ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

γ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

ε) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ **στ)** $f(x)=e^{-x^2}$

ζ) $f(x)=\ln^2 x$ **η)** $f(x)=x\ln x$

θ) $f(x)=x-\eta\mu x$

ι) $f(x)=2\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi^2 x,\quad x\in(-\pi/2,\pi/2)$.

Λύση:

α) A_f=R-{-3}=(-∞,-3)U(-3,+∞).

$f'(x)=-\dfrac{(x+3)'}{(x+3)^2}=-\dfrac{1}{(x+3)^2}<0.$ Επομένως η f είναι ⤵ στα διαστήματα (-∞,-3) και (-3,+∞).

β) A_f=R-{-1}=(-∞,-1)U(-1,+∞).

$$f'(x)=\frac{(x-2)'(x+1)-(x-2)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{3}{(x+1)^2}>0.$$

Επομένως η f είναι ⤴ στα διαστήματα (-∞,-1) και (-1,+∞).

γ) A_f=R.

$$f'(x)=-\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

• f′(x)=0 ⇔ $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0$

⇔ 2x=0

⇔ x=0.

• f′(x)>0 ⇔ $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}>0$

⇔ -2x>0.....γιατί $(x^2+1)^2>0$ για κάθε $x\in A_f$

⇔ x<0.

f′(x)<0 ⇔ ... ⇔ x>0

x	-∞	0	+∞
f′(x)	+	○	-
f(x)	⤴		⤵

Επομένως η f είναι ⤴ στο διάστημα (-∞,0] και ⤵ στο διάστημα [0,+∞).

δ) A_f=R-{±2}=(-∞,-2)U(-2,2)U(2,+∞).

$$f'(x)=-\frac{(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=-\frac{2x}{(x^2-4)^2}.$$

• f′(x)=0 ⇔ $-\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}=0$

⇔ 2x=0

⇔ x=0.

• f′(x)>0 ⇔ $-\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}>0$

⇔ -2x>0.....γιατί $(x^2-4)^2>0$ για κάθε $x\in A_f$

⇔ x<0.

f′(x)<0 ⇔ ... ⇔ x>0.

x	-∞	-2	0	2	+∞
f′(x)	+	‖	+ ○ -	‖	-
f(x)	⤴	‖	⤴ ⤵	‖	⤵

Επομένως η f είναι ⤴ στα διαστήματα (-∞,-2), (-2,0] και ⤵ στα διαστήματα [0,2) και (2,+∞).

ε) A_f=R-$\{\pm\sqrt{3}\}$=(-∞,-$\sqrt{3}$)U(-$\sqrt{3}$,$\sqrt{3}$)U($\sqrt{3}$,+∞).

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(x^2-3)-x^3(x^2-3)'}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{3x^2(x^2-3)-x^3 2x}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{3x^4-9x^2-2x^4}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}.$$

• f′(x)=0 ⇔ $\dfrac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}=0$

⇔ x=0 (διπλή ρίζα) ή x=-3 ή x=3.

⇔ x=0.

x	-∞	-3	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	3	+∞
f′(x)	+	○ -	‖	- ○ -	‖	- ○	+
f(x)	⤴	⤵	‖	⤵ ⤵	‖	⤵	⤴

Παρατήρηση για το πρόσημο: Επειδή ο παρονομαστής είναι θετικός, το πρόσημο της f′ είναι ίδιο με το πρόσημο του αριθμητή x^4-9x^2.

Ξεκινάμε από το δεξί κουτάκι με το πρόσημο του μεγιστοβάθμιου όρου x^4, δηλαδή + (γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-3x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4)=+\infty$ άρα $x^4-9x^2>0$ κοντά στο +∞) και προχωράμε προς τα αριστερά αλλάζοντας το πρόσημο όταν συναντάμε ρίζες

περιττής τάξης (όπως το -3 και το 3 που είναι ρίζες 1ης τάξης) και μη αλλάζοντας το πρόσημο όταν συναντάμε ρίζες άρτιας τάξης (όπως το 0 που είναι ρίζα 2ης τάξης.

στ) A_f=R.

$f''(x)=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$.

• f′(x)=0 ⇔ $-2xe^{-x^2}$=0

⇔ -2x=0.....γιατί $e^{-x^2}\neq 0$ για κάθε x∈R

⇔ x=0.

• f′(x)>0 ⇔ $-2xe^{-x^2}$>0

⇔ -2x>0 ..... γιατί e^{-x^2}>0 για κάθε x∈R

⇔ x<0.

f′(x)<0 ⇔ ... ⇔ x>0.

x	-∞	0	+∞
f′(x)	+	○	-
f(x)	↗		↘

Επομένως η f είναι ↗ στο διάστημα (-∞,0] και ↘ στο διάστημα [0,+∞).

ζ) $A_f=R_+^*$=(0,+∞).

$f'(x)=2\ln x\cdot(\ln x)'$

$=\dfrac{2\ln x}{x}$.

• f′(x)=0 ⇔ $\dfrac{2\ln x}{x}$=0

⇔ 2lnx=0

⇔ lnx=0

⇔ lnx=ln1

⇔ x=1.

• f′(x)>0 ⇔ $\dfrac{2\ln x}{x}$>0

⇔ 2lnx>0.....γιατί x>0

⇔ lnx>0

⇔ lnx>ln1

⇔ x>1.

f′(x)<0 ⇔ ... ⇔ x<1.

x	0	1	+∞
f′(x)	-	○	+
f(x)	↘		↗

Επομένως η f είναι ↘ στο διάστημα (0,1] και ↗ στο διάστημα [1,+∞).

η) $A_f=R_+^*$=(0,+∞).

$f'(x)=\ln x+1$.

• f′(x)=0 ⇔ lnx+1=0

⇔ lnx=-1

⇔ lnx=$\ln e^{-1}$

⇔ x=e^{-1}=$\dfrac{1}{e}$.

• f′(x)>0 ⇔ lnx+1>0

⇔ lnx>-1

⇔ lnx>$\ln e^{-1}$

⇔ x> e^{-1}

⇔ x>$\dfrac{1}{e}$.

f′(x)<0 ⇔ ... ⇔ x<$\dfrac{1}{e}$.

x	0	1/e	+∞
f′(x)	-	○	+
f(x)	↘		↗

Επομένως η f είναι ↘ στο διάστημα (0,1/e] και ↗ στο διάστημα [1/e,+∞).

θ) A_f=R.

$f'(x)=1-\sigma\upsilon\nu x\geq 0$ για κάθε x∈R με f′(x)=0 μόνο για x=2κπ, κ∈Z.

Επειδή είναι συνεχής, θα είναι ↗ στο R.

ι) $A_f=(-\pi/2,\pi/2)$.

$f'(x)=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-2\varepsilon\phi x\cdot(\varepsilon\phi x)'$

$=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\dfrac{2\varepsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$=\dfrac{2(1-\varepsilon\phi x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

• f′(x)=0 ⇔ $\dfrac{2(1-\varepsilon\phi x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$=0

⇔ 1-εφx=0

⇔ εφx=1

⇔ x=π/4.

• f′(x)>0 ⇔ $\dfrac{2(1-\varepsilon\phi x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$>0

⇔ 1-εφx>0

⇔ εφx<1

⇔ εφx<εφ(π/4)

⇔ x<π/4.

f′(x)<0 ⇔ ... ⇔ x>π/4.

x	-π/2	π/4	π/2
f′(x)	+	○	-
f(x)	↗		↘

Επομένως η f είναι ↗ στο διάστημα (-π/2, π/4] και ↘ στο διάστημα [π/4, π/2).

2) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{2}-2x+x\ln x$.

Λύση: $A_f=(0,+\infty)$.

$f'(x)=x-1+\ln x$

$f''(x)=1+\frac{1}{x}>0$ γιατί x>0.

Άρα η f′ είναι γνησίως αύξουσα.

Η εξίσωση f′(x)=0 έχει προφανή ρίζα x=1 γιατί f′(1)=1-1+ln1=0 και επειδή είναι ↗ είναι μοναδική.

- για x<1 $\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f′(x)<f′(1) ⇔ f′(x)<0 άρα f ↘ στο (0,1]
- για x>1 $\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f′(x)>f′(1) ⇔ f′(x)>0 άρα f ↗ στο [1,+∞).

3) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\ge 0 \\ x^2+2x+3, & x<0 \end{cases}$.

Λύση: Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2x+3)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-x)=0$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και επομένως δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα ούτε παραγωγίσιμη σε αυτό.

Άρα $f'(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ 2x+2, & x<0 \end{cases}$.

x	-∞	-1	0	1/2	+∞
2x-1	-	-	-	0	+
2x+2	-	0	+	+	+
f′(x)	-	0	+	- 0	+
f(x)	↘		↗	↘	↗

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ =f(0)=0 είναι συνεχής στο $x_0=0$ από δεξιά, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ =3≠0=f(0) δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$ από αριστερά.

Επομένως η f είναι ↘ στο διάστημα (-∞,-1], ↗ στο διάστημα [-1,0) γιατί δεν είναι συνεχής από αριστερά στο 0, ↘ στο διάστημα [0, 1/2] γιατί είναι συνεχής από δεξιά στο 0 και ↗ στο διάστημα [1/2,+∞).

4) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x)\ln x+x^2-2x$.

Λύση: $A_f=(0,+\infty)$.

$f'(x)=(2x-4)\ln x+(x^2-4x)\frac{1}{x}+2x-2$

$=(2x-4)\ln x+x-4+2x-2$

$=2(x-2)\ln x+3x-6$

$=2(x-2)\ln x+3(x-2)$

$=(x-2)(2\ln x+3)$.

- f′(x)=0 ⇔ (x-2)(2lnx+3)=0

⇔ x-2=0 ή 2lnx+3=0

⇔ x=2 ή $\ln x=-\frac{3}{2}$

⇔ x=2 ή $x=e^{-\frac{3}{2}}$.

2lnx+3>0 ⇔ lnx>-3/2 ⇔ $x>e^{-\frac{3}{2}}$

2lnx+3<0 ⇔ Lnx<-3/2 ⇔ $x<e^{-\frac{3}{2}}$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	2	+∞
x-2	-	-	0	+
2lnx+3	-	0 +		+
(x-2)(2lnx+3)	+	-		+
f′(x)	+	0 -	0	+
f(x)	↗	↘		↗

Επομένως η f είναι ↗ στο διάστημα (0, $e^{-\frac{3}{2}}$], ↘ στο διάστημα [$e^{-\frac{3}{2}}$,2] και ↗ στο [2,+∞).

5) Εάν f συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο [1,2], f′′(x)>0 για κάθε x∈[1,2] και f′(2)= =f(2)=0, να δείξετε ότι f(x)≥0 για κάθε x∈[1,2].

Λύση: Επειδή f′′(x)>0 για κάθε x∈[1,2] η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2].

Άρα 1≤x≤2 ⇔ f′(1)≤f′(x)≤f′(2)

⇔ f′(x)≤0.

Άρα η f είναι ↘ στο [1,2] και επομένως

1≤x≤2 ⇔ f(1)≥f(x)≥f(2)

⇔ f(x)≥0.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R,

ii) να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ με x∈(-1,1).

Λύση:

i) $f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0 \Rightarrow$ f ↗ στο R.

ii) Αφού η f είναι ↗ είναι «1-1» άρα αντιστρέφεται.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της f είναι

f(R)=$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$=(-1,1) γιατί

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1}$$
$$= \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Άρα $y\in(-1,1)$.

$y = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Leftrightarrow ye^x+y=e^x-1$

$\Leftrightarrow e^x-ye^x=y+1$

$\Leftrightarrow e^x(1-y)=y+1.$

Επειδή $y\in(-1,1) \Rightarrow y\neq1$ και επομένως

$$e^x = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

με $x\in(-1,1)$.

7) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x=2x+3$, $0<\alpha<1$, έχει μοναδική ρίζα στο R.

Λύση: Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-2x-3$, $x\in R$

$f'(x)=\alpha^x\ln\alpha-2<0$ για κάθε $x\in R$, γιατί

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^x>0\\ a<1 \Leftrightarrow \ln a<\ln 1=0\end{array}\right\} \Rightarrow a^x\ln a<0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha^x\ln\alpha-2<-2<0.$

Άρα f ↘ και επειδή είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι $f(R)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)$

$=(-\infty,+\infty)$

γιατί $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha^x-2x-3)$

$=0-\infty-3$.....$(0<\alpha<1)$

$=-\infty$

και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha^x-2x+3)$

$=+\infty+\infty+3$.....$(0<\alpha<1)$

$=+\infty.$

Επειδή $0\in f(R)$, η εξίσωση $f(x)=0$

$\Leftrightarrow \alpha^x=2x+3$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R και επειδή είναι ↘ είναι μοναδική.

8) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2-x$ και $g(x)=2\ln(x-1)$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Λύση: Η τετμημένη των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων, βρίσκεται λύνοντας την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2-x=2\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow 2\ln(x-1)+x-2=0.$

Θεωρώ την συνάρτηση $p(x)=2\ln(x-1)+x-2$ με $x\in(1,+\infty)$.

$p'(x)=\frac{2}{x-1}+1>0$ γιατί $x>1$.

Άρα η συνάρτηση p είναι ↗ στο $(1,+\infty)$.

Η εξίσωση $p(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln(x-1)+x-2=0$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

έχει προφανή ρίζα το 2, γιατί $p(2)=2\ln\overset{1}{1}+2-2=0$ και επειδή είναι ↗ η ρίζα είναι μοναδική.

9) Έστω $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία,

ii) να αποδείξετε ότι $x^e\leq e^x$,

iii) να συγκρίνετε τα e^π και π^e.

Λύση:

i) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0$

  $\Leftrightarrow 1-\ln x=0$

  $\Leftrightarrow \ln x=1$

  $\Leftrightarrow \ln x=\ln e$

  $\Leftrightarrow x=e.$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0$

  $\Leftrightarrow 1-\ln x>0$

  $\Leftrightarrow \ln x<1$

  $\Leftrightarrow \ln x<\ln e$

  $\Leftrightarrow x<e.$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>e.$

x	0	e	+∞
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Επομένως η f είναι ↗ στο διάστημα $(0,e]$ και ↘ στο διάστημα $[e,+\infty)$.

ii) Στο $x_0=e$ παρουσιάζει Ο. Μ. το $f(e)=\frac{\ln e}{e}=$

$=\frac{1}{e}$. Άρα για κάθε x>0: f(x)≤f(e)

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}<\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow e\ln x<x$

$\Leftrightarrow e\ln x<x\ln e$

$\Leftrightarrow \ln x^e<\ln e^x$

$\Leftrightarrow x^e<e^x$.

iii) Από το (ii) ερώτημα έχουμε

$x^e<e^x \overset{x=\pi}{\Rightarrow} \pi^e<e^\pi$.

10) i) Να δείξετε ότι $1-\frac{1}{x}-\ln x<0$ για κάθε x>1.

ii) η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (1,+∞),

iii) αν α>1, β>1 και (α-1)lnβ=(β-1)lnα, τότε α=β.

Λύση:

i) Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$, x≥1.

$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=$

$=\frac{1-x}{x^2}<0$ ....γιατί x>1.

Άρα g ↘ στο [1,+∞) και για x>1 ⇔ g(x)<g(1)

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}-\ln x<0$

ii) $f'(x)=\frac{\frac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}<0$ λόγω του (i) ερωτήματος.

Άρα f ↘ στο (1,+∞).

iii) (α-1)lnβ=(β-1)lnα ⇔ $\frac{\ln a}{a-1}=\frac{\ln \beta}{\beta-1}$

⇔ f(α)=f(β)

⇔ α=β

γιατί αφού f ↘ θα είναι και «1-1».

11) i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x$, 0<α<1,

ii) να λυθεί η εξίσωση

$$\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=\lambda^2-\lambda-2,\ 0<\alpha<1.$$

Λύση:

i) $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha-1<0$ για κάθε x∈R, γιατί

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^x>0\\ a<1\Leftrightarrow \ln a<\ln 1=0\end{array}\right\}\Rightarrow a^x\ln a<0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha^x\ln\alpha-1<-1<0$.

Άρα f ↘ στο R.

ii) $\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=\lambda^2-\lambda-2 \Leftrightarrow$

$\alpha^{\lambda^2-4}-(\lambda^2-4)=\alpha^{\lambda-2}-(\lambda-2)\Leftrightarrow$

$f(\lambda^2-4)=f(\lambda-2)\Leftrightarrow$

$\lambda^2-4=\lambda-2$ ⇔ .....γιατί f ↘ άρα «1-1»

$\lambda^2-\lambda-2=0$ ⇔

λ=-1 ή λ=2.

12) Να δείξετε ότι $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$, x>0.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση

$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$, x>0.

$f'(x)=e^x-1-x$

$f''(x)=e^x-1>0$ γιατί x>0 ⇔ $e^x>e^0=1$.

Άρα f' ↗ στο (0,+∞) και για x>0 ⇔ f'(x)>f'(0)

⇔ f'(x)>0.

Επομένως f ↗στο (0,+∞) και για x>0 ⇔

f(x)>f(0) ⇔

$e^x-1-x-\frac{x^2}{2}>0 \Leftrightarrow$

$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$.

13) i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\frac{4x\ln x}{x+1}$,

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει α∈R, τέτοιο ώστε f(x)≥f(α), για κάθε x>0.

Λύση:

i) $f'(x)=\frac{(4\ln x+4)(x+1)-4x\ln x}{(x+1)^2}$

$=\frac{4x\ln x+4\ln x+4x+4-4x\ln x}{(x+1)^2}$

$=\frac{4\ln x+4x+4}{(x+1)^2}$

$=\frac{4(\ln x+x+1)}{(x+1)^2}$.

Θέτω g(x)=lnx+x+1, x>0.

$g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ άρα g ↗ στο (0,+∞) και επειδή είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι

$g((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)$

=(-∞,+∞) .....γιατί

$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x+x+1)$ =-∞+0+1=-∞ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + x + 1)$ =+∞+∞+1=+∞.

Επειδή 0∈g((0,+∞)), η εξίσωση g(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα α∈(0,+∞) η οποία είναι μοναδική γιατί g ↗.

• f΄(x)=0 ⇔ $\frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2} = 0$

⇔ lnx+x+1=0

⇔ g(x)=0

⇔ x=α.

• f΄(x)>0 ⇔ $\frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2} > 0$

⇔ lnx+x+1>0

⇔ g(x)>0

⇔ g(x)>g(α)

⇔ x>α.....γιατί g ↗ και

f΄(x)<0 ⇔ ... ⇔ x<α.

x	0		α		+∞
f΄(x)		-	0	+	
f(x)		↘		↗	

Επομένως η f είναι ↘ στο διάστημα (0,α] και ↗ στο διάστημα [α,+∞).

ii) Στο x_0=α η f παρουσιάζει Τ.Ε. το f(α). Επομένως για κάθε x∈(0,+∞): f(x)≤f(α).

14) Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x^4+2αx^3+βx^2+3. Να βρείτε τα α, β ώστε για x=1 η f να παρουσιάζει ακρότατο με τιμή f(1)=4. Στην συνέχεια να βρείτε τι ακρότατο είναι αυτό και να βρείτε τα άλλα ακρότατα.

Λύση: f΄(x)=4x^3+6αx^2+2βx.

Επειδή στο x=1 παρουσιάζει ακρότατο και παραγωγίζεται ως πολυωνυμική, λόγω θ. **Fermat** f΄(1)=0 ⇔ 3α+β=-2.....(1)

f(1)=4 ⇔ 2α+β=0.....(2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε α=-2 και β=4.

Άρα f(x)=x^4-4x^3+4x^2+3.

f΄(x)=4x^3-12x^2+8x

=4x(x^2-3x+2).

f΄(x)=0 ⇔ 4x(x^2-3x+2)=0

⇔ x=0 ή x=1 ή x=2.

x	-∞	0		1		2		+∞
f΄(x)	-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	↘		↗		↘		↗	

Άρα στο x=1 παρουσιάζει Τ.Μ., στο x=0 παρουσιάζει Τ.Ε. το f(0)=3 και στο x=2 παρουσιάζει Τ.Ε. το f(2)=3.

15) **i)** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f(x)=x^2lnx-2x^2+5x-3,

ii) Να δείξετε ότι η f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x=1.

Λύση: A_f=(0,+∞).

i) f΄(x)=2xlnx+$x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}}$ -4x+5

=2xlnx+x-4x+5

=2xlnx-3x+5.

f΄΄(x)=2lnx+$\cancel{2x}\frac{1}{\cancel{x}}$ -3

=2lnx+2-3

=2lnx-1.

• f΄΄(x)=0 ⇔ 2lnx-1=0

⇔ lnx= $\frac{1}{2}$

⇔ lnx= $\ln e^{\frac{1}{2}}$

⇔ $x = e^{\frac{1}{2}}$

⇔ x= $\sqrt{e}$.

• f΄΄(x)>0 ⇔ 2lnx-1>0

⇔ lnx> $\frac{1}{2}$

⇔ lnx> $\ln e^{\frac{1}{2}}$

⇔ $x > e^{\frac{1}{2}}$

⇔ x>$\sqrt{e}$.

f΄΄(x)<0 ⇔ ... ⇔ x< $\sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		+∞
f΄΄(x)		-	0	+	
f΄(x)		↘		↗	

Επομένως η f ΄ είναι ↘ στο διάστημα (0,$\sqrt{e}$] και ↗ στο διάστημα [$\sqrt{e}$,+∞).

Άρα στο x_0= $\sqrt{e}$ παρουσιάζει Τ.Ε. επομένως

f΄(x)≥f΄($\sqrt{e}$) ⇔ f΄(x)≥ 2 $\sqrt{e}$ ln $\sqrt{e}$ -3 $\sqrt{e}$ +5

⇔ f΄(x)≥ $\cancel{2}\sqrt{e}\ \frac{1}{\cancel{2}}$ lne-3 $\sqrt{e}$ +5 (1)

⇔ f΄(x)≥ $\sqrt{e}$ -3 $\sqrt{e}$ +5>0

⇔ f΄(x)≥ -2 $\sqrt{e}$ +5>0

γιατί e≈2,718.

Άρα η f είναι ↗ στο διάστημα (0,+∞).

Η εξίσωση f(x)=0 έχει προφανή ρίζα x=1 γιατί f(1)=1^2ln1-2+5-3=5-5=0 και επειδή είναι ↗ η ρίζα είναι μοναδική.

16) (Ε.Μ.Ε) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}+a$, με x>0 και α σταθερό πραγματικό αριθμό. Αν f(x)≥0, για κάθε x>0,

i) αποδείξτε ότι α=-1,

ii) να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

iii) να λυθεί η εξίσωση f(x)=0,

iv) να λυθεί η ανίσωση

$$\ln(2x^2+2)+\frac{1}{2x^2+2}>\ln(x^2+3)+\frac{1}{x^2+3}.$$

Λύση:

i) Επειδή $f(1)=\cancelto{0}{\ln 1}-\alpha+a=0$, η σχέση f(x)≥0 γίνεται f(x)≥f(1), για κάθε x>0.

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=1. Άρα από το θ. **Fermat**, f΄(1)=0.....(1)

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}\overset{x=1}{\Rightarrow}$ f(1)=α+1

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ α+1=0

⇔ α=-1.

ii) Για α=-1 έχουμε $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$.

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

$=\frac{x-1}{x^2}$.

x	0		1		+∞
f΄(x)		-	0	+	
f(x)		↘		↗	

Μονοτονία:

Η συνάρτηση f είναι ↘ στο διάστημα (0,1] και ↗ στο διάστημα [1,+∞).

Ακρότατα:

Στο x_0=1 η συνάρτηση f παρουσιάζει Τ.Ε. το f(1)=0.

Επειδή η εξίσωση f(x)=0 έχει προφανή ρίζα το x=1, και είναι ↘ στο (0,1] η ρίζα είναι μοναδική.

Ομοίως επειδή η εξίσωση f(x)=0 έχει προφανή ρίζα το x=1, και είναι ↗ στο [1,+∞) η ρίζα είναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα το x=1.

iii) $\ln(2x^2+2)+\frac{1}{2x^2+2}>\ln(x^2+3)+\frac{1}{x^2+3}$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2+2)+\frac{1}{2x^2+2}-1>\ln(x^2+3)+\frac{1}{x^2+3}-1$

⇔ f(2x²+2)>f(x²+3).....(2)

Επειδή 2x²+2>2>1, x²+3>3>1, θα είναι 2x²+2∈[1,+∞) και x²+3∈[1,+∞) και επειδή η f είναι ↗ στο [1,+∞), η σχέση (2) δίνει

2x²+2>x²+3 ⇔ x²>1

⇔ |x|>1

⇔ x<-1 ή x>1.

17) Η τιμή μιας μετοχής στο χρηματιστήριο t μήνες από σήμερα και για το επόμενο εξάμηνο δίνεται από την συνάρτηση f(t)=100(-t³+9t²-15t)+c.

i) Εάν η σημερινή της τιμή είναι 5.300€ να βρεθεί πότε πρέπει να την αγοράσουμε και πότε πρέπει να την πουλήσουμε για να έχουμε μέγιστο κέρδος,

ii) να βρεθεί το ποσοστό κέρδους και να το συγκρίνετε με κέρδος που θα προέκυπτε αν καταθέταμε τα χρήματα στην τράπεζα με επιτόκιο 12%.

Λύση:

i. f(0)=5300 ⇔ c=5.300

Άρα f(t)=100(-t³+9t²-15t)+5300.

f΄(t)=100(-3t²+18t-15)

=-300(t²-6t+5).

• f΄(t)=0 ⇔ t²-6t+5=0

⇔ t=1 ή t=5.

t	0	1	5	6
f΄(t)	-	0 +	0 -	
f(t)	↘	↗	↘	

Άρα πρέπει να την αγοράσουμε τον 1ο μήνα γιατί έχει την χαμηλότερη τιμή (f(1)=4.600€) και να την πουλήσουμε τον 5ο μήνα γιατί έχει την υψηλότερη τιμή (f(5)=7.800€).

ii. Το ποσοστό κέρδους είναι:

$$\frac{7.800-4.600}{4.600}\times 100=69{,}56\%$$

Εάν καταθέταμε στην τράπεζα 5.300€ για 6 μήνες με επιτόκιο 12%, θα παίρναμε τόκο $\frac{5.300\cdot 0{,}12}{2}=318$ € και το ποσοστό κέρδους είναι $\frac{318}{5.300}\times 100=6\%$ <<69,56%.

18) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g:R→R με f(x)+x³≤g(x)+α³, για κάθε x∈R, όπου α σταθερός πραγματικός, τέτοιος ώστε f(α)=g(α). Αν f,g παραγωγίσιμες στο α, να δείξετε ότι f΄(α)-g΄(α)=-3α².

Λύση: Θεωρώ την συνάρτηση:

h(x)=f(x)+x³-g(x)-α³, x∈R.

h΄(x)=f΄(x)+3x²-g΄(x) και

$$\left.\begin{array}{l} h(x)\le 0 \\ h(a)=h(a)+a^3-g(a)-a^3=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ h(x)≤h(α).

Άρα η συνάρτηση h παρουσιάζει στο x_0=α Τ.Μ. και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο α, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, λόγω του θ. Fermat, θα είναι h΄(α)=0

$\Leftrightarrow$ f΄(α)+3α²-g΄(α)=0

$\Leftrightarrow$ f΄(α)-g΄(α)=-3α².

19) Δίνεται η συνάρτηση f:R→R με $f^3(x)+f(x)=e^x-x+1$ για κάθε x∈R. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

Λύση: Η δοθείσα για x=0 δίνει

$f^3(0)+f(0)=2 \Leftrightarrow f^3(0)+f(0)-2=0$.....(1)

Θέτω f(0)=ω.....(2)

οπότε η τελευταία γίνεται $\omega^3+\omega-2=0$.....(3)

1	**0**	**1**	**-2**	**1**
↓	1	1	2	
1	1	2	0	

Άρα (3) $\Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+2)=0$

$\Leftrightarrow$ ω=1 ή $\omega^2+\omega+2=0$ η οποία είναι αδύνατη γιατί Δ=-7<0.

Άρα ω=1 $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ f(0)=1.

$f^3(x)+f(x)=e^x-x+1$.....παραγωγίζουμε

$\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+f'(x)=e^x-1$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=e^x-1$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x-1}{3f^2(x)+1}$.

- f΄(x)=0 $\Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{3f^2(x)+1}=0$

  $\Leftrightarrow e^x-1=0$

  $\Leftrightarrow e^x=1=e^0 \Leftrightarrow x=0$.

- f΄(x)>0 $\Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{3f^2(x)+1}>0$

  $\Leftrightarrow e^x-1>0$.....γιατί $3f^2(x)+1>0$

  $\Leftrightarrow e^x>1=e^0 \Leftrightarrow x>0$.

f΄(x)<0 $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ x<0.

x	-∞	0	+∞
f΄(x)	-	○	+
f(x)	↘		↗

Άρα στο x=0 παρουσιάζει Τ.Μ. το f(0)=1.

20) Εάν αlnx≤x-1 για κάθε x∈(0,+∞), με α σταθερό πραγματικό, να δείξετε ότι α=1.

Λύση: αlnx≤x-1

$\Leftrightarrow$ αlnx-x+1≤0.....(1)

Ορίζω την συνάρτηση g(x)=αlnx-x+1, x>0.

g(1)=αln1-1+1=0.

g΄(x)= $\dfrac{a}{x}$ -1.

H (1) $\Leftrightarrow$ g(x)≤0

$\Leftrightarrow$ g(x)≤g(1).

Άρα η g παρουσιάζει Τ.Μ. στο x=1 και επειδή είναι παραγωγίσιμη, από το θ. **Fermat** g΄(1)=0

$\Leftrightarrow$ α-1=0

$\Leftrightarrow$ α=1.

21) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f:R→R, παραγωγίσιμη στο R, με $f^2(x)+x^2=1+2xf(x)$, για κάθε x∈R, δεν έχει ακρότατα.

Λύση: Παραγωγίζουμε την δοθείσα σχέση:

2f(x)f΄(x)+2x=2f(x)+2xf΄(x).....(1)

Εάν είχε ακρότατο στο x_0, τότε επειδή είναι παραγωγίσιμη θα είναι f΄(x_0)=0 (θ. **Fermat**)

$(1) \overset{x=x_0}{\Rightarrow} 2f(x_0)\cancelto{0}{f'(x_0)}+2x_0=2f(x_0)+2x_0\cancelto{0}{f'(x_0)}$

$\Rightarrow 2x_0=2f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0)=x_0$.....(2)

Τότε η δοθείσα σχέση για $x=x_0$ γίνεται

$f^2(x_0)+x_0^2=1+2x_0f(x_0)$.....και λόγω της (2)...

$x_0^2+x_0^2=1+2x_0x_0 \Leftrightarrow 2\cancel{x_0^2}=1+2\cancel{x_0^2}$

$\Leftrightarrow$ 0=1 άτοπο.

Άρα δεν έχει ακρότατα.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

22) (Θέμα 4ο 2000) Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από την συνάρτηση $f(t)=\dfrac{at}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, t≥0 όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά την χορήγηση του φαρμάκου.

i) Να βρείτε τις τιμές α και β. Μονάδες 15

ii) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η τιμή της συγκέντρωσης στο αίμα είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διά-στημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

Λύση:

i. $f'(t)=\dfrac{a\left[1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]-at\cdot 2\frac{t}{\beta}\cdot\frac{1}{\beta}}{\left[1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2}$

$f'(t)=\dfrac{a\left[1-\left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]}{\left[1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2}$, t≥0.

$$\left.\begin{matrix} f(6)=15 \\ f'(6)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6\alpha}{1+\frac{36}{\beta^2}}=15 \\ \alpha\left[1-\frac{36}{\beta^2}\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha=15+\frac{540}{\beta^2} \\ \beta=\pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=6 \end{cases}.$$

γιατί β>0.

Επομένως $f(t)=\frac{5t}{1+\frac{t^2}{36}}=\frac{180t}{36+t^2}$.

ii. $f(t)\geq 12 \Leftrightarrow \frac{180t}{36+t^2}\geq 12$

$\Leftrightarrow 12t^2-180t+432\leq 0$

$\Leftrightarrow t^2-15t+36\leq 0$.....(1)

t	0	3	12	+∞
$t^2-15t+36$	+	0	- 0	+

Η (1) $\Leftrightarrow 3\leq t\leq 12$

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ως 12 ώρες μετά την χορήγησή του.

23) (Θέμα 3ο 2001) Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει:

$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$, για κάθε $x\in R$, όπου β,γ πραγματικοί αριθμοί με γ>0 και $\beta^2<3\gamma$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. Μονάδες 10

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 8

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1). Μονάδες 7

Λύση:

i. Παραγωγίζουμε την δοθείσα σχέση:

$3f^2(x)f'(x)+2\beta f(x)f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6 \Leftrightarrow$

$f'(x)\left(3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma\right)=3x^2-4x+6$.....(1)

Η παράσταση $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma$ είναι 2ου βαθμού ως προς f(x) και έχει διακρίνουσα $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$ γιατί $\beta^2<3\gamma$.

Άρα είναι παντού ομόσημο του α, δηλαδή $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma>0$, για κάθε $x\in R$.

Το ίδιο ισχύει και για το $3x^2-4x+6$, δηλαδή $3x^2-4x+6>0$ για κάθε $x\in R$, αφού Δ=-56<0.

Άρα (1) $\Leftrightarrow f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$.....(2)

Από την (2) $\Rightarrow f'(x)\neq 0$ άρα δεν έχει ακρότατα (θ. **Fermat**).

ii. Αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Στην δοθείσα σχέση θέτω:

- x=0: $f^3(0)+\beta f^2(0)+\gamma f(0)=-1$

  $\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+\beta f(0)+\gamma\right)=-1$

Η παράσταση $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma$ είναι 2ου βαθμού ως προς f(0) και έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$ γιατί $\beta^2<3\gamma$. Άρα $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma>0$, οπότε f(0)<0.

- x=1: $f^3(1)+\beta f^2(1)+\gamma f(1)=4$

  $\Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+\beta f(1)+\gamma\right)=4$

Η παράσταση $f^2(1)+\beta f(1)+\gamma$ είναι 2ου βαθμού ως προς f(1) και έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$ γιατί $\beta^2<3\gamma$. Άρα $f^2(1)+\beta f(1)+\gamma>0$, οπότε f(1)>0.

Άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ και από το θ. **Bolzano** θα έχουμε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1) και επειδή είναι ↗ η ρίζα είναι μοναδική.

24) (Θέμα 3ο 2003) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. Μονάδες 3

ii) Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in R$ Μονάδες 6

iii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. Μονάδες 5

Λύση:

i. $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα είναι ↗ και επομένως «1-1» άρα αντιστρέφεται.

ii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αρκεί να δείξουμε ότι $e^x\geq 1+x$ για κάθε $x\in R$.

Αυτό είναι άσκηση του σχολικού βιβλίου οπότε την απόδειξη μπορείτε να την δείτε εκεί. Επειδή όμως αυτός ο ισχυρισμός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις πανελλήνιες, παραθέτουμε την απόδειξή του:

Έστω $g(x)=e^x-1-x$, $x\in R$.

$g'(x)=e^x-1$

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0$

  $\Leftrightarrow e^x=1=e^0$

  $\Leftrightarrow x=0$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x>0$ και

$g'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<0$.

x	-∞	0	+∞
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗

Άρα στο x=0 παρουσιάζει Τ.Ε.

Επομένως $g(x)\geq g(0) \Leftrightarrow e^x-1-x\geq 0$

$\Leftrightarrow e^x\geq 1+x$.

iii. f(0)=0 και f'(0)=1.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

y-f(0)=f΄(0)(x-0) ⇔ y=x που είναι η διχοτόμος 1ου-3ου τεταρτημορίου, άρα ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

25) (Θέμα 3ο 2009) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1),\ x>-1$$

όπου α σταθερός πραγματικός με 0<α≠1.

Α) Αν ισχύει f(x)≥1 για κάθε x>-1, να αποδείξετε ότι α=e. Μονάδες 8

Β) Για α=e,

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ↘ στο διάστημα (-1,0] και ↗ στο διάστημα [0,+∞) Μονάδες 6

ii) αν β,γ∈(-1,0)U(0,+∞) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2). Μονάδες 6

Λύση:

i. $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha-\frac{1}{x+1}$

f(x)≥1 ⇔ f(x)≥f(0).

Επομένως παρουσιάζει Τ.Ε. στο x=0 και επειδή είναι παραγωγίσιμη, από το θ. **Fermat** θα έχουμε f΄(0)=0 ⇔ lnα-1=0

⇔ lnα=1

⇔ lnα=lne

⇔ α=e.

ii. Για α=e,

i. $f(x)=e^x-\ln(x+1)$.

$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$

$f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$.

Άρα η f΄ είναι ↗.

- Η εξίσωση f΄(x)=0 έχει προφανή ρίζα το 0.
- Για x<0 $\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f΄(x)<f΄(0)

  ⇔ f΄(x)<0 άρα η f είναι ↘ στο (-1,0]
- Για x>0 $\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$ f΄(x)>f΄(0)

  ⇔ f΄(x)>0 άρα η f είναι ↗ στο [0,+∞).

ii. Για x∈(1,2) έχουμε:

$\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow$

(f(β)-1)(x-2)+(f(γ)-1)(x-1)=0.

Εφαρμόζουμε για την συνάρτηση

g(x)=(f(β)-1)(x-2)+(f(γ)-1)(x-1)

το θ. **Bolzano** στο διάστημα [1,2].

- g συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική.
- g(1)=-f(β)+1<0 γιατί f(x)≥1 για κάθε x>-1
  g(2)=f(γ)-1>0 γιατί f(x)≥1 για κάθε x>-1

  με f(x)=1 μόνο για x=0∉[1,2] λόγω του (i) ερωτήματος. ⇒

⇒ g(1)·g(2)<0.

Άρα εφαρμόζεται το θ. Bolzano και η εξίσωση g(x)=0 ⇔ (f(β)-1)(x-2)+(f(γ)-1)(x-1)=0

$$\Leftrightarrow \frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

26) (Θέμα Γ 2010) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ x\in R.$$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$. Μονάδες 7

Λύση:

Γ1. $f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}$

$=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0$ γιατί το τριώνυμο $x^2+x+1>0$ αφού Δ=-3<0.

Άρα f ↗ στο R.

Γ2. $2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$

⇔ $2x^2-6x+4=\ln[(3x-2)^2+1]-\ln(x^4+1)$

⇔ $2x^2+\ln(x^4+1)=6x-4+\ln[(3x-2)^2+1]$

⇔ $2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln[(3x-2)^2+1]$

⇔ $f(x^2)=f(3x-2)$

$\overset{f\uparrow}{\underset{f\text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}}$ $x^2=3x-2$ ⇔ $x^2-3x+2=0$

⇔ x=1 ή x=2.

27) (Θέμα Γ 2011) Δίνεται η συνάρτηση f:R→R, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f΄(0)=f(0)=0 η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε x∈R.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-x)$, x∈R Μονάδες 8

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 3

iii. .....

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Μονάδες 7

Λύση:

i. $e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$

$\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)$

$\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf''(x)-f'(x)-xf''(x)=e^x$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x-1)+f''(x)(e^x-x)=e^x$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)'+f''(x)(e^x-x)=e^x$

$\Leftrightarrow [f'(x)(e^x-x)]'=(e^x)'$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x+c$.....(1)

$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ c=-1.

Άρα $f'(x)(e^x-x)=e^x-1$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{(e^x-x)'}{e^x-x}$ ← γιατί $e^x-x\neq0$ δικ/ση στο τέλος

$\Leftrightarrow f'(x)=(\ln(e^x-x))'$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln(e^x-x)+k$ .....(2)

$(2) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ k=0

Άρα $f(x)=\ln(e^x-x)$.

Θέτω $g(x)=e^x-x$, $x\in R$. Τότε $g'(x)=e^x-1$

- $g'(x)=0$ $\Leftrightarrow e^x-1=0$ $\Leftrightarrow e^x=1=e^0 \Leftrightarrow x=0$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x>0$
  $g'(x)<0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<0$

x	-∞	0	+∞
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗

Άρα η g παρουσιάζει Τ.Ε. στο x=0 επομένως $g(x)\geq g(0) \Leftrightarrow e^x-x\geq1$. Άρα $e^x-x\neq0$.

ii. $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ και επειδή $e^x-x>0$ οι ρίζες και το πρόσημο της f΄ είναι ίδια με τις ρίζες και το πρόσημο του e^x-1 που το έχουμε εξετάσει στο ένθετο προηγουμένως.

x	-∞	0	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Άρα η συνάρτηση f είναι ↘ στο (-∞,0] και ↗ στο [0,+∞).

Στο x_0=0 έχει Τ.Ε. το f(0)=0.

iii. .....

iv. $\ln(e^x-x)=\text{συν}x \Leftrightarrow \ln(e^x-x)-\text{συν}x=0$

$\Leftrightarrow f(x)-\text{συν}x=0$.

Έστω $h(x)=f(x)-\text{συν}x$ συνεχής στο [0,π/2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$\left.\begin{array}{l} h(0)=-\text{συν}0=-1 \\ h(\pi/2)=f(\pi/2)>f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow h(0)\cdot h(\pi/2)<0$ και από το θ. **Bolzano** η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow \ln(e^x-x)=\text{συν}x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,π/2) και επειδή $h'(x)=f'(x)+\eta\mu x>0$ στο (0,π/2) είναι μοναδική.

γιατί ημx>0 στο (0,π/2) και f΄(x)>0 όταν x>0.

28) (Θέμα Γ 2012) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, x>0.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι ↘ στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και ↗ στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, x>0 έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες. Μονάδες 6

iii. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγουμένου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$. Μονάδες 6

Λύση: Η f είναι συνεχής στο (0,+∞). Άρα

i. $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$, x>0

- Όταν $x\in(0,1)$ τότε $x-1<0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x}<0$ και $x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln1 \Leftrightarrow \ln x<0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}<0$ άρα ↘ στο (0,1].

- Όταν $x\in(1,+\infty)$ τότε $x-1>0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x}>0$ και $x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln1 \Leftrightarrow \ln x>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}>0$ άρα ↗ στο [1,+∞).

- $f(\Delta_1) \overset{f\downarrow}{=} \left[f(1), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)=(-1,+\infty)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}((x-1)\ln x-1)$

$=-1\cdot(-\infty)-1$

$=+\infty$.

• $f(\Delta_2) \overset{f\uparrow}{=} \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-1,+\infty)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left((x-1)\ln x - 1\right)$

$=+\infty\cdot(+\infty)-1$

$=+\infty.$

Άρα $f(A_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)$

$=(-1,+\infty)\cup(-1,+\infty)$

$=(-1,+\infty).$

ii. $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=2013$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012$

$\Leftrightarrow f(x)=2012$.....(1)

• Επειδή $2012\in f(\Delta_1)=(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, η εξίσωση $f(x)=2012 \Leftrightarrow x^{x-1}=e^{2013}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Δ_1 και επειδή είναι ↘ στο Δ_1, μοναδική.

• Επειδή $2012\in f(\Delta_2)=(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, η εξίσωση $f(x)=2012 \Leftrightarrow x^{x-1}=e^{2013}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Δ_2 και επειδή είναι ↗ στο Δ_2, μοναδική.

Άρα έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες $x_1\in(0,1)$ και $x_2\in(1,+\infty)$.

iii. Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την $g(x)=f'(x)+f(x)-2012$ στο διάστημα (x_1,x_2).

• g συνεχής στο (x_1,x_2) ως διαφορά συνεχών.

• $g(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012$

$=f'(x_1)+\cancel{2012}-\cancel{2012}$.....**γιατι x_1 ρίζα της (1)**

$=f'(x_1)<0$..... **γιατι από το (i) ερώτημα $f'(x)<0$ στο $(0,1)$.**

$g(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012$

$=f'(x_2)+\cancel{2012}-\cancel{2012}$.....**γιατι x_2 ρίζα της (1)**

$=f'(x_2)>0$..... **γιατι από το (i) ερώτημα $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$.**

Άρα $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$ και επομένως υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)-2012=0$

$\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012.$

Παρατήρηση: Το ερώτημα μπορεί να επιλυθεί και με το θ. **Rolle** για την συνάρτηση $h(x)=e^x f(x)-2012e^x$ στο διάστημα (x_1,x_2).

29) ***ΘΕΜΑ 3ο (2002)***

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f\circ g$ είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. Μονάδες 18

Λύση: **α.** $g(x_1)=g(x_2)$

$\Rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2))$

$\Rightarrow (f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$

$\Rightarrow x_1=x_2$.....γιατι η $f\circ g$ είναι 1-1.

β. $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$

$\Rightarrow \cancel{f(x)}+x^3-x=\cancel{f(x)}+2x-1$ .....γιατί η g είναι 1-1

$\Rightarrow x^3-3x+1=0$.....(1)

Έστω $f(x)=x^3-3x+1$.

$f'(x)=3x^2-3$

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0$

$\Leftrightarrow x=\pm1.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Έστω $A_1=(-\infty,-1)$, $A_2=[-1,1]$ και $A_3=(1,+\infty)$.

Επειδή f συνεχής ως πολυωνυμική, θα έχουμε:

• $f(A_1) \underset{\text{στο } (-\infty,-1)}{\overset{f\uparrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-1)\right) = (-\infty,3).$

Επειδή $0\in(-\infty,3)$, η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1, άρα αρνητική και επειδή είναι ↗ είναι μοναδική.

• $f(A_2) \underset{\text{στο } [-1,1]}{\overset{f\downarrow}{=}} [f(1),f(-1)]=[-1,3].$

Επειδή $0\in[-1,3]$, η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή είναι ↘ είναι μοναδική.

$\left.\begin{array}{l} f(0)=1>0 \\ f(1)=-3<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0.$

Άρα λόγω του θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της (1) στο διάστημα (0,1).

Επομένως η ρίζα στο A_2 είναι θετική.

• $f(A_3) \underset{\text{στο } (1,+\infty)}{\overset{f\uparrow}{=}} \left(f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-3,+\infty).$

Επειδή $0\in(-3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_3, άρα θετική.

Άρα η εξίσωση $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

30) Θέμα 4ον θετική-τεχνολογική 2006:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Μονάδες 8

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 5

Λύση:

i) • $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.....(1)

• $x>0$.....(2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ Af=(0,1)U(1,+∞).

$$f'(x)=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{-2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}<0.$$

Άρα είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_1=(0,1)$ και $A_2=(1,+\infty)$.

Άρα $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x),\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

και $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

ii) Επειδή $0\in f(A_1)$ και $0\in f(A_2)$, η εξίσωση f(x)=0 έχει από μια τουλάχιστον ρίζα στα διαστήματα $A_1=(0,1)$ και $A_2=(1,+\infty)$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτά, οι δυο ρίζες είναι μοναδικές.

31. Θέμα 3ον θετική-τεχνολογική 2007:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\pi/2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο. Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 8

Λύση:

i) $f'(x)=3x^2-3$.

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0$

$\Leftrightarrow x=\pm 1$.

x	-∞		-1		1		+∞
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Άρα παρουσιάζει Τ.Μ. στο -1 το $f(-1)=2-2\eta\mu^2\theta$

$=2(1-\eta\mu^2\theta)$

$=2\sigma\upsilon\nu^2\theta$

και Τ.Ε. στο 1 το $f(1)=-2-2\eta\mu^2\theta=-2(1+\eta\mu^2\theta)$.

ii) Έστω $A_1=(-\infty,-1)$, $A_2=[-1,1]$ και $A_3=(1,+\infty)$

• $f(A_1)\overset{f\uparrow}{=\!=}{}^{\text{στο }(-\infty,-1)}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ f(-1)\right)=(-\infty,\ 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$.

Επειδή $\theta\neq\kappa\pi+\pi/2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$ και $0\in(-\infty,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1 και επειδή είναι ↗ είναι μοναδική.

• $f(A_2)\overset{f\downarrow}{=\!=}{}_{\text{στο }[-1,1]}[f(1),f(-1)]=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$.

Επειδή $0\in\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή είναι ↘ είναι μοναδική.

• $f(A_3)\overset{f\uparrow}{=\!=}{}^{\text{στο }(1,+\infty)}\left(f(1),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty\right]$.

Επειδή $0\in\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty\right]$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_3 και επειδή είναι ↗ είναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

32) (Θέμα Γ 2015) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2+1},\ x\in R.$$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (0,+∞). Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μια ακριβώς ρίζα. Μονάδες 8

Λύση:

Γ1. $f'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$=\dfrac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$ για κάθε $x\in R$, με $f'(x)=0$ μόνο για x=0.

Επειδή είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο R.

$$f(R) \overset{f\uparrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right) = (0,+\infty)$$ γιατί

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1}$$

$$=0\cdot 0=0$$

και $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=\!=\!=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Γ2. $f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right) = \frac{e^2}{5}$

$$\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right) = f(2)$$

$$\underset{f\text{"1–1"}}{\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}} e^{3-x}\cdot(x^2+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}\cdot(x^2+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2} \text{.....(1)}$$

Επειδή $\frac{e^3}{2} \in f(R)=(0,+\infty)$, η εξίσωση (1) άρα και η δοθείσα, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο R και επειδή είναι ↗ μοναδική.

33) Πρόκειται να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κασόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου από ένα ορθογώνιο χαρτόνι μήκους 30cm και πλάτους 16cm. Από κάθε γωνία του ορθογωνίου αποκόπτουμε ίσα τετράγωνα και λυγίζουμε προς τα πάνω τα πλαϊνά κομμάτια.

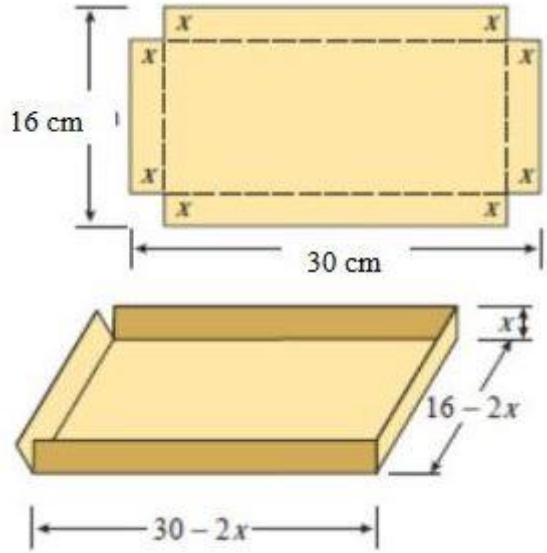
i. Να αποδείξετε ότι το κασόνι έχει όγκο $V(x)=4x^3-92x^2+480x$.

ii. Να βρείτε το μήκος x της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, έτσι ώστε το κασόνι να έχει μέγιστο όγκο.

Λύση:

i. Έχουμε:
- Μήκος χαρτονιού: 30 cm
- Πλάτος χαρτονιού: 16 cm
- Ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε: Όγκος παραλληλεπιπέδου.
- Ζητούμενο: Το μήκος της πλευράς των ίσων τετραγώνων που πρέπει να αποκοπούν από τις γωνιές του χαρτονιού.

Φτιάχνουμε σχήμα με τα δεδομένα του προβλήματός μας.



Έστω x η πλευρά των τεσσάρων ίσων τετραγώνων που θα αποκοπούν από κάθε γωνία του χαρτονιού. Γνωρίζουμε ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο V=αβγ όπου α το μήκος, β το πλάτος και γ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, αντίστοιχα. Έχουμε: α=30-2x, β=16-2x και γ=x.

Άρα $V(x) = (30-2x)(16-2x)x$

$= 4x^3-92x^2+480x.$

Βρίσκουμε πρώτα το διάστημα, στο οποίο ορίζεται η μεταβλητή x.

Από τη στιγμή που η μεταβλητή μας αντιπροσωπεύει μήκος, δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητική. Επομένως: $x\geq 0$.

Η μικρότερη διάσταση του χαρτονιού είναι (16-2x)cm και κατ' επέκταση η μικρότερη πλευρά της βάσης του ορθογωνίου

παραλληλεπιπέδου θα είναι ίση με 16-2x. Έχουμε $16-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 8$.

Αυτό σημαίνει ότι το μήκος x της πλευράς των τετραγώνων, δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 8 cm. Επομένως: $0 \leq x \leq 8$.

ii. $V'(x)=12x^2-184x+480$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-184x+480=0$

$\Leftrightarrow$ **...**

$\Leftrightarrow x=12$ ή $x=10/3$.

x	-∞	0		$10/3$		8		12		+∞
V΄(x)	+		+	0	-		-	0	+	
V(x)			↗		↘					

Άρα ο όγκος γίνεται μέγιστος, όταν $x=10/3$ cm.

34) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 10 cm και Ε, Ζ σημεία των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΕ=xcm και ΓΖ= =2xcm.

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=x^2-5x+50$.

ii. Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδόν Ε(x) ελαχιστοποιείται.

Λύση:

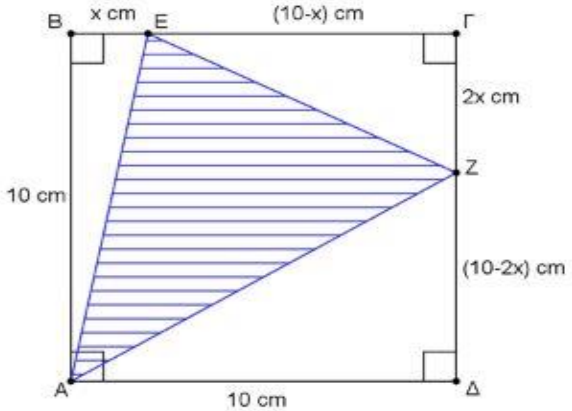
i. Φτιάχνουμε σχήμα με τα δεδομένα του προβλήματός μας.

$(ΑΒΓΔ)=α^2=10^2=100cm^2$.

$(ΑΒΕ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΒΕ=\frac{1}{2}10x=5x$

$(ΕΓΖ)=\frac{1}{2}ΕΓ\cdot ΓΖ=\frac{1}{2}(10-x)2x=10x-x^2$.

$(ΑΔΖ)=\frac{1}{2}ΑΔ\cdot ΔΖ=\frac{1}{2}10\cdot(10-2x)=50-10x$.



$(ΑΕΖ)=(ΑΒΓΣ)-(ΑΒΕ)-(ΕΓΖ)-(ΑΔΖ)$

$=100-5x-10x+x^2-50+10x$

$=x^2-5x+50$.

Προφανώς $x\geq 0$ και $10-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 5$.

Άρα $0\leq x\leq 5$.

Επομένως $E(x)=x^2-5x+50$, $0\leq x\leq 5$.

ii. $E'(x)=2x-5$.

$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=5/2$.

x	-∞	0		$5/2$		5	+∞
E΄(x)			-	0	+		
E(x)			↘		↗		

Το εμβαδόν ελαχιστοποιείται, όταν $x=5/2$.

35) Η συνάρτηση $f(x)=αx^2+βx$, $x\in R$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x=1, την τιμή f(1)=2. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

Λύση: $f'(x)=2αx+β$.

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική, θα είναι παραγωγίσιμη και στο x=1 και επειδή παρουσιάζει ακρότατο στο x=1, από το Θ. Fermat, θα είναι $f'(1)=0 \Leftrightarrow 2α+β=0$.....(1)

$f(1)=2 \Leftrightarrow α+β=2$.....(2)

Από (1) και (2) βρίσκουμε α=-2 και β=4.

36) Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση:

$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x+10$ με $1<x<5$.

i. Να βρείτε την τιμή του $x\in(1,5)$, για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση.

ii. Να υπολογίσετε την κατανάλωση αυτή.

Λύση: $f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$.

i. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.

$\Leftrightarrow$ **...** $\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$.

x	-∞	-1		1		3		5	+∞
f΄(x)	+	0	-		-	0	+		+
f(x)				↘			↗		

Μικρότερη κατανάλωση έχουμε στις 3 χιλιάδες στροφές.

ii. Η μικρότερη κατανάλωση είναι f(3)=7 λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα.

37) Κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο πλευράς x dm και ανοικτό από πάνω, έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας ίσο με 12 dm^2.

i. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του δίνεται από τη συνάρτηση $V(x)=\frac{1}{4}(12x-x^3)$.

ii. Να υπολογίσετε για ποια τιμή του $x\in R$ ο όγκος γίνεται μέγιστος και ποιος είναι ο μέγιστος όγκος.

Λύση:

i. Η ολική επιφάνεια προκύπτει από το άθροισμα της παράπλευρης επιφάνειας που αποτελείται από 4 έδρες διαστάσεων x και y, εμβαδού xy η καθεμία και τη βάση σχήματος τετραγώνου εμβαδού x^2.

Άρα $E_{ολ}=4xy+x^2 \Leftrightarrow 4xy+x^2=12$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4x}(12-x^2)$.....(1)

$V(x)=E_{\beta}\cdot u=x^2y \overset{(1)}{=} \frac{1}{4}(12x-x^3)$.....(2)

με $x\in(0,2\sqrt{3})$..... (?)

ii. $V'(x)=\frac{1}{4}(12-3x^2)$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(12-3x^2)=0$

$\Leftrightarrow 12-3x^2=0$

$\Leftrightarrow x=\pm 2$.

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	$+\infty$
V΄(x)	-		-	0	+		+	0	-		-
V(x)					↗				↘		

Ο όγκος γίνεται μέγιστος, όταν x=2 και ο μέγιστος όγκος είναι $V(2)=4dm^3$.

38) Το κόστος ημερήσιας παραγωγής x τόνων τσιμέντου σε ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)=50+70x+\frac{1}{20}x^2$, x>0. Μία ημερήσια παραγωγή x τόνων, μπορεί να πουληθεί στην τιμή των $270-\frac{3x}{20}$ ευρώ ανά τόνο.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση του κέρδους P, x τόνων παραγωγής, σε ευρώ.

ii. Να υπολογίσετε την ημερήσια παραγωγή, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό.

Λύση:

i. Κόστος ημερήσιας παραγωγής x τόνων τσιμέντου σε ευρώ: $K(x)=50+70x+\frac{1}{20}x^2$, x>0.

Έσοδα από την πώληση των x τόνων ημερήσιας παραγωγής τσιμέντου σε ευρώ: $E(x)=270x-\frac{3x^2}{20}$, x>0.

Κέρδος από την πώληση των x τόνων ημερήσιας παραγωγής τσιμέντου σε ευρώ: $P(x)=E(x)-K(x)$

$=-\frac{1}{5}x^2+200x-50$, x>0.

ii. $P'(x)=-\frac{2}{5}x+200$, x>0.

x	0		500		$+\infty$
P΄(x)		+	0	-	
P(x)		↗		↘	

Το κέρδος P γίνεται μέγιστο, για παραγωγή x=500 τόνους τσιμέντο.

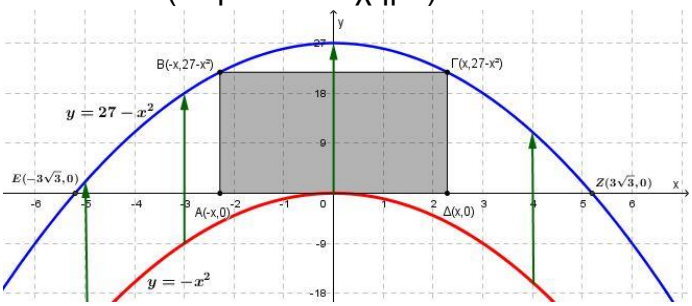
39) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=27-x^2$.

i. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ii. Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει δύο κορυφές στον άξονα των τετμημένων και δύο κορυφές πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση:

i. Η γραφική παράσταση είναι η μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=-x^2$, κατά 27 μονάδες προς τα πάνω (παρακάτω σχήμα).



ii. Έστω Δ(x,0) $0<x<3\sqrt{3}$. Εάν ΑΒΓΔ το ζητούμενο ορθογώνιο, τότε:

$A(-x,0)$, $B(-x, 27-x^2)$, $Γ(x, 27-x^2)$, $Δ(x,0)$.

$(AΔ)=2x$ και $(AB)=27-x^2$.

$E(x)=(ΑΒΓΔ)=(AΔ)\cdot(AB)$

$=2x(27-x^2)$

$=54x-2x^3$, $0<x<3\sqrt{3}$.

$E'(x)=54-6x^2$.

$E'(x)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=\pm 3$.

x	$-\infty$	-3		0		3		$3\sqrt{3}$	$+\infty$
E΄(x)	-	0	+		+	0	-		-
E(x)					↗		↘		

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν x=3 και το μέγιστο εμβαδόν είναι E(3)=108 τ.μ.

40) Ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με $\sqrt{3}$ m περιστρέφεται γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές του και παράγει κώνο.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση του όγκου του κώνου, σε συνάρτηση με το μήκος x της πλευράς που περιστρέφεται.

ii. Να υπολογίσετε την ακτίνα και το ύψος του κώνου που έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τον μέγιστο δυνατό όγκο.

Λύση:

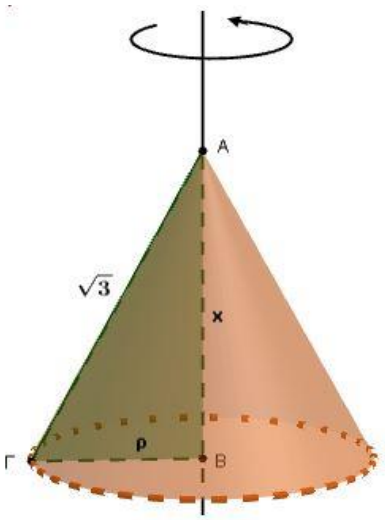
i. Κατασκευάζουμε το σχήμα.

Από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\rho^2=\sqrt{3}^2-x^2 \Leftrightarrow \rho=\sqrt{3-x^2}$, $0<x<\sqrt{3}$.

$V(x)=\frac{1}{3}\pi\rho^2x=\frac{1}{3}\pi(3-x^2)x$

$=\frac{1}{3}\pi(3x-x^3)$, $0<x<\sqrt{3}$.



ii. $V'(x)=\frac{1}{3}\pi(3-3x^2)=\pi(1-x)(1+x)$.

x	$-\infty$	-1		0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
V΄(x)		-		+		+		-	-
V(x)					↗		↘		

Ο όγκος γίνεται μέγιστος, όταν x=1 και ο μέγιστος όγκος είναι $V(1)=\frac{2}{3}\pi$ m³.

41) Θέμα 3ου θετική-τεχνολογική 1999:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει f΄(x)>0 στο (0,1). Αν f(0)=2 και f(1)=4 να δείξετε ότι:

i) Η ευθεία y=3 τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. Μονάδες 7

ii) Υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$ Μονάδες 12

iii) Υπάρχει $x_2\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000.

Μονάδες 6

Λύση:

i) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση f(x)=3 ⇔ f(x)-3=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1).

Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση g(x)=f(x)-3 στο διάστημα [0,1].

- συνεχής στο [0,1] γιατί f συνεχής,
- $\left.\begin{array}{l} g(0)=f(0)-3=2-3=-1<0 \\ g(1)=f(1)-3=4-3=1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(1)<0.$

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 ⇔ f(x)-3=0

⇔ f(x)=3

στο διάστημα (0,1).

ii) Επειδή f΄(x)>0 στο (0,1) και f συνεχής στο [0,1], η f είναι ↗ στο [0,1].

Άρα 0<x<1 ⇒ f(0)<f(x)<f(1)

⇒ 2<f(x)<4 για κάθε $x\in(0,1)$.

Άρα
$$\left.\begin{array}{l} 2<f\left(\frac{1}{5}\right)<4 \\ 2<f\left(\frac{2}{5}\right)<4 \\ 2<f\left(\frac{3}{5}\right)<4 \\ 2<f\left(\frac{4}{5}\right)<4 \end{array}\right\} +$$

$$8<f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)<16 \Leftrightarrow$$

$$2<\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)}{4}<4.$$

Επειδή f(0)=2≠f(1)=4, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η συνάρτηση f παίρνει όλες τις τιμές

μεταξύ f(0)=2 και f(1)=4, άρα και την τιμή $\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)}{4}$.

Άρα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

iii) Επειδή f παραγωγίσιμη στο (0,1) και f συνεχής στο [0,1], από το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $x_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{4-2}{1}=2$.

Επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: y=2x+2000, αφού $\lambda_\varepsilon=f'(x_2)=2$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$ και τα σημεία Α , Β της γραφικής της παράστασης στις θέσεις με τετμημένες αντίστοιχα x , x+1 .

i. Να προσδιορισθεί το x < 0 , ώστε το εμβαδόν Ε(x) του τριγώνου ΑΟΒ όπου Ο(0,0) να γίνεται μέγιστο και να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}E(x)$.

ii. Αν το x μειώνεται με ταχύτητα 2cm/sec , να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι x=-4.

Λύση:

i. $\vec{OA}=(x,e^x)$ και $\vec{OB}=(x+1,e^{x+1})$.

$$E(x)=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} x & e^x \\ x+1 & e^{x+1}\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|xe^{x+1}-(x+1)e^x|$$

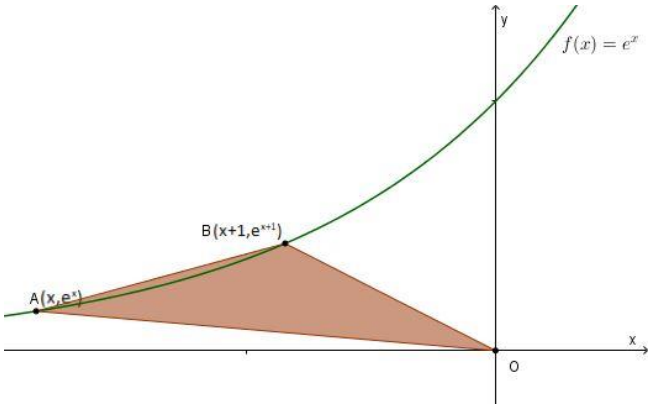
$$=\frac{1}{2}|xe^{x+1}-xe^x-e^x|$$

$$=\frac{1}{2}e^x|xe-x-1|$$

$$=\frac{1}{2}e^x|x(e-1)-1|$$

$$\overset{x<0}{=}\frac{1}{2}e^x(-x(e-1)+1)$$

$$=\frac{1}{2}e^x(1-xe+x).$$



$$E'(x)=\frac{1}{2}e^x(1-xe+x)+\frac{1}{2}e^x(1-e)$$

$$=\frac{1}{2}e^x(2-e+(1-e)x).$$

$$E'(x)=0\Leftrightarrow e^x(2-e+(1-e)x)$$

$$\overset{e^x\neq0}{\Leftrightarrow}2-e+(1-e)x=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2-e}{e-1}.$$

$$E'(x)>0\Leftrightarrow e^x(2-e+(1-e)x)$$

$$\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}2-e+(1-e)x>0$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{2-e}{e-1}.$$

$$E'(x)<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x>\frac{2-e}{e-1}.$$

x	$-\infty$	$\frac{2-e}{e-1}$	0
E΄(x)	+	0	-
E(x)	↗		↘

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν $x=\dfrac{2-e}{e-1}$.

$$\lim_{x\to-\infty}E(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^x\left(1+(1-e)x\right)\right)$$

$$\overset{0\cdot(+\infty)}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{1+(1-e)x}{\frac{1}{e^x}}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+(1-e)x\right)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e}{-\frac{(e^x)'}{(e^x)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e}{\frac{1}{e^x}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left((1-e)e^{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

ii. x(t)=-4cm και x΄(t)= -2cm/sec.

E(x(t))= $\frac{1}{2}$ $e^{x(t)}$(1-ex(t)+x(t)).

E΄(x(t))= $\frac{1}{2}$ $e^{x(t)}$·x΄(t)(1-x(t)e+x(t))+

+ $\frac{1}{2}$ $e^{x(t)}$(1-e)·x΄(t),

οπότε

E΄(-4)= $\frac{1}{2}$ e^{-4}·(-2)(1+4e-4)+ $\frac{1}{2}$ e^{-4}(1-e)·(-2)

$= \frac{2-3e}{e^4}$.

43) (ΕΜΕ 2010) Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)= $= \frac{|1-\ln x|}{x}$, x>0.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Αν η τετμημένη του σημείου M(x,f(x)) μεταβάλλεται με ρυθμό 1 m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E(t) του τριγώνου ΑΟΒ, όπου A(x,0), O(0,0), και B(0,f(x)), τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι x(t_0)=4m.

iii. Αν τη χρονική στιγμή t=0 το σημείο M βρίσκεται στη θέση (1,1) , τότε να αποδείξετε ότι: **α)** x(t)=t+1.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) ελαττώνεται με τον χρόνο όταν t>e-1.

Λύση:

i. Θα γράψουμε την συνάρτηση f χωρίς απόλυτη τιμή.

- 1-lnx=0 ⇔ 1=lnx
  ⇔ x=e.
- 1-lnx>0 ⇔ 1>lnx
  ⇔ lne>lnx
  ⇔ x<e και
- 1-lnx>0 ⇔ … ⇔ x>e. Άρα

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\ln x}{x}, 0<x<e\\ \frac{\ln x-1}{x}, x\ge e\end{cases}.$$

☛ για 0<x<e έχουμε

f΄(x)= $\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)'$ = … = $\frac{\ln x-2}{x^2}$ <0.

☛ για x≥e έχουμε

f΄(x)= $\left(\frac{\ln x-1}{x}\right)'$ = … = $\frac{2-\ln x}{x^2}$.

- f΄(x)=0 ⇔ $\frac{2-\ln x}{x^2}$ =0
  ⇔ 2-lnx=0
  ⇔ 2=lnx
  ⇔ $\ln e^2$=lnx
  ⇔ x=e^2.
- f΄(x)>0 ⇔ $\frac{2-\ln x}{x^2}$ >0 …και επειδή x^2>0
  ⇔ 2-lnx>0
  ⇔ 2>lnx
  ⇔ $\ln e^2$>lnx
  ⇔ e≤x<e^2.
- f΄(x)<0 ⇔ … ⇔ x>e^2.

x	0	e	e^2	+∞
f΄(x)	-	+	○	-
f(x)	↘	↗		↘
		T.E.	T.M.	

Μονοτονία: Στα διαστήματα (0,e] και [e^2,+∞) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα [e,e^2] γνησίως αύξουσα.

Ακρότατα: Στο x=e παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(e)=0 και στο x=e^2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(e^2)=e^{-2}.

ii. x(t_0)=4m και x΄(t_0)=1m/sec.

$\vec{OA}$=(x,0) και $\vec{OB}$=(0,f(x)).

E(x)= $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x & 0\\ 0 & f(x)\end{vmatrix}\right|$

= $\frac{1}{2}$ |xf(x)|

= $\frac{1}{2}$ |1-lnx|

Άρα E(x(t))= $\frac{|1-\ln x(t)|}{2}$.

Επειδή x(t_0)=4m>e, 1-lnx(t_0)<0 οπότε για x>e έχουμε E(x(t))= $\frac{\ln x(t)-1}{2}$.

E΄(x(t))= $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t)}\cdot x'(t)$.

E΄(x(t_0))= $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t_0)}\cdot x'(t_0)$

= $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1$

$=\frac{1}{8}$ m²/sec.

iii. α) x΄(t)=1 ⇔ x(t)=t+c……(1)

$\overset{t=0}{(1)} \Leftrightarrow$ x(0)=0+c

⇔ c=1.

$\overset{c=1}{(1)} \Leftrightarrow$ x(t)=t+1.

β) Για t>e-1 έχουμε E(t)=$\frac{|1-\ln(t+1)|}{2}$.

t>e-1 ⇔ t+1>e ⇔ ln(t+1)>lne

⇔ ln(t+1)>1

⇔ 1-ln(t+1)<0 οπότε

E(t)=$\frac{\ln(t+1)-1}{2}$.

E΄(t) =$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}\cdot(t+1)'=\frac{1}{2(t+1)}$

E΄΄(t) = $-\frac{1}{2}\cdot\frac{(t+1)'}{(t+1)^2}$

$=-\frac{1}{2(t+1)^2}$<0.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής E΄(t) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [e-1,+∞) δλδ ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E΄(t) ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου.

44) (ΕΜΕ 2012) Μια συνάρτηση f:[0,2]→R, είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0,2] και η γραφική παράσταση της f΄ βρίσκεται στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ με Α(0,0), Β(2,0), Γ(2,1) και Δ(0,1). Εάν ισχύει f΄(0)<f΄(2)<f΄(1), τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f΄ τέμνει την ευθεία ΒΔ σε ένα τουλάχιστον σημείο Κ.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε το σημείο $N(x_0,f'(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f΄ να είναι πλησιέστερο στην πλευρά ΓΔ.

iii. Για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος:

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\phi(h)$ όπου

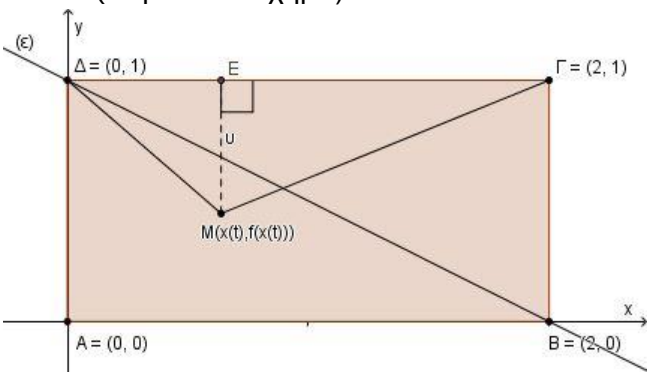
$$\varphi(h)=\frac{[f'(x_0+h)]^2-[f'(x_0-h)]^2}{4h}.$$

β) Ένα σημείο $M(x(t),f'(x(t))$ όπου x(t) μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f΄. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΔΜΓ τη χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στη θέση $N(x_0,f'(x_0))$.

Λύση:

i. Η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση y=$-\frac{1}{2}x+1$.

(παρακάτω σχήμα).



Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x)=f'(x)+\frac{1}{2}x-1.$$

Αφού η γραφική παράσταση της f΄ βρίσκεται στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ, ισχύει 0≤f΄(x)≤1 για κάθε x∈[0,2]……(1)

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο κλειστό [0,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης h(0)=f΄(0)-1<0……(2)

γιατί f΄(0)<f΄(2)<f΄(1)≤1 λόγω της (1) και

h(2)=f΄(2)>0……(3)

γιατί f΄(2)>f΄(0)≥0 λόγω της (1).

Από (2) και (3) ⇒ h(0)h(2)<0 οπότε από το **Θ.Bolzano** η εξίσωση h(x)=0

ή $f'(x)+\frac{1}{2}x-1=0$

ή $f'(x)=\frac{1}{2}x+1$

ή η γραφική παράσταση της f΄ τέμνει την ευθεία ΒΔ σε ένα τουλάχιστον σημείο Κ με τετμημένη x∈(0,2).

ii. Αφού η f΄ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [0,2], έχει μέγιστη τιμή Μ και ελάχιστη τιμή m. Επειδή f΄(0)<f΄(2)<f΄(1), τα Μ και m δεν είναι τα f΄(0) και f΄(2).

Άρα υπάρχει $x_0\in(0,2)$ με $f'(x_0)$=M.

Το σημείο αυτό $N(x_0,f'(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f΄ είναι προφανώς το πλησιέστερο στην πλευρά ΓΔ σημείο της γραφικής παράστασης της f΄.

iii. α) $\varphi(h)=\frac{[f'(x_0+h)]^2-[f'(x_0-h)]^2}{4h}=$

$=\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}\cdot\frac{f'(x_0+h)+f'(x_0-h)}{4}$.

☛ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)+f'(x_0-h)}{4}=\frac{f'(x_0)+f'(x_0)}{4}$

$=\frac{f'(x_0)}{2}$.

☛ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)+f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{h}$

$=f''(x_0)+f''(x_0)=0+0=0$, γιατί

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{h}=$

$\lim\limits_{u\to 0}\frac{f'(x_0+u)-f'(x_0)}{-u}=$

$-\lim\limits_{u\to 0}\frac{f'(x_0+u)-f'(x_0)}{u}=-f''(x_0)$

Θέτω u=-h.
$\lim\limits_{h\to 0} u=0$ και
h=-u

και $f''(x_0)=0$ γιατί το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f΄ και από το θεώρημα Fermat είναι $f''(x_0)=0$.

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\phi(h)=0\cdot\frac{f'(x_0)}{2}=0$.

β) Το τρίγωνο ΔΜΓ έχει βάση (ΓΔ)=2 και ύψος υ=1-f΄(x) οπότε έχει εμβαδόν:

$E(x(t))=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1-f'(x(t)))$

$=1-f'(x(t))$.

$E'(x(t))=-f''(x(t))\cdot x'(t))$ και

$E'(x(t_0))=-f''(x(t_0))\cdot x'(t_0))$

$=-f''(x_0)\cdot x'(t_0))$

$=0\cdot x'(t_0))$

$=0$.

45. (ΕΜΕ 2014) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g:(-1,+∞)→R με f(x)=ln(x+1) και $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

i. Να λύσετε την εξίσωση f(x)+g(x)=0 και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης Φ(x)= =f(x)+g(x).

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο Ο(0,0), η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.

iii. Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x x΄ και Α(0,α) σημείο του άξονα yOy,΄ με α>0, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής Ε΄(t) του εμβαδού Ε(t) του τριγώνου ΑΜΝ κάθε χρονική στιγμή t ισούται με Φ(x(t)).

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με:

$\left(2\ln 3+\frac{8}{9}\right)cm^2/sec.$

Λύση:

i. Φ(x)=f(x)+g(x)

$=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$.

$\Phi'(x)=\frac{1}{x+1}(x+1)'+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}$

$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$

$=\frac{x+2}{(x+1)^2}>0$ για κάθε x>-1.

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-1,+∞).

Προφανής ρίζα της εξίσωσης f(x)+g(x)=0 ή ισοδύναμα της εξίσωσης Φ(x)=0 είναι το x=0 και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, είναι μοναδική.

☛ Για -1<x<0 $\overset{\Phi\uparrow}{\Leftrightarrow}$ Φ(x)<Φ(0)

⇔ Φ(x)<0.

☛ Για x>0 $\overset{\Phi\uparrow}{\Leftrightarrow}$ Φ(x)>Φ(0)

⇔ Φ(x)>0.

Παρακάτω βλέπετε τον πίνακα προσήμου της συνάρτησης Φ:

x	-1	0	+∞
Φ(x)	-		+

ii. $f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$ στο (-1,+∞) και

$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$ στο (-1,+∞).

f(0)=ln(0+1)=ln1=0.

$g(0)=\frac{0}{0+1}=0$.

$f'(0)=\frac{1}{0+1}=1$

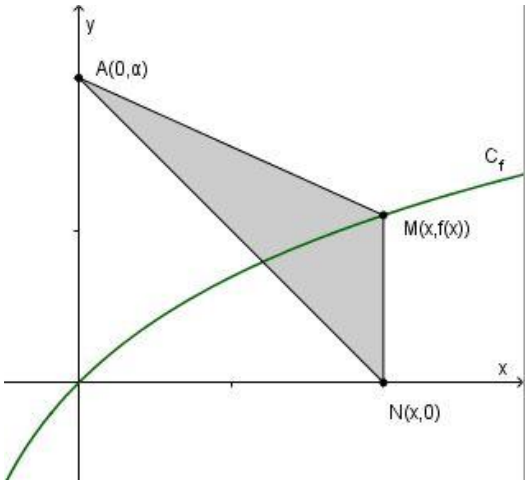
$g'(0)=\frac{1}{(0+1)^2}=1$.

Άρα στο Ο(0,0) έχουν κοινή εφαπτομένη y-0=1(x-0) ⇔ y=x που είναι η διχοτόμος 1ου – 3ου τεταρτημορίου.

iii. $\overrightarrow{AM}=(x,f(x)-\alpha)$ και $\overrightarrow{AN}=(x,-\alpha)$.

$E(x)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})|$

$E(x)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x & f(x)-a \\ x & -a \end{vmatrix}\right|$



$=\frac{1}{2}|-x\alpha-xf(x)+x\alpha|$

$=\frac{1}{2}|-xf(x)|$.....

$=\frac{1}{2}xf(x)$

$=\frac{1}{2}x\ln(x+1)$.

και επειδή x>0
και x+1>1 οπότε
f(x)=ln(x+1)>ln1=0

$E(x(t))=\frac{1}{2}x(t)\cdot\ln(x(t)+1)$

$E'(x(t))=\frac{1}{2}x'(t)\cdot\ln(x(t)+1)+\frac{1}{2}x(t)\cdot\frac{1}{x(t)+1}x'(t)$

και επειδή x΄(t)=2cm/sec:

$E'(x(t))=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln(x(t)+1)+\frac{1}{2}x(t)\cdot\frac{1}{x(t)+1}\cdot 2$

$E'(x(t))=\ln(x(t)+1)+\frac{x(t)}{x(t)+1}$.

Πρέπει $\ln(x(t)+1)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=2\ln 3+\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \ln(x(t)+1)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=\ln 3^2+\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \ln(x(t)+1)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=\ln 9+\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \ln(x(t)+1)+\frac{x(t)}{x(t)+1}=\ln(8+1)+\frac{8}{8+1}$

$\Leftrightarrow \Phi(x(t))=\Phi(8)$

$\Phi\uparrow$

$\underset{\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow}$ x(t)=8cm.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x}$, x≤0.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Ένα υλικό σημείο $A(\alpha,\sqrt{-\alpha})$, α<0 κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του α΄(t)=−α(t). Επίσης υλικό σημείο M(x,y) με x>0, κινείται στην ευθεία με εξίσωση y=x. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $A\hat{O}M=\theta$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $(OA)=\sqrt{2}$.

Λύση:

α) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot(-x)'$

$=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}<0$ επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0].

Σύνολο τιμών:

$F((-\infty,0])\overset{f\downarrow}{=}\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$ γιατί

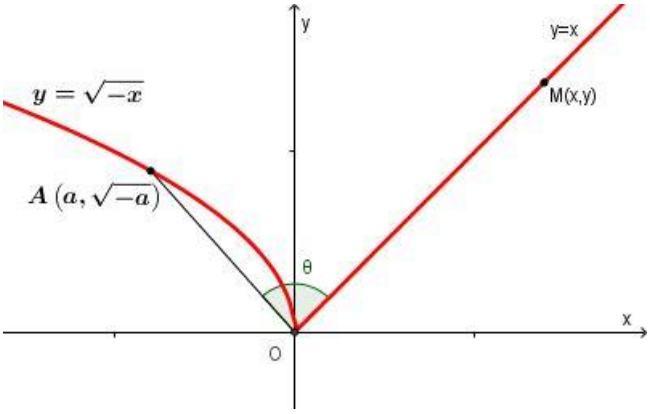
=[0,+∞)

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x}$

Θέτω u=-x.
$\lim\limits_{x\to-\infty}u=+\infty$.

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$.

β)



Η κίνηση του σημείου M(x,x) στην ευθεία y=x, δεν επηρεάζει την γωνία $A\hat{O}M$ γιατί δεν μετακινεί – περιστρέφει την πλευρά OM της γωνίας. Επομένως η γωνία θ είναι συνάρτηση μόνο του α.

Όταν (OA)= $\sqrt{2}$, τότε:

$\sqrt{\alpha^2+\left(\sqrt{-\alpha}\right)^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\sqrt{\alpha^2-\alpha}=\sqrt{2}$.

$\alpha^2-\alpha=2\Leftrightarrow$

$\alpha^2-\alpha-2=0\Leftrightarrow$

α	-∞	0	1	+∞
$\alpha^2-\alpha$	+	-	+	

Επειδή α≤0, $\alpha^2-\alpha>0$.

α=2 (απορρ. γτ α<0) ή α=-1 ⇔

α=-1.

Άρα A(-1,1) δλδ το σημείο A είναι σημείο της διχοτόμου 2ου – 4ου τεταρτημορίου οπότε η γωνία θ είναι 90^0.

Άρα $\theta(t_0)=90^0$ και $\alpha(t_0)=-1$.

$\alpha'(t_0)=-\alpha(t_0)=1$

$\vec{OA}=\left(\alpha,\sqrt{-\alpha}\right)$.

$\vec{OM}$=(κ,κ), με κ τυχαίο σταθερό αριθμό (αφού η κίνηση του M δεν επηρεάζει την γωνία $A\hat{O}M$, μπορούμε να θεωρήσουμε το M ακίνητο).

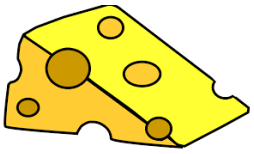
$\vec{OA}\cdot\vec{OM}=\kappa\alpha+\kappa\sqrt{-\alpha}=\kappa\left(\alpha+\sqrt{-\alpha}\right).$

$\left|\vec{OA}\right|=\sqrt{\alpha^2+\left(\sqrt{-\alpha}\right)^2}$

$=\sqrt{\alpha^2-\alpha}.$

$\left|\vec{OM}\right|=\sqrt{\kappa^2+\kappa^2}$

$=\kappa\sqrt{2}.$



$\text{συνθ}=\dfrac{\vec{OA}\cdot\vec{OM}}{\left|\vec{OA}\right|\cdot\left|\vec{OM}\right|}=\dfrac{\kappa\left(\alpha+\sqrt{-\alpha}\right)}{\kappa\sqrt{2}\cdot\sqrt{\alpha^2-\alpha}}$

$\text{συνθ}=\dfrac{\alpha+\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\alpha^2-\alpha}}\Leftrightarrow$

$\text{συνθ}=\dfrac{\alpha+\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\alpha^2-\alpha}}.$

Επομένως $\text{συνθ}(t)=\dfrac{\alpha(t)+\sqrt{-\alpha(t)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\alpha(t)^2-\alpha(t)}}$

η οποία με παραγώγιση δίνει: $-\text{ημθ}(t)\cdot\theta'(t)=$

$$\frac{\left(\alpha'(t)-\frac{a'(t)}{2\sqrt{-\alpha(t)}}\right)\sqrt{\alpha(t)^2-\alpha(t)}-\left(\alpha(t)+\sqrt{-\alpha(t)}\right)\frac{(2\alpha(t)-1)\alpha'(t)}{2\sqrt{\alpha(t)^2-\alpha(t)}}}{\sqrt{2}\cdot(\alpha(t)^2-\alpha(t))}$$

η οποία για $t=t_0$, $\theta(t_0)=90^0$, $\alpha(t_0)=-1$ και $\alpha'(t_0)=1$ δίνει $\theta'(t_0)=-\dfrac{1}{4}$ rad/sec.

47. (ΕΜΕ 2016) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, με $f(e)=1$, η οποία για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)>0$
- $xf'(x)+f^2(x)=0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\text{εφ}x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii. Ένα υλικό σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, $\alpha>1$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα 4acm/sec. Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M τέμνει τον άξονα xOx′, στο σημείο A, τότε:

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A, τη χρονική στιγμή t_0, που το σημείο M διέρχεται από το σημείο (e,f (e)).

β) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα xOx′ , να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\theta'(t_0)=$ $=\dfrac{12e}{e^2+1}$rad/sec.

Λύση:

i. $xf'(x)+f^2(x)=0\Leftrightarrow\begin{matrix}f(x)>0\\x>1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}f(x)\neq0\\x\neq0\end{matrix}\Leftrightarrow-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=(\ln x)'$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=\ln x+c.$

Η τελευταία για x=e δίνει:

$\dfrac{1}{f(e)}=\ln e+c\Leftrightarrow 1=1+c$

$\Leftrightarrow c=0.$

Άρα $\dfrac{1}{f(x)}=\ln x$ και επειδή $x>1\Leftrightarrow\ln x>\ln 1$ ή $\ln x>0\Rightarrow\ln x\neq0$, θα είναι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

ii. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\text{εφ}x$, $x\in A=\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$g'(x)=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}<0$ στο διάστημα $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και το σύνολο τιμών της είναι:

$g(A)\overset{g\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x),\lim\limits_{x\to1^+}g(x)\right)$

$=(-\infty,+\infty)$……γιατί

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\varepsilon\phi x\right)$

$=\dfrac{1}{\ln\frac{\pi}{2}}-\infty$

$=-\infty$

μορφή $\frac{\alpha}{0}$

και $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\varepsilon\phi x\right)$

Όταν $x\to1^+$
$x>1$
$\ln x>\ln 1$
$\ln x>0$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\ln x}-\lim\limits_{x\to1^+}\varepsilon\phi x$

$=+\infty-\text{εφ}1$

$=+\infty.$

Επειδή $0\in g(A)$, η εξίσωση $g(x)=0$

$\Leftrightarrow$ f(x)-εφx=0

$\Leftrightarrow$ f(x)=εφx

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Α και επειδή η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα είναι μοναδική.

iii. α) $f'(x)=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ <0 στο (1,+∞).

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Μ(α,f(α)) είναι:

y-f(α)=f΄(α)(x-α) $\Leftrightarrow$ y-$\dfrac{1}{\ln\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}$(x-α) η οποία για y=0 δίνει:

$\dfrac{1}{\ln\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}$(x-α) $\Leftrightarrow$ x=α(1+lnα).

Άρα η τετμημένη του σημείου Α δίνεται από τη σχέση Φ(α(t))=α(t)(1+lnα(t)), με α΄(t)=4α(t) και α(t_0)=e.

Φ΄(α(t))=α΄(t)(1+lnα(t))+α(t)$\dfrac{1}{\alpha(t)}$α΄(t)

=α΄(t)(1+lnα(t))+α΄(t)

=α΄(t)(2+lnα(t)).

=4α(t)(2+lnα(t)).

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

Φ΄(α(t_0))=4α(t_0)(2+lnα(t_0))

=4e(2+lne)

=12e cm/sec.

β) εφθ(t)=f΄(α(t))

$\Leftrightarrow$ εφθ(t)=$-\dfrac{1}{\alpha(t)\ln^2\alpha(t)}$

η οποία με παραγώγιση δίνει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)\ln^2\alpha(t)+2\alpha(t)\ln\alpha(t)\cdot(\ln\alpha(t))'}{\alpha^2(t)\ln^4\alpha(t)}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)\ln^2\alpha(t)+2\alpha(t)\ln\alpha(t)\frac{1}{a(t)}a'(t)}{\alpha^2(t)\ln^4\alpha(t)}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)\ln^2\alpha(t)+2\ln\alpha(t)a'(t)}{\alpha^2(t)\ln^4\alpha(t)}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)\ln\alpha(t)+2a'(t)}{\alpha^2(t)\ln^3\alpha(t)}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)(2+\ln\alpha(t))}{\alpha^2(t)\ln^3\alpha(t)}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{4\alpha(t)(2+\ln\alpha(t))}{\alpha^2(t)\ln^3\alpha(t)}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{4(2+\ln\alpha(t))}{\alpha(t)\ln^3\alpha(t)}$$

(1+εφ²θ(t))θ΄(t)=$\dfrac{4(2+\ln\alpha(t))}{\alpha(t)\ln^3\alpha(t)}$

$\left(1+(f'(\alpha(t)))^2\right)\theta'(t)=\dfrac{4(2+\ln\alpha(t))}{\alpha(t)\ln^3\alpha(t)}$.

Η τελευταία για t=t_0 δίνει:

$\left(1+(f'(\alpha(t_0)))^2\right)\theta'(t_0)=\dfrac{4(2+\ln\alpha(t_0))}{\alpha(t_0)\ln^3\alpha(t_0)}\Leftrightarrow$

$\left(1+(f'(e))^2\right)\theta'(t_0)=\dfrac{4(2+\ln e)}{e\ln^3 e}\Leftrightarrow$

$\left(1+\dfrac{1}{e^2}\right)\theta'(t_0)=\dfrac{12}{e}\Leftrightarrow$

$\dfrac{e^2+1}{e^2}\theta'(t_0)=\dfrac{12}{e}\Leftrightarrow$

$f'(e)=-\dfrac{1}{e\ln^2 e}=-\dfrac{1}{e}$.

θ΄(t_0)=$\dfrac{12e}{e^2+1}$.

48) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: (0,+∞) →R, με:

- f(x)≠0, για κάθε x>0
- f(1)=$-\dfrac{1}{e}$
- (1-x)f(x)=x(lnx-x)(f(x)+f΄(x)) .....(1)

για κάθε x∈(0,+∞).

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Εάν f(x)=e^{-x}(lnx-x):

ii. Να δείξετε ότι f(x)<0, για κάθε x>0.

iii. Να δείξετε ότι lnx≤x-1, x>0 και να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης f.

iv. Εάν F συνάρτηση για την οποία ισχύει F΄(x)=f(x) για κάθε x>0, να δείξετε ότι F(x)+F(3x)>2F(2x) για κάθε x>0.

v. Εάν β>0, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈(β,2β), τέτοιο ώστε F(β)+F(3β)=2F(ξ).

Λύση:

i. (1-x)f(x)=x(lnx-x)(f(x)+f΄(x)) ... γιατί x>0

$\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x}$f(x)=(lnx-x)(f(x)+f΄(x))

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)$f(x)=f(x)(lnx-x)+f΄(x)(lnx-x)

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-1\right)$f(x)-f΄(x) (lnx-x)=f(x)(lnx-x)

και επειδή f(x)≠0, για κάθε x>0

$$\frac{(lnx-x)'f(x)-f'(x)(lnx-x)}{f^2(x)}=\frac{f(x)(lnx-x)}{f^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{lnx-x}{f(x)}\right)'=\frac{lnx-x}{f(x)}$$

Άρα $\frac{lnx-x}{f(x)}=ce^x$.....(2)

(2) $\overset{x=1}{\Longleftrightarrow}$ ... c=1

Οπότε η (2) $\Leftrightarrow \frac{lnx-x}{f(x)}=e^x$

$\Leftrightarrow$ f(x)=e^{-x}(lnx-x).

ii. Η συνάρτηση f επειδή είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) θα είναι και συνεχής και επειδή δεν μηδενίζεται σε αυτό, αφού f(x)≠0, για κάθε x>0, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού f(1)=$-\frac{1}{e}$ <0 , θα είναι f(x)<0 για κάθε x>0.

iii. lnx≤x-1 ⇔ lnx-x+1≤0.

Έστω ϕ(x)=lnx-x+1, x>0

ϕ΄(x)=$\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

ϕ΄(x)=0 ⇔ 1-x=0 ⇔ x=1.

ϕ΄(x)>0 ⇔ $\frac{1-x}{x}>0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow}$1-x>0 ⇔ x<1.

x	0	1	+∞
ϕ΄(x)	+	0	-
ϕ(x)	↗		↘

Ο.Ε.

Η συνάρτηση ϕ(x) παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x=1 το ϕ(1)=0 οπότε ϕ(x)≤ϕ(1) ⇔ lnx-x+1≤0 ⇔ lnx≤x-1.

f΄(x) = -e^{-x}(lnx-x)+e^{-x}(lnx-x)΄

=$e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1-lnx+x\right)$>0

γιατί e^{-x} >0, $\frac{1}{x}>0$ και -1-lnx+x≥0 λόγω της lnx≤x-1.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

iv. Για τη συνάρτηση F(x) ισχύουν οι συνθήκες του ΘΜΤ στα διαστήματα [x,2x] και [2x,3x].

Επομένως υπάρχουν $\xi_1\in$[x,2x] και $\xi_2\in$[2x,3x] τέτοια ώστε

F΄(ξ_1)=$\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$ ⇔ f(ξ_1)=F(2x)-F(x)

F΄(ξ_2)=$\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}$ ⇔ f(ξ_2)=F(3x)-F(2x)

x<ξ_1<2x<ξ_2<3x ⇔ ξ_1<ξ_2 και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, f(ξ_1)<f(ξ_2) ⇔

⇔ F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)

⇔ F(x)+F(3x)>2F(2x).

v. F(β)+F(3β)=2F(x)

⇔ F(β)+F(3β)-2F(x)=0.

Εφαρμόζουμε το **θ. Bolzano** για τη συνάρτηση σ(x)=F(β)+F(3β)-2F(x) στο διάστημα [β,2β].

- Η συνάρτηση σ(x) είναι συνεχής στο [β,2β] γιατί F παραγωγίσιμη.
- σ(β)=F(β)+F(3β)-2F(β)=F(3β)-F(β)<0

γιατί F΄(x)=f(x)<0 άρα F γνησίως φθίνουσα και επειδή 3β>β ⇔ F(3β)<F(β).

σ(2β)=F(β)+F(3β)-2F(2β)>0 λόγω του **iv** ερωτήματος για x=β.

Άρα σ(β)σ(2β)<0.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(β,2β) τέτοιο ώστε σ(ξ)=0 ⇔ F(β)+F(3β)=2F(ξ).

σ΄(x)=-2F΄(x)=-2f(x)>0 γιατί f(x)<0.

Άρα η συνάρτηση σ(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) και επομένως η ρίζα της ξ είναι μοναδική.

49) END

ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ