x)=\frac{a}{x}$.

19) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f: $R \to R$ διέρχεται από τα σημεία Α(4,2) και Β(6,1).

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα,

b) να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(1)$,

c) να λύσετε την εξίσωση $f(2+f^{-1}(x^2-x))=1$, x∈R,

d) να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2)-2) < 2$, x∈R.

Λύση:

a) f(4)=2, f(6)=1.

Άρα $x_1=4<6=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(4)=2>1=f(6)=f(x_2)$ και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

b) Επειδή είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$f(4)=2 \Rightarrow f^{-1}(2)=4$ ……………………………………………………………………………(1)

και $f(6)=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=6$……………………………………………………………………………..(2)

c) $f(2+f^{-1}(x^2-x))=1 \overset{f(6)=1}{\Longleftrightarrow} f(2+f^{-1}(x^2-x))=f(6)$

$\overset{f\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow} 2+f^{-1}(x^2-x)=6$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2-x)=4$

$\overset{f^{-1}(2)=4}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(x^2-x)=f^{-1}(2)$

$\Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2-x))=f(f^{-1}(2))$

$\Leftrightarrow x^2-x=2$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0$

Δ=9 και $x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1=2,\ x_2=-1$.

d) $f(f^{-1}(x^2)-2) < 2 \overset{f(4)=2}{\Longleftrightarrow} f(f^{-1}(x^2)-2) < f(4)$

$\overset{f\ \downarrow}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(x^2)-2 > 4$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2) > 6$

$\overset{f^{-1}(1)=6}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(x^2) > f^{-1}(1)$

$\overset{f^{-1}\ \downarrow}{\Longleftrightarrow} x^2<1$ ……………γιατί f^{-1} γνησίως φθίνουσα (παρατήρηση 27)

$\Leftrightarrow |x|<1$

$\Leftrightarrow -1<x<1$.

20) Αν η συνάρτηση f:R→R είναι γνησίως μονότονη και f(x+f(y))=f(x+y)+2, για κάθε x,y∈R, να αποδείξετε ότι f(x)=x+2.

Λύση: Η σχέση f(x+f(y))=f(x+y)+2:…………………………………………………………..(1)

• για y=0 δίνει f(x+f(0))=f(x)+2…………………………………………………………………(2)

• για x=0 δίνει f(f(y))=f(y)+2 ή f(f(x))=f(x)+2…………………………………………………(3)

Από (2) και (3) ⇒ f(x+f(0))=f(f(x))…………………………………………………………….(4)

(4) $\underset{f\ \text{"1-1"}}{\overset{f\ \text{μονότ.}}{\Longleftrightarrow}}$ f(x)=x+f(0)……………………………………………………………….……(5)

(1) $\overset{x=y=0}{\Longleftrightarrow}$ f(f(0)=f(0)+2……………………………………………………………………….(6)

(5) $\overset{x=2}{\Leftrightarrow}$ f(2)=2+f(0)……………………………………………………………………….(7)

Από (6) και (7) ⇒f(f(0))=f(2) $\underset{f\ \ \text{"1-1"}}{\overset{\text{f μονότ.}}{\Longleftrightarrow}}$ f(0)=2.

(5) $\overset{f(0)=2}{\Longleftrightarrow}$ f(x)=x+2.

21) Μια συνάρτηση f:R*→R έχει την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, για κάθε x,y∈R*. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα:

i) Να αποδείξετε ότι f(1)=0.

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$.

iv) Αν επιπλέον είναι f(x)>0, για κάθε x>1, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∝).

Λύση:

i) Η σχέση $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ ……………………………………………………………… (1)

για x=y δίνει $f(y)-f(y)=f\left(\frac{y}{y}\right) \Leftrightarrow f(1)=0$ ………………………………………………… (2)

ii) $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=0$

$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=1$ …..γιατί η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x=1

$\Rightarrow x_1=x_2$ λόγω της (2)

Άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

iii) $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1) \Leftrightarrow f(x^2+3)-f(x^2+1)=f(x+1)-f(x)$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)=f\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x^2+1}=\frac{x+1}{x}$ ………………..γιατί είναι 1-1

……………………………

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$

$\Leftrightarrow x=1$.

iv) Έστω $x_1>x_2>0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}>1 \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)>0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ (x_1)-$f(x_2)>0$ $(x_1)>f(x_2)$.

Άρα είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∝).

22) END