ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΟΡΙΑ 0/0

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to5}\frac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt5-x\sqrt x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sqrt x}{x-\sqrt x}$

iv) $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x^7-x+2|-2}{x-1}$ **v)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8}$

vii) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1}$. **vii)** $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}}$

Λύση: i) *Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=[0,5)\cup(5,+\infty)$.*

$$\lim_{x\to5}\frac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt5-x\sqrt x}\overset{\left(\frac00\right)}{=}\lim_{x\to5}\frac{\left(5-\sqrt{5x}\right)\left(5+\sqrt{5x}\right)\left(5\sqrt5+x\sqrt x\right)}{\left(5\sqrt5-x\sqrt x\right)\left(5+\sqrt{5x}\right)\left(5\sqrt5+x\sqrt x\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(25-5x)(5\sqrt5+x\sqrt x)}{(125-x^3)(5+\sqrt{5x})}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{5(5-x)(5\sqrt5+x\sqrt x)}{(5^3-x^3)(5+\sqrt{5x})}=\lim_{x\to5}\frac{5\cancel{(5-x)}\left(5\sqrt5+x\sqrt x\right)}{\cancel{(5-x)}\left(5^2+5x+x^2\right)\left(5+\sqrt{5x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{5(5\sqrt5+x\sqrt x)}{(25+5x+x^2)(5+\sqrt{5x})}=$$

$$=\frac{5\left(5\sqrt5+5\sqrt5\right)}{\left(25+5\cdot5+5^2\right)\left(5+\sqrt{5\cdot5}\right)}=\frac{5\cdot10\sqrt5}{75\cdot10}=\frac{\sqrt5}{15}.$$

2ος τρόπος :
$$\lim_{x\to5}\frac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt5-x\sqrt x}\overset{\substack{DLH\\ \left(\frac00\right)}}{=}\lim_{x\to5}\frac{\left(5-\sqrt{5x}\right)'}{\left(5\sqrt5-x\sqrt x\right)'}=\lim_{x\to5}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{5x}}(5x)'}{-\left(x^{\frac32}\right)'}=\lim_{x\to5}\frac{\frac{5}{2\sqrt{5x}}}{\frac32x^{\frac32-1}}=\lim_{x\to5}\frac{\frac{5}{\sqrt{5x}}}{3x^{\frac12}}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\frac{5}{\sqrt{5x}}}{3\sqrt x}=\lim_{x\to5}\frac{5}{3x\sqrt5}=\frac{5}{15\sqrt5}=\frac{5\sqrt5}{75}=\frac{\sqrt5}{15}.$$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-3,0]$.

$$\lim_{x\to-3}\frac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}\overset{\left(\frac00\right)}{=}\lim_{x\to-3}\frac{(2\sqrt{-3x}-3+x)(2\sqrt{-3x}+3-x)}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(2\sqrt{-3x}\right)^2-(3-x)^2}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=\lim_{x\to-3}\frac{4|-3x|-9+6x-x^2}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}$$

$$\underset{\substack{x<0\\-3x>0\\|-3x|=-3x}}{=}\lim_{x\to-3}\frac{-12x-9+6x-x^2}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=-\lim_{x\to-3}\frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=-\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)^{1/2}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=$$

$$=-\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)^{2-1/2}}{(2\sqrt{-3x}+3-x)}=-\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)^{3/2}}{\left(2\sqrt{-3x}+3-x\right)}=\frac{0}{12}=0.$$

2ος τρόπος :
$$\lim_{x\to-3}\frac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}\overset{\substack{DLH\\ \left(\frac00\right)}}{=}\lim_{x\to-3}\frac{\left(2\sqrt{-3x}-3+x\right)'}{\left(\sqrt{x+3}\right)'}=\lim_{x\to-3}\frac{2\frac{1}{2\sqrt{-3x}}(-3x)'+1}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}(x+3)'}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\frac{-3}{\sqrt{-3x}}+1}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to-3}\frac{\frac{-3+\sqrt{-3x}}{\sqrt{-3x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to-3}\frac{2(-3+\sqrt{-3x})\sqrt{x+3}}{\sqrt{-3x}}=0.$$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(0,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sqrt x}{x-\sqrt x}\overset{\left(\frac00\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cancel{\sqrt x}\left(\sqrt x+1\right)}{\cancel{\sqrt x}\left(\sqrt x-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt x+1}{\sqrt x-1}=\frac{1}{-1}=-1.$

2ος τρόπος :
$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt x}{x-\sqrt x}\overset{\substack{DLH\\ \left(\frac00\right)}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\sqrt x\right)'}{\left(x-\sqrt x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt x}}{1-\frac{1}{2\sqrt x}}=-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1+2\sqrt x}{2\sqrt x}}{\frac{1-2\sqrt x}{2\sqrt x}}=-\lim_{x\to0}\frac{1+2\sqrt x}{1-2\sqrt x}=-\frac{1+0}{1-0}=-1.$$

iv) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to1}(x^7-x+2)=2>0$, είναι $x^7-x+2>0$ κοντά στο 1. Άρα $|x^7-x+2|=x^7-x+2$.

$$\lim_{x\to1}\frac{|x^7-x+2|-2}{x-1}\overset{\left(\frac00\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{x^7-x+2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^7-x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x^6-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x^3-1)(x^3+1)}{x-1}=$$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{x\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(x^3+1)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to1}(x(x^2+x+1)(x^3+1))$=1·3·2=**6**.

2ος τρόπος : $\ldots\ldots = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^7-x}{x-1} \overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^7-x)'}{(x-1)'} == \lim\limits_{x\to1}\frac{7x^6-1}{1} = 7-1=6.$

v) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^4-1} \overset{\binom{0}{0}}{=} \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1+1+1}{(1+1)(1+1)} = \frac{3}{4}.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^4-1} \overset{\overset{DLH}{\binom{0}{0}}}{=} \lim\limits_{x\to1}\frac{(x^3-1)'}{(x^4-1)'} = \lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2}{4x^3} = \lim\limits_{x\to1}\frac{3}{4x} = \frac{3}{4}.$

vi) Πρέπει $x^2-2x-8\neq0 \underset{(*)}{\Leftrightarrow} x\neq4$ και $x\neq-2$. Άρα $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,4)\cup(4,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-2}\frac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8} \overset{\binom{0}{0}}{\underset{(*)}{=}} \lim_{x\to-2}\frac{-3(x+2)(x-1/3)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x\to-2}\frac{-3x+1}{x-4} = -\frac{7}{6}.$$

(*) Παραγοντοποίηση αριθμητή: Δ=49, $x_1=-2$, $x_2=1/3$.

Παραγοντοποίηση παρονομαστή: Δ=36, $x_1=-2$, $x_2=4$.

Η παραγοντοποίηση αριθμητή και παρονομαστή, μπορεί να γίνει και με το Horner.

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8} \overset{\overset{DLH}{\binom{0}{0}}}{=} \lim\limits_{x\to-2}\frac{(-3x^2-5x+2)'}{(x^2-2x-8)'} = \lim\limits_{x\to-2}\frac{-6x-5}{2x-2} = \frac{12-5}{-4-2} = -\frac{7}{6}.$

vii) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1} \overset{\binom{0}{0}}{\underset{(*)}{=}} \lim\limits_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(2x^2-7x-1)}{\cancel{(x+1)}(x^3-1)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-7x-1}{x^3-1} = \frac{2+7-1}{-1-1} = -4.$

(*) Παραγοντοποίηση αριθμητή:

2	**-5**	**-8**	**-1**	**-1**
↓	-2	7	1	
2	**-7**	**-1**	**0**	

.

Παραγοντοποίηση παρονομαστή:

1	**1**	**0**	**-1**	**-1**	**-1**
↓	-1	0	0	1	
1	**0**	**0**	**-1**	**0**	

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1} \overset{\overset{DLH}{\binom{0}{0}}}{=}$

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{(2x^3-5x^2-8x-1)'}{(x^4+x^3-x-1)'} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{6x^2-10x-8}{4x^3+3x^2-1} = \frac{6+10-8}{-4+3-1} = -\frac{8}{2} = -4.$

viii) $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}} \overset{\binom{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{x^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{x-\sqrt[3]{2}} = \lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{\cancel{\left(x-\sqrt[3]{2}\right)}\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)}{\cancel{x-\sqrt[3]{2}}} =$

$\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) = \sqrt[3]{2}^2+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}.$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}} \overset{\overset{DLH}{\binom{0}{0}}}{=} \lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{(x^3-2)'}{\left(x-\sqrt[3]{2}\right)'} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2}{1} = 3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = 3\sqrt[3]{4}.$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$. Θέτω $\sqrt{x}=u$, οπότε $u^2=x$ και $u^4=x^2$.
Όταν $x\to1$ τότε $\lim\limits_{x\to1}u = \lim\limits_{x\to1}\sqrt{x} = 1$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to1}\frac{u^2+u-2}{u^4-1}\underset{(*)}{=}\lim_{u\to1}\frac{\cancel{(u-1)}(u+2)}{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)}=\lim_{u\to1}\frac{u+2}{(u+1)(u^2+1)}=\frac{3}{4}.$$

(∗) Παραγοντοποίηση αριθμητή: Δ=9, $x_1=1$, $x_2=-2$.

<u>**2ος τρόπος :**</u> $\lim_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{(x+\sqrt{x}-2)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}.$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Θέτω $\sqrt[12]{x}=u$, οπότε $\sqrt[3]{x}=u^4$ και $\sqrt[4]{x}=u^3$.

Όταν x→1 τότε $\lim_{x\to1}u=\lim_{x\to1}\sqrt[12]{x}=1$.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to1}\frac{u^4-1}{u^3-1}=\lim_{u\to1}\frac{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)}=\lim_{u\to1}\frac{(u+1)(u^2+1)}{u^2+u+1}=\frac{4}{3}.$$

<u>**2ος τρόπος :**</u> $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)'}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^{1/3}\right)'}{\left(x^{1/4}\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot1}{\frac{1}{4}\cdot1}=\frac{4}{3}.$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(0,+\infty)$. Θέτω $\sqrt[6]{x}=u$, οπότε $\sqrt[3]{x}=u^2$ και $\sqrt{x}=u^3$.

Όταν x→0 τότε $\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\sqrt[6]{x}=0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to0}\frac{u^3+u^2}{u}=\lim_{u\to0}\frac{\cancel{u}(u^2+u)}{\cancel{u}}=\lim_{u\to0}(u^2+u)=0.$$

<u>**2ος τρόπος :**</u> Με τον κανόνα De l' Hospital προκύπτει πολύ πιο δύσκολα.

3. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim_{x\to1^-}\frac{|x-1|+x^2-5x+4}{x-1}$ ii) $\lim_{x\to-3^+}\frac{|x+3|+x^2+5x+6}{x^2-9}$

iii) $\lim_{x\to2^+}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}$ iv) $\lim_{x\to2^-}\frac{|x^2-x-2|}{x^3-3x-2}$ v) $\lim_{x\to3}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Όταν $x\to1^-$, τότε x<1 ⇔ x-1<0 οπότε |x-1|=-x+1.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|x-1|+x^2-5x+4}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{-x+1+x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-6x+5}{x-1}\underset{(*)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{x-1}}=1-5=-4.$$

(∗) Παραγοντοποίηση αριθμητή: Δ=16, $x_1=1$, $x_2=5$.

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

Όταν $x\to-3^+$, τότε x>-3 ⇒ x+3>0 ⇒ |x+3|=x+3.

$$\lim_{x\to-3^+}\frac{|x+3|+x^2+5x+6}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-3^+}\frac{x+3+x^2+5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to-3^+}\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}=\lim_{x\to-3^+}\frac{(x+3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+3)}(x-3)}==\lim_{x\to-3^+}\frac{x+3}{x-3}=\frac{0}{-6}=0.$$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

Βρίσκουμε το πρόσημο του x^2-5x+6.

Δ=1, $x_1=2$, $x_2=3$.

x	-∞	2 ←	3	+∞
x^2-5x+6	+		-	+

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι όταν $x\to2^+$, τότε 2<x<3 ⇒ $x^2-5x+6<0$ ⇔ $|x^2-5x+6|=$ $=-(x^2-5x+6)$.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=-\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=-\lim_{x\to2^+}\frac{x-3}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

iv) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού:

$x^3-3x-2\neq0$..(1)

1	**0**	**-3**	**-2**	**-1**
↓	-1	1	2	
1	**-1**	**-2**	**0**	

(1) ⇔ $(x+1)(x^2-x-2)\neq 0$ ⇔ $(x+1)(x+1)(x-2)\neq 0$ ⇔ $x\neq -1$ και $x\neq 2$.

($\Delta=9$, $x_1=-1$, $x_2=2$)

Άρα $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ και το όριο έχει νόημα όταν $x\to 2^-$.

Βρίσκουμε το πρόσημο του x^2-x-2.

x	$-\infty$	-1	→ 2	$+\infty$
x^2-x-2	+	-	+	

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι όταν $x\to 2^-$, τότε $-1<x<2 \Rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow |x^2-x-2|=-(x^2-x-2)$.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{x^3-3x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2}{x^3-3x-2}=-\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)^{\cancel{2}}}=-\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{3}.$$

v) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

Βρίσκουμε το πρόσημο του $-x^2+3x$.

$\Delta=9$, $x_1=0$, $x_2=3$.

x	$-\infty$	0	→ 3 ←	$+\infty$
$-x^2+3x$	-	+	-	

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι εκατέρωθεν του 3 το τριώνυμο $-x^2+3x$ αλλάζει πρόσημο.

Άρα θα βρούμε πλευρικά όρια.

- όταν $x\to 3^-$, τότε $0<x<3 \Rightarrow -x^2+3x>0 \Rightarrow |-x^2+3x|=-x^2+3x$.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{-x^2+3x+x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-2x+6}{x^2-9}=-2\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{x-3}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}==$$

$$-2\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x+3}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\text{...(1)}$$

- όταν $x\to 3^+$, τότε $x>3 \Rightarrow -x^2+3x<0 \Rightarrow |-x^2+3x|=x^2-3x$.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x+x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2-8x+6}{x^2-9}=2\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{(x+3)(x-3)}=$$

$$=2\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=2\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\text{...(2)}$$

Από (1) και (2) επειδή $-\frac{1}{3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}\neq\lim_{x\to 3^+}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}=\frac{2}{3}$ συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}$.

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x\to -1}\frac{4-|x+2|}{|3x-1|+x}$

ii) $\lim_{x\to -1}\frac{|2x-1|+x-2}{x^2-1}$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x^2-x|}$

iv) $\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|+3|x-1|-4}{x-2}$.

Λύση: i) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.

$|3x-1|+x\neq 0 \Leftrightarrow |3x-1|\neq -x \Leftrightarrow \begin{cases}3x-1\neq -x, & \text{αν } x>\frac{1}{3}\\ -3x+1\neq -x, & \text{αν } x<\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{1}{4}, & \text{αν } x>\frac{1}{3}\\ x\neq \frac{1}{2}, & \text{αν } x<\frac{1}{3}\end{cases}$ που είναι αληθής για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $A_f=\mathbb{R}$ και το όριο έχει νόημα όταν $x\to -1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{4-|x+2|}{|3x-1|+x}=\frac{4-|-1+2|}{|-3-1|-1}=\frac{4-|1|}{|-4|-1}=\frac{4-1}{4-1}=\frac{3}{3}=1.$$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Επειδή $\lim_{x\to -1}(2x-1)=-3<0 \Rightarrow 2x-1<0$ κοντά στο -1, οπότε $|2x-1|=-2x+1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{|2x-1|+x-2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{-2x+1+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x-1}{(x+1)(x-1)}=-\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=-\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x^2-x|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x(x-1)|}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x|\cdot|x-1|}.$$

- Όταν $x\to 0^+$ τότε |x|=x και $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{|x^2-x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x\cdot|x-1|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{|x-1|}=\frac{2}{|0-1|}=2.$
- Όταν $x\to 0^-$ τότε |x|=-x και $\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{|x^2-x|}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x\cdot|x-1|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{|x-1|}=-\frac{2}{|0-1|}=-2.$

Επειδή $-2=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{|x^2-x|}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{|x^2-x|}=2$, δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x^2-x|}$.

iv) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.
Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-3)=-1<0\Rightarrow$ x-3<0 κοντά στο 2, οπότε |x-3|=-x+3.
Επειδή $\lim_{x\to 2}(x-1)=1>0\Rightarrow$ x-1>0 κοντά στο 2, οπότε |x-1|=x-1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|+3|x-1|-4}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{-x+3+3(x-1)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x-2}=2\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=2\cdot 1=2.$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια, για τις διάφορες τιμές του α∈IR:
i) $\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha^2-x^2}{|x|-\alpha}$ **ii)** $\lim_{x\to\alpha}\frac{x-|\alpha|}{|x|-\alpha}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=IR-{-α, α} εάν α≥0 και A_f=R εάν α<0.

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha^2-x^2}{|x|-\alpha}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha^2-|x|^2}{|x|-\alpha}\lim_{x\to\alpha}\frac{(\alpha-|x|)(\alpha+|x|)}{|x|-a}=-\lim_{x\to\alpha}\frac{\cancel{(|x|-\alpha)}(\alpha+|x|)}{\cancel{|x|-a}}=-\lim_{x\to\alpha}(\alpha+|x|)=-\alpha-|\alpha|.$$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=IR-{-α, α} εάν α≥0 και A_f=IR εάν α<0.

- Όταν α=0 τότε $\lim_{x\to a}\frac{x-|a|}{|x|-a}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$. Επειδή εκατέρωθεν του 0 το x αλλάζει πρόσημο, θα βρούμε τα πλευρικά όρια.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{-x}\right)=-1$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}\right)=1$. Επομένως δεν υπάρχει το όριο όταν α=0.

- Όταν α>0 τότε |α|=α και αφού $\lim_{x\to\alpha}x=\alpha>0$ θα είναι και x>0 άρα |x|=x.

Επομένως $\lim_{x\to\alpha}\frac{x-|\alpha|}{|x|-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x-\alpha}{x-\alpha}=1.$

- Όταν α<0 τότε |α|=-α και αφού $\lim_{x\to\alpha}x=\alpha<0$ θα είναι και x<0 άρα |x|=-x.

Επομένως $\lim_{x\to\alpha}\frac{x-|\alpha|}{|x|-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{x+\alpha}{-x-\alpha}\right)=-\lim_{x\to\alpha}\frac{x+\alpha}{x+\alpha}=-1.$

6. Εάν $\lim_{x\to x_0}g(x)=1$ και g(x)≠1 κοντά στο x_0,να βρείτε το $\lim_{x\to x_0}f(x)$,όπου $f(x)=\frac{\sqrt{g^2(x)+3}-2}{g(x)-1}$.

Λύση: $$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{g^2(x)+3}-2}{g(x)-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt{g^2(x)+3}-2\right)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}{(g(x)-1)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g^2(x)+3-4}{(g(x)-1)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g^2(x)-1}{(g(x)-1)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{(g(x)-1)}(g(x)+1)}{\cancel{(g(x)-1)}\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)+1}{\sqrt{g^2(x)+3}+2}=\frac{1+1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

7. Εάν α, β ∈ Z, και $f(x)=\begin{cases}4x, & x\leq\beta\\ 2(x+\alpha)+1, & x>\beta\end{cases}$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\beta}f(x)$.

Λύση: Για να υπάρχει το όριο, πρέπει $\lim_{x\to\beta^-}f(x)=\lim_{x\to\beta^-}f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to\beta^-}(4x)=\lim_{x\to\beta^+}(2(x+\alpha)+1)\Leftrightarrow$
4β=2(β+α)+1 ⇔ ⇔ 2β=2α+1 ⇔ $\beta-\alpha=\frac{1}{2}$ που είναι αδύνατο, γιατί β-α ∈ Z και $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

8. Να εξετάσετε εάν υπάρχουν α, β∈IR, τέτοια ώστε $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+\alpha x+2\beta-5}{x^2-1}=4.$

Λύση: Θέτω $f(x)=\frac{x^3+\alpha x+2\beta-5}{x^2-1}$.
Τότε $\lim_{x\to 1}f(x)=4$. .... (1)

και $x^3+\alpha x+2\beta-5=(x^2-1)f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}(x^3+\alpha x+2\beta-5)=\lim\limits_{x\to1}[(x^2-1)f(x)] \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

⇔ 1+α+2β-5=0·4 ⇔ 2β=4-α .... (2)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+\alpha x+2\beta-5}{x^2-1}=4 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to1}\frac{x^3+\alpha x+4-\alpha-5}{x^2-1}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{x^3+\boldsymbol{\alpha x}-\boldsymbol{\alpha}-1}{x^2-1}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)+\boldsymbol{\alpha(x}\ \ -1)}{x^2-1}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1+\alpha)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1+\alpha}{x+1}=4 \Leftrightarrow \frac{3+\alpha}{2}=4 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha=5}$$

(2) ⇔ **β=-½.**

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-x}$

iii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}$

iv) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}$

v) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}$

vi) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}$

vii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu 7x}{\varepsilon\varphi 3x}$

viii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$

ix) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x^2-9)\eta\mu(x-1)}{|x^2-4x+3|}$

x) $\lim\limits_{x\to-\alpha}\frac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=IR-{1}.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-1}=\frac{\eta\mu 0}{0-1}=0.$$

Το όριο δεν προκύπτει με τον κανόνα De l' Hospital, γιατί δεν είναι μορφή ($^0/_0$) ή ($^{\pm\infty}/_{\pm\infty}$).

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=IR-{0, -1, 1}.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x(x^2-1)}=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2-1}=1\cdot\frac{1}{-1}=-1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(\eta\mu x)'}{(x^3-x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3x^2-1}=\frac{\sigma\upsilon\nu 0}{-1}=\frac{1}{-1}=-1.$

iii) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: $\begin{Bmatrix} x+4\geq0 \\ \sqrt{x+4}-2\neq0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\geq-4 \\ x+4\neq4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x\geq-4 \\ x\neq0 \end{Bmatrix}$⇔ A_f=[-4,0)U(0,+∞) και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}+2)\eta\mu 2x}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+4}+2\right)\eta\mu 2x}{x+4-4}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}+2)\eta\mu 2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)\cdot 2\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}}_{1}=4\cdot2\cdot1=8.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(\eta\mu 2x)'}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sigma\upsilon\nu 2x}{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}=\lim\limits_{x\to0}\left(4\sqrt{x+4}\sigma\upsilon\nu 2x\right)=8.$

iv) Πρέπει x^2-3x+2≠0 ⇔ Δ=1, x≠1 και x≠2. Άρα A_f=[-∞,1)U(1, 2)U(2,+∞) και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}=\lim_{x-2\to0}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}$$

$$\overset{\substack{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega \\ x-2=u}}{=}\underbrace{\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}}_{1}\cdot\frac{1}{2-1}=1\cdot1=1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to2}\frac{(\eta\mu(x-2))'}{(x^2-3x+2)'}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)}{2x-3}\ \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{4-3}=1.$

v) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: ημx≠0 ⇔ x≠κπ, κ∈Z ⇔ A_f=IR-{κπ, κ∈Z } και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}}=\frac{1}{1}=1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(x)'}{(\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1}{1}=1.$

vi) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: εφx≠0 ⇔ x≠κπ, κ∈ℤ ⇔ A_f=IR-{κπ, κ∈ℤ } και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}=\lim_{x\to0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}}_{1}\cdot\lim_{x\to0}\sigma\upsilon\nu x\overset{(v)}{=}1\cdot1=1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(x)'}{(\varepsilon\varphi x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 0=1.$

vii) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: εφ3x≠0 ⇔ x≠κπ/3, κ∈ℤ ⇔ A_f=IR-{κπ/3, κ∈ℤ } και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu7x}{\varepsilon\varphi\,3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\eta\mu7x}{x}}{\frac{\varepsilon\varphi\,3x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{7\frac{\eta\mu7x}{7x}}{3\frac{\varepsilon\varphi3x}{3x}}=\frac{7\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu7x}{7x}}_{1}}{3\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi\,3x}{3x}}_{1}}=\frac{7\cdot1}{3\cdot1}=\frac{7}{3}.$$

1 (παρατήρηση 9)

Διαιρούμε αριθμητή & παρονομαστή με x

θέτω 7x=w.
Τότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu\,7x}{7x}=\lim\limits_{w\to0}\frac{\varepsilon\varphi\,w}{w}=1$
(άσκ. 6.i σχ. βιβλίου σελ. 57)

θέτω 3x=u.
Τότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi\,3x}{3x}=\lim\limits_{u\to0}\frac{\varepsilon\varphi\,u}{u}=1$
(άσκ. 6.i σχ. βιβλίου σελ. 57)

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu7x}{\varepsilon\varphi\,3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(\eta\mu7x)'}{(\varepsilon\varphi\,3x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu7x\cdot(7x)'}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}(3x)'}=\frac{7}{3}\lim\limits_{x\to0}(\sigma\upsilon\nu7x\sigma\upsilon\nu^2 3x)=\frac{7}{3}\cdot1\cdot1=\frac{7}{3}.$

viii) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: Θέτω f(x)=x+ημx, x∈IR.
f΄(x)=1+συνx ≥0 με f΄(x)=0 στα σημεία x=2κπ+π, κ∈Z, στα οποία η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Άρα f γνησίως αύξουσα στο R
Προφανής ρίζα x=0 και επειδή f γνησίως αύξουσα στο R, η ρίζα είναι μοναδική.
Άρα A_f=R* και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{1-\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}}{1+\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Διαιρούμε αριθμητή & παρονομαστή με x

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(x+\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-1}{1+1}=0.$

viii) x^2-4x+3≠0 ⇔ Δ=4, x≠1 και x≠3. Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=(-∞,1)U(1,3)U(3,+∞).
Βρίσκουμε το πρόσημο του x^2-4x+3.

x	-∞ 1	3	+∞
x^2-4x+3	+	-	+

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι όταν $x\to1^+$, τότε 1<x<3 ⇒ x^2-4x+3 <0 ⇔ |x^2-4x+3 |= =-(x^2-4x+3).

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(x^2-9)\eta\mu(x-1)}{|x^2-4x+3|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to1^+}\frac{(x-3)(x+3)\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x-3)}=-\lim_{x\to1^+}\frac{(x+3)\eta\mu(x-1)}{x-1}=-\lim_{x\to1^+}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1^+}(x+3)=$$

$$=-4\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=-4\cdot\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=-4\cdot1=-4.$$

θέτω x-1=u. Τότε $\lim\limits_{x\to1}u=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ και u>0.

ix) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=(-∞,-α)U(α,+∞).
Θέτω x+α=u. Τότε x=u-α και $\lim\limits_{x\to-a}u=\lim\limits_{x\to-a}(x+a)=0$, οπότε

$$\lim_{x\to-\alpha}\frac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu(u-a)+\eta\mu\alpha}{u}=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu u\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha}{u}=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu u)}{u}=$$

$$= \lim_{u\to 0}\left(\frac{\text{ημuσυνα}}{u} - \frac{\text{ημα(1-συνu)}}{u}\right) = \text{συνα}\lim_{u\to 0}\frac{\text{ημu}}{u} - \text{ημα}\lim_{u\to 0}\frac{\text{1-συνu}}{u} = \text{συνα}\cdot 1 - \text{ημα}\cdot 0 = \text{συνα}.$$

$2^{ος}$ τρόπος : $\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha} \overset{\substack{DLH\\ \left(\frac{0}{0}\right)}}{=} \lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{(\text{ημx+ημα})'}{(x+\alpha)'} = \lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{\text{συν x}}{1} = \text{συνα}$..

10. Να υπολογίσετε τα α, β∈R, τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2ax+5\beta, & \text{αν } \chi \le 0 \\ x^2+3\beta x+a+\beta, & \text{αν } x>0 \end{cases},$$

να διέρχεται από το σημείο Α(-1,3) και να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση: Επειδή οι άγνωστοι είναι δυο, θέλουμε δυο εξισώσεις.

$$\left\{\begin{matrix} f(-1)=3 \\ \kappa\alpha\iota \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{-2α + 5β = 3} \\ \kappa\alpha\iota \\ \lim\limits_{x\to 0^-}(2\alpha x+5\beta) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3\beta x+\alpha+\beta) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{-2α + 5β = 3} \\ \kappa\alpha\iota \\ 5\beta = \alpha+\beta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{-2α + 5β = 3} \\ \kappa\alpha\iota \\ 4\beta = \alpha \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{-8β + 5β = 3} \\ \kappa\alpha\iota \\ 4\beta = \alpha \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{-3β = 3} \\ \kappa\alpha\iota \\ 4\beta = \alpha \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \beta = -1 \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha = -4 \end{matrix}\right\}.$$

11. Αν $f(x) = \begin{cases} 3x^2-\alpha x+\beta, & \text{αν } \chi \le -2 \\ (\beta+2)x^2 - x + a, & \text{αν } -2<x<1 \\ x^2+2\beta x+2a-6, & \text{αν } x \ge 1 \end{cases}$, να υπολογίσετε τα α,β∈R, τέτοια ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Λύση: Επειδή οι άγνωστοι είναι δυο, θέλουμε δυο εξισώσεις.

$$\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) \\ \kappa\alpha\iota \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-2^-}(3x^2-\alpha x+\beta) = \lim\limits_{x\to-2^+}[(\beta+2)x^2-x+\alpha] \\ \kappa\alpha\iota \\ \lim\limits_{x\to 1^-}[(\beta+2)x^2-x+\alpha] = \lim\limits_{x\to 1^+}[x^2+2\beta x+2\alpha-6] \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} 3\beta-\alpha = 2 \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha+\beta = 6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \beta = 2 \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha = 4 \end{matrix}\right\}.$$

12. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}(3f(x)-2g(x)) = 7$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(3g(x)+7f(x)) = 1$ να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Λύση: Θέτω $\left\{\begin{matrix} \varphi(x) = 3f(x)\text{-}2g(x) \\ \& \\ \sigma(x) = 3g(x)+7f(x) \end{matrix}\right\}$..(Σ)

Τότε οι δοθείσες γίνονται $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 7$και $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma(x) = 1$.....................................(1)

Λύνουμε το σύστημα (Σ) ως προς f(x) και g(x):

$$\left\{\begin{matrix} \varphi(x) = 3f(x)\text{-}2g(x) \\ \& \\ \sigma(x) = 3g(x)+7f(x) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} X7 \\ \\ X(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 7\varphi(x) = 21f(x)\text{-}14g(x) \\ \& \\ -3\sigma(x) = -9g(x)\text{-}21f(x) \end{matrix}\right\} (+)$$

23g(x) = 3σ(x) - 7φ(x) ⇔ $g(x) = \frac{3}{23}\sigma(x) - \frac{7}{23}\varphi(x)$ και

$$\left\{\begin{matrix} \varphi(x) = 3f(x)\text{-}2g(x) \\ \& \\ \sigma(x) = 3g(x)+7f(x) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \mathbf{x3} \\ \\ \mathbf{x2} \end{matrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3\varphi(x) = 9f(x)\text{-}6g(x) \\ \& \\ 2\sigma(x) = 6g(x)+14f(x) \end{matrix}\right\} (+)$$

23f(x)=3φ(x)+2σ(x)⇔ $f(x) = \frac{3}{23}\varphi(x) + \frac{2}{23}\sigma(x)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \frac{3}{23}\lim\limits_{x\to x_0}\sigma(x) - \frac{7}{23}\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) \overset{(1)}{=} \frac{3}{23}\cdot 1 - \frac{7}{23}\cdot 7 = -\frac{46}{23} = -2$

και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \frac{3}{23}\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) + \lim\limits_{x\to x_0}\frac{2}{23}\sigma(x) \overset{(1)}{=} \frac{3}{23}\cdot 7 + \frac{2}{23}\cdot 1 = \frac{23}{23} = 1.$

13. Εάν f περιττή στο R και $\lim\limits_{x\to 2}(f(x) - 1 + \sqrt{x}) = \sqrt{2}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Λύση: Θέτω $g(x) = f(x) - 1 + \sqrt{x}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \sqrt{2}$ .... (1)

και $f(x) = g(x) + 1 - \sqrt{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(g(x) + 1 - \sqrt{x}\right) \overset{(1)}{=} \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$. (2)

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{u\to 2} f(-u) = -\lim\limits_{u\to 2} f(u) \overset{(1)}{=} -1.$

Θέτω u=-x

f = περιττή

14. Εάν f(x)=f(1-x) για κάθε x∈IR, και $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)+4}{x-2}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Λύση: Θέτω $g(x) = \frac{f(x)+4}{x-2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 1$ .... (1)

και $f(x) = (x-2)g(x) - 4$ οπότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)g(x) - 4\right) \overset{(1)}{=} 0\cdot 1-4= -4$ .... (2)

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{u\to 2} f(1-u) = \lim\limits_{u\to 2} f(u) \overset{(2)}{=} -4.$

Θέτω u=1-x. Τότε $\lim\limits_{x\to -1} u = \lim\limits_{x\to -1}(1-x) = 2$

15. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-2}{f(x)+3} = 0$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 2$.

Λύση: Θέτω $g(x) = \frac{f(x)-2}{f(x)+3}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ .... (1)

και $f(x) - 2 = (f(x)+3)g(x) \Leftrightarrow f(x) - 2 = f(x)g(x) + 3g(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x)g(x) = 3g(x) + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)(1 - g(x)) = 3g(x) + 2$ και επειδή $g(x) = \frac{f(x)-2}{f(x)+3} \neq 1$ (γιατί αν g(x)=1 τότε f(x)-2=f(x)+3 ⇔

⇔ -2=3 άτοπο), θα είναι $f(x) = \frac{3g(x)+2}{1-g(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{3g(x)+2}{1-g(x)} \overset{(1)}{=} \frac{3\cdot 0+2}{1-0} = 2$.

16. Εάν $|f(x) - g(x)| \leq h(x)$, για κάθε x∈(α,x_0)U(x_0,β), και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, με ℓ ∈IR,

να δείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Λύση:

$|f(x) - g(x)| \leq h(x) \Leftrightarrow$

$|g(x) - f(x)| \leq h(x) \Leftrightarrow$

$-h(x) \leq g(x)-f(x) \leq h(x) \Leftrightarrow$

$f(x)-h(x) \leq g(x) \leq f(x) + h(x)$

επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - h(x)) = l - 0 = l$

και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + h(x)) = l + 0 = l$

$\left.\right\} \xrightarrow{\kappa\rho\iota\tau.\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta.} \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l.$

17. Αν για κάθε x∈IR είναι $|\eta\mu x - xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Λύση:

$|\eta\mu x - xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|$

$\Leftrightarrow |xf(x) - \eta\mu x| \leq |x - \eta\mu x|$

$\Leftrightarrow \frac{|xf(x)-\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{|x-\eta\mu x|}{|x|}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{xf(x)-\eta\mu x}{x}\right| \leq \left|\frac{x-\eta\mu x}{x}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\frac{xf(x)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x}\right| \leq \left|\frac{x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x}\right|$

$\Leftrightarrow \left|f(x) - \frac{\eta\mu x}{x}\right| \leq \left|1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right|$

$\Leftrightarrow -\left|1-\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le f(x)-\frac{\eta\mu x}{x} \le \left|1-\frac{\eta\mu x}{x}\right|$

$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x}-\left|1-\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le f(x) \le \frac{\eta\mu x}{x}+\left|1-\frac{\eta\mu x}{x}\right|$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\left|1-\frac{\eta\mu x}{x}\right|\right)=1-|1-1|=1-0=1$

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\left|1-\frac{\eta\mu x}{x}\right|\right)=1+|1-1|=1+0=1$ $\Big\}\xrightarrow{\kappa\rho\iota\tau.\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta.} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1.$

18. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$, υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0 και f(x)<0<g(x) κοντά στο x_0, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Λύση: f(x)<0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1\le 0$ ....(1)

g(x)>0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2\ge 0$ ....(2)

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Leftrightarrow l_1=l_2$(3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει $l_1=l_2=0$.

19. Εάν $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2x\le 0$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Λύση: $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2x\le 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)+1-\eta\mu^2x\le 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)+1\le\eta\mu^2x \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)^2\le\eta\mu^2x \Leftrightarrow$

$|f(x)-1|\le|\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$-|\eta\mu x|\le f(x)-1\le|\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$1-|\eta\mu x|\le f(x)\le 1+|\eta\mu x|$ ....(1)

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}(1-|\eta\mu x|)=1-0=1$ ....(2)

Και $\lim\limits_{x\to 0}(1+|\eta\mu x|)=1+0=1$ ....(3)

Από (1), (2) και (3) και από το ***κριτήριο παρεμβολής***, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

20. Εάν $2x\eta\mu x+f^2(x)\le 2xf(x)+\eta\mu^2x$ για κάθε $x\in IR$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Λύση: $2x\eta\mu x+f^2(x)\le 2xf(x)+\eta\mu^2x \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)\le\eta\mu^2x-2x\eta\mu x \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)+x^2\le\eta\mu^2x-2x\eta\mu x+x^2 \Leftrightarrow$

$(f(x)-x)^2\le(x-\eta\mu x)^2 \Leftrightarrow$

$|f(x)-x|\le|x-\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$-|x-\eta\mu x|\le f(x)-x\le|x-\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$x-|x-\eta\mu x|\le f(x)\le x+|x-\eta\mu x|$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}(x-|x-\eta\mu x|)=0-|0-0|=0$ ....(2)

Και $\lim\limits_{x\to 0}(x+|x-\eta\mu x|)=0+|0-0|=0$ ....(3)

Από (1), (2) και (3) και από το ***κριτήριο παρεμβολής***, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

21. Εάν $x-x^3\le 2f(x)\le x$, για κάθε $x\in IR$, να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

Λύση: $x-x^3\le 2f(x)\le x \Leftrightarrow$

$\frac{x-x^3}{2}\le f(x)\le\frac{x}{2}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^3}{2}=\frac{0-0^3}{2}=0$

και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$ $\Big\}\xrightarrow{\kappa\rho\iota\tau.\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta.} \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ορίου διακρίνουμε περιπτώσεις:

- x<0. Τότε $x-x^3\le 2f(x)\le x \overset{x<0}{\Rightarrow}$

$$\frac{x-x^3}{2x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x}{2x} \Rightarrow$$
$$\frac{1-x^2}{2} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{2}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-x^2}{2} = \frac{1-0^2}{2} = \frac{1}{2}$

και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\xRightarrow{\kappa\rho\iota\tau.\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta.} \lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$. ……………(1)

- x>0. Τότε $x-x^3 \leq 2f(x) \leq x \overset{x>0}{\Rightarrow}$

$$\frac{x-x^3}{2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x}{2x} \Rightarrow$$
$$\frac{1-x^2}{2} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{2}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-x^2}{2} = \frac{1-0^2}{2} = \frac{1}{2}$

και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\xRightarrow{\kappa\rho\iota\tau.\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta.} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$. ……………(2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$.

22. Έστω $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 1/2$ και για κάθε x>0 ισχύει $f(x)-1 < x < f^2(x)-f(x)$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x) = 1$.

Λύση: $f(x)-1 < x \Rightarrow$ (παρατήρηση 5)

$\lim\limits_{x\to0}(f(x)-1) \leq \lim\limits_{x\to0}x = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to0}f(x) \leq 1$ ……………………………………………………………………… (1)

Επίσης $f^2(x)-f(x) > x \Rightarrow$

$$f^2(x) - f(x) + \frac{1}{4} > x + \frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 > x + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| > \sqrt{x+\frac{1}{4}}$ και επειδή $f(x) \geq ½ \Rightarrow$

$$f(x)-\frac{1}{2} > \sqrt{x+\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$f(x) > \frac{1}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} \Rightarrow$…………………(παρατήρηση 5)

$$\lim_{x\to0}f(x) \geq \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right) \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x) \geq 1$……………………………………………… (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}f(x) = 1$.

23. Έστω $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x)+2x^2f(x)=3\eta\mu^3 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Εάν $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$,

i) να δείξετε ότι α=1,

ii) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}$.

Λύση: **i)** $f^3(x)+2x^2f(x)=3\eta\mu^3 x \Leftrightarrow$

$$\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{2x^2f(x)}{x^3} = \frac{3\eta\mu^3x}{x^3} \Leftrightarrow$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 2\frac{f(x)}{x} = 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$ και αφού υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$,

$$\left(\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = 3\left(\cancelto{1}{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$\alpha^3+2\alpha=3 \Leftrightarrow$

$\alpha^3+2\alpha-3=0$. ……………………………………………………………………… (1)

1	**0**	**2**	**-3**	**1**
↓	1	1	3	
1	**1**	**3**	**0**	

(1) ⇔ (α-1)($α^2$+α+3)=0 ⇔ α=1 ή $α^2$+α+3=0 που έχει Δ=-11<0 και είναι αδύνατη. Άρα α=1.

ii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(ημx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(ημx)}{ημx}\cdot\frac{ημx}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(ημx)}{ημx}\cdot\overbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{ημx}{x}}^{1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(ημx)}{ημx}=\lim\limits_{u\to0}\frac{f(u)}{u}=1.$

Θέτω u=ημx. Τότε $\lim\limits_{x\to0}u=\lim\limits_{x\to0}ημx=ημ0=0$

24. 24768-2: Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=\sqrt{4x-3}$.

α) Να αποδείξτε ότι για κάθε $x\in$ IR, ισχύει $f(x)\geq\frac{3}{4}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x)=|2x-1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$ (Μονάδες 10)

Λύση:

α) Είναι f(x) ≥ $\frac{3}{4}$ ⇔ 4(x^2-x+1) ≥ 3
⇔ $4x^2$-4x+1 ≥ 0
⇔ $(2x-1)^2$ ≥ 0

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν x = $\frac{1}{2}$.

Εναλλακτικά f΄(x) = (x^2-x+1)΄= 2x-1.

x	-∞	$\frac{1}{2}$	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Ο.Ε. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το ¾ για x = 1/2. ‘Άρα $f(x)\geq\frac{3}{4}$, για κάθε $x\in$ IR.

β) Οι συναρτήσεις έχουν αντίστοιχα πεδία ορισμού D_f = IR και $D_g=\left[\frac{3}{4},\ +\infty\right)$, οπότε

$D_{gof}=\{x\in D_f/f(x)\in D_g\}=\left\{x\in IR\ /f(x)\geq\frac{3}{4}\right\}\overset{(α)}{=}$ IR.

(gof)(x) = g(f(x)) $=\sqrt{4(x^2-x+1)-3}$
$=\sqrt{4x^2-4x+1}$
$=\sqrt{(2x-1)^2}$
= |2x-1|, $x\in$ IR.

γ) Όταν x → 0, τότε 2x-1 < 9 οπότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-2x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x}{\sqrt{x+1}-1}$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2-1^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$=-2\cdot\lim\limits_{x\to0}(x(\sqrt{x+1}+1))$

= -2·2
= -4.

25. 28477-2: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in$ IR και $g(x) = lnx^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε την συνάρτηση gof. (Μονάδες 8)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(gof)(x)-\eta\mu^2x-4}{x}$. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Η συνάρτηση g ορίζεται, όταν και μόνο όταν, $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο A_g = IR*.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το A_f = IR.

$A_{gof} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} = \{x \in$ IR $/ e^{3x+2} \in$ IR$\}$ = IR.

Επομένως, ορίζεται η gof και είναι (gof)(x) = g(f(x))

= g(e^{3x+2})
= ln(e^{3x+2})²
= 2ln(e^{3x+2})
= 2(3x+2)
= 6x+4, $x \in$ IR.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(gof)(x)-\eta\mu^2x-4}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6x+4-\eta\mu^2x-4}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\eta\mu^2x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{\eta\mu^2x}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(6-\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right)$

$= 6 - 0 \cdot 1$

$= 6$.

26. 28684-3: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR → IR, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \kappa$, με $\kappa \in$ IR. Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in$ IR, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$ (Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 4)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού «$\left|f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right| = -f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$, κοντά στο 0». Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x} = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}$

$= 2\cdot\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}$

$= 2 \cdot 1$

$= 1$.

Θέτω u = 2x
$\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \kappa$, με $\kappa \in$ IR, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \kappa$.

• Αν x < 0, τότε $xf(x) \leq \eta\mu 2x \overset{x<0}{\Longleftrightarrow} f(x) \geq \frac{\eta\mu 2x}{x}$. Άρα και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \geq \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow$ κ ≥ 2

• Αν x > 0, τότε $xf(x) \leq \eta\mu 2x \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} f(x) \leq \frac{\eta\mu 2x}{x}$. Άρα και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \leq \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow$ κ ≤ 2

⇔ κ = 2.

γ) Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο IR, θα είναι συνεχής στο 0. Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)$

$= 2 \cdot 1 \cdot 1$

$= 2 > 0$,

Άρα $f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x} > 0$ κοντά στο 0.

Επομένως $\left|f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right| = f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ κοντά στο 0.

Ο ισχυρισμός λοιπόν είναι λανθασμένος.

27. END.