ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΟΡΙΑ 0/0

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt{5}-x\sqrt{x}}$ ii) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^7-x+2|-2}{x-1}$ v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$ vi) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8}$

vii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1}$. vii) $\lim\limits_{x\to \sqrt[3]{2}}\dfrac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=[0,5)\cup(5,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt{5}-x\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 5}\frac{(5-\sqrt{5x})(5+\sqrt{5x})(5\sqrt{5}+x\sqrt{x})}{(5\sqrt{5}-x\sqrt{x})(5+\sqrt{5x})(5\sqrt{5}+x\sqrt{x})}=\lim_{x\to 5}\frac{(25-5x)(5\sqrt{5}+x\sqrt{x})}{(125-x^3)(5+\sqrt{5x})}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{5(5-x)(5\sqrt{5}+x\sqrt{x})}{(5^3-x^3)(5+\sqrt{5x})}=\lim_{x\to 5}\frac{5\cancel{(5-x)}(5\sqrt{5}+x\sqrt{x})}{\cancel{(5-x)}(5^2+5x+x^2)(5+\sqrt{5x})}=\lim_{x\to 5}\frac{5(5\sqrt{5}+x\sqrt{x})}{(25+5x+x^2)(5+\sqrt{5x})}=$$

$$=\frac{5(5\sqrt{5}+5\sqrt{5})}{(25+5\cdot 5+5^2)(5+\sqrt{5\cdot 5})}=\frac{5\cdot 10\sqrt{5}}{75\cdot 10}=\frac{\sqrt{5}}{15}.$$

2ος τρόπος : $$\lim_{x\to 5}\frac{5-\sqrt{5x}}{5\sqrt{5}-x\sqrt{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 5}\frac{(5-\sqrt{5x})'}{(5\sqrt{5}-x\sqrt{x})'}=\lim_{x\to 5}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{5x}}(5x)'}{-\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{5}{2\sqrt{5x}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{5}{\sqrt{5x}}}{3x^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{5}{\sqrt{5x}}}{3\sqrt{x}}=\lim_{x\to 5}\frac{5}{3x\sqrt{5}}=\frac{5}{15\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{75}=\frac{\sqrt{5}}{15}.$$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-3,0]$.

$$\lim_{x\to -3}\frac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -3}\frac{(2\sqrt{-3x}-3+x)(2\sqrt{-3x}+3-x)}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=\lim_{x\to -3}\frac{(2\sqrt{-3x})^2-(3-x)^2}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{4|-3x|-9+6x-x^2}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}\underset{\substack{x<0\\ -3x>0\\ |-3x|=-3x}}{=}\lim_{x\to -3}\frac{-12x-9+6x-x^2}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=-\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x+3}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=$$

$$=-\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)^{1/2}(2\sqrt{-3x}+3-x)}=-\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^{2-1/2}}{(2\sqrt{-3x}+3-x)}=-\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^{3/2}}{(2\sqrt{-3x}+3-x)}=\frac{0}{12}=0.$$

2ος τρόπος : $$\lim_{x\to -3}\frac{2\sqrt{-3x}-3+x}{\sqrt{x+3}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to -3}\frac{(2\sqrt{-3x}-3+x)'}{(\sqrt{x+3})'}=\lim_{x\to -3}\frac{2\frac{1}{2\sqrt{-3x}}(-3x)'+1}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}(x+3)'}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\frac{-3}{\sqrt{-3x}}+1}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to -3}\frac{\frac{-3+\sqrt{-3x}}{\sqrt{-3x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to -3}\frac{2(-3+\sqrt{-3x})\sqrt{x+3}}{\sqrt{-3x}}=0.$$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(0,+\infty)$. $$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{\left(x-\sqrt{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1+2\sqrt{x}}{\cancel{2\sqrt{x}}}}{\frac{1-2\sqrt{x}}{\cancel{2\sqrt{x}}}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}=-\dfrac{1+0}{1-0}=-1.$

iv) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x^7-x+2)=2>0$, είναι $x^7-x+2>0$ κοντά στο 1. Άρα $|x^7-x+2|=x^7-x+2$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^7-x+2|-2}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x+2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^6-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^3-1)(x^3+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(x^3+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}\left(x(x^2+x+1)(x^3+1)\right)=1\cdot 3\cdot 2=\mathbf{6}.$$

2ος τρόπος : $\ldots\ldots=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^7-x)'}{(x-1)'}==\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^6-1}{1}=7-1=6.$

v) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{1+1+1}{(1+1)(1+1)}=\frac{3}{4}.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^3-1\right)'}{\left(x^4-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{4x}=\dfrac{3}{4}.$

vi) Πρέπει $x^2-2x-8\neq 0 \underset{(*)}{\Leftrightarrow} x\neq 4$ και $x\neq -2$. Άρα $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,4)\cup(4,+\infty)$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8}\underset{(*)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to -2}\frac{-3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x+2)(x-4)}=\lim_{x\to -2}\frac{-3x+1}{x-4}=-\frac{7}{6}.$$

(∗) Παραγοντοποίηση αριθμητή: $\Delta=49$, $x_1=-2$, $x_2=1/3$.
Παραγοντοποίηση παρονομαστή: $\Delta=36$, $x_1=-2$, $x_2=4$.

Η παραγοντοποίηση αριθμητή και παρονομαστή, μπορεί να γίνει και με το Horner.

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-3x^2-5x+2}{x^2-2x-8}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(-3x^2-5x+2\right)'}{\left(x^2-2x-8\right)'}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-6x-5}{2x-2}=\dfrac{12-5}{-4-2}=-\dfrac{7}{6}.$

vii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1}\underset{(*)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(x+1)}(2x^2-7x-1)}{\cancel{(x+1)}(x^3-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-7x-1}{x^3-1}=\dfrac{2+7-1}{-1-1}=-4.$

(∗) Παραγοντοποίηση αριθμητή:

2	**-5**	**-8**	**-1**	**-1**
↓	-2	7	1	
2	**-7**	**-1**	**0**	

.

Παραγοντοποίηση παρονομαστή:

1	**1**	**0**	**-1**	**-1**	**-1**
↓	-1	0	0	1	
1	**0**	**0**	**-1**	**0**	

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(2x^3-5x^2-8x-1\right)'}{\left(x^4+x^3-x-1\right)'}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2-10x-8}{4x^3+3x^2-1}=\dfrac{6+10-8}{-4+3-1}=-\dfrac{8}{2}=-4.$

viii) $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\dfrac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\dfrac{x^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{x-\sqrt[3]{2}}=\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\dfrac{\cancel{\left(x-\sqrt[3]{2}\right)}\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)}{\cancel{x-\sqrt[3]{2}}}=$

$\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=\sqrt[3]{2}^{\,2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=3\sqrt[3]{4}.$

<u>**2ος τρόπος :**</u> $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\dfrac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\dfrac{\left(x^3-2\right)'}{\left(x-\sqrt[3]{2}\right)'}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2}{1}=3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2=3\sqrt[3]{4}.$

2. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$. Θέτω $\sqrt{x}=u$, οπότε $u^2=x$ και $u^4=x^2$.

Όταν $x\to1$ τότε $\lim\limits_{x\to1}u=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^2+u-2}{u^4-1}\underset{(*)}{=}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}(u+2)}{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u+2}{(u+1)(u^2+1)}=\dfrac{3}{4}.$

(∗) Παραγοντοποίηση αριθμητή: $\Delta=9$, $x_1=1$, $x_2=-2$.

<u>**2ος τρόπος :**</u> $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x^2-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x+\sqrt{x}-2\right)'}{\left(x^2-1\right)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2x}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}.$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Θέτω $\sqrt[12]{x}=u$, οπότε $\sqrt[3]{x}=u^4$ και $\sqrt[4]{x}=u^3$.

Όταν $x\to1$ τότε $\lim\limits_{x\to1}u=\lim\limits_{x\to1}\sqrt[12]{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^4-1}{u^3-1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{(u+1)(u^2+1)}{u^2+u+1}=\dfrac{4}{3}.$

<u>**2ος τρόπος :**</u> $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)'}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^{1/3}\right)'}{\left(x^{1/4}\right)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot1}{\frac{1}{4}\cdot1}=\dfrac{4}{3}.$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(0,+\infty)$. Θέτω $\sqrt[6]{x}=u$, οπότε $\sqrt[3]{x}=u^2$ και $\sqrt{x}=u^3$.

Όταν $x\to0$ τότε $\lim\limits_{x\to0}u=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[6]{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u^3+u^2}{u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\cancel{u}(u^2+u)}{\cancel{u}}=\lim\limits_{u\to0}(u^2+u)=0.$

<u>**2ος τρόπος :**</u> Με τον κανόνα De l' Hospital προκύπτει πολύ πιο δύσκολα.

3. <u>Να υπολογίσετε τα όρια:</u>

i) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|+x^2-5x+4}{x-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{|x+3|+x^2+5x+6}{x^2-9}$

iii) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x^2-x-2|}{x^3-3x-2}$ **v)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Όταν $x\to1^-$, τότε $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$ οπότε $|x-1|=-x+1$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|x-1|+x^2-5x+4}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{-x+1+x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-6x+5}{x-1}\underset{(*)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{x-1}}=1-5=-4.$$

(∗) Παραγοντοποίηση αριθμητή: $\Delta=16$, $x_1=1$, $x_2=5$.

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

Όταν $x\to-3^+$, τότε $x>-3 \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow |x+3|=x+3$.

$$\lim_{x\to-3^+}\frac{|x+3|+x^2+5x+6}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-3^+}\frac{x+3+x^2+5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to-3^+}\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}=\lim_{x\to-3^+}\frac{(x+3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+3)}(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to-3^+}\frac{x+3}{x-3}=\frac{0}{-6}=0.$$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

Βρίσκουμε το πρόσημο του x^2-5x+6.

$\Delta=1$, $x_1=2$, $x_2=3$.

x	$-\infty$ 2 ←	3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	-	+

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι όταν $x\to2^+$, τότε $2<x<3 \Rightarrow x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow |x^2-5x+6|=$ $=-(x^2-5x+6)$.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{|x^2-5x+6|}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=-\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=-\lim_{x\to2^+}\frac{x-3}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

iv) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού:

$x^3-3x-2\neq0$...(1)

1	**0**	**-3**	**-2**	**-1**
↓	-1	1	2	
1	**-1**	**-2**	**0**	

(1) $\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2)\neq0 \Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x-2)\neq0 \Leftrightarrow x\neq-1$ και $x\neq2$.

($\Delta=9$, $x_1=-1$, $x_2=2$)

Άρα $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ και το όριο έχει νόημα όταν $x\to2^-$.

Βρίσκουμε το πρόσημο του x^2-x-2.

x	$-\infty$ -1	→ 2	$+\infty$
x^2-x-2	+	-	+

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι όταν $x\to2^-$, τότε $-1<x<2 \Rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow |x^2-x-2|=-(x^2-x-2)$.

$$\lim_{x\to2^-}\frac{|x^2-x-2|}{x^3-3x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-x-2}{x^3-3x-2}=-\lim_{x\to2^-}\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)^{\cancel{2}}}=-\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{3}.$$

v) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

Βρίσκουμε το πρόσημο του $-x^2+3x$.

$\Delta=9$, $x_1=0$, $x_2=3$.

x	$-\infty$ 0	→ 3 ←	$+\infty$
$-x^2+3x$	-	+	-

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι εκατέρωθεν του 3 το τριώνυμο $-x^2+3x$ αλλάζει πρόσημο. Άρα θα βρούμε πλευρικά όρια.

- όταν $x\to3^-$, τότε $0<x<3 \Rightarrow -x^2+3x>0 \Rightarrow |-x^2+3x|=-x^2+3x$.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{-x^2+3x+x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-2x+6}{x^2-9}=-2\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{x-3}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}=$$

$$=-2\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x+3}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

- όταν $x\to 3^+$, τότε $x>3 \Rightarrow -x^2+3x<0 \Rightarrow |-x^2+3x|=x^2-3x$.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x+x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2-8x+6}{x^2-9}=2\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{(x+3)(x-3)}=$$

$$=2\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=2\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Από (1) και (2) επειδή $-\frac{1}{3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}\neq\lim_{x\to 3^+}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}=\frac{2}{3}$ συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{|-x^2+3x|+x^2-5x+6}{x^2-9}$.

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x\to -1}\frac{4-|x+2|}{|3x-1|+x}$ ii) $\lim_{x\to -1}\frac{|2x-1|+x-2}{x^2-1}$ iii) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x^2-x|}$

iv) $\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|+3|x-1|-4}{x-2}$.

Λύση: i) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού.

$|3x-1|+x\neq 0 \Leftrightarrow |3x-1|\neq -x \Leftrightarrow \begin{cases}3x-1\neq -x, & \text{αν } x>\frac{1}{3}\\ -3x+1\neq -x, & \text{αν } x<\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{1}{4}, & \text{αν } x>\frac{1}{3}\\ x\neq\frac{1}{2}, & \text{αν } x<\frac{1}{3}\end{cases}$ που είναι αληθής για κάθε $x\in R$. Άρα $A_f=R$ και το όριο έχει νόημα όταν $x\to -1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{4-|x+2|}{|3x-1|+x}=\frac{4-|-1+2|}{|-3-1|-1}=\frac{4-|1|}{|-4|-1}=\frac{4-1}{4-1}=\frac{3}{3}=1.$$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-1)U(-1,1)U(1,+\infty)$.
Επειδή $\lim_{x\to -1}(2x-1)=-3<0 \Rightarrow 2x-1<0$ κοντά στο -1, οπότε $|2x-1|=-2x+1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{|2x-1|+x-2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{-2x+1+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x-1}{(x+1)(x-1)}=-\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=-\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

iii) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,0)U(0,1)U(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x^2-x|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x(x-1)|}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x|\cdot|x-1|}.$$

- Όταν $x\to 0^+$ τότε $|x|=x$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{|x^2-x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot|x-1|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{|x-1|}=\frac{2}{|0-1|}=2.$
- Όταν $x\to 0^-$ τότε $|x|=-x$ και $\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{|x^2-x|}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot|x-1|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{|x-1|}=-\frac{2}{|0-1|}=-2.$

Επειδή $-2=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{|x^2-x|}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{|x^2-x|}=2$, δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{|x^2-x|}$.

iv) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,2)U(2,+\infty)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1<0 \Rightarrow$ x-3<0 κοντά στο 2, οπότε |x-3|=-x+3.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1>0 \Rightarrow$ x-1>0 κοντά στο 2, οπότε |x-1|=x-1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|+3|x-1|-4}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{-x+3+3(x-1)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x-2}=2\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=2\cdot 1=2.$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια, για τις διάφορες τιμές του α∈R:

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha^2-x^2}{|x|-a}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-|a|}{|x|-a}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=R-{-α, α} εάν α≥0 και A_f=R εάν α<0.

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha^2-x^2}{|x|-a}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha^2-|x|^2}{|x|-a}\lim_{x\to\alpha}\frac{(\alpha-|x|)(\alpha+|x|)}{|x|-a}=-\lim_{x\to\alpha}\frac{\cancel{(|x|-\alpha)}(\alpha+|x|)}{\cancel{|x|-a}}=-\lim_{x\to\alpha}(\alpha+|x|)=-\alpha-|\alpha|.$$

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=R-{-α, α} εάν α≥0 και A_f=R εάν α<0.

- Όταν α=0 τότε $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-|a|}{|x|-a}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$. Επειδή εκατέρωθεν του 0 το x αλλάζει πρόσημο, θα βρούμε τα πλευρικά όρια.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{-x}\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{x}\right)=1$. Επομένως δεν υπάρχει το όριο όταν α=0.

- Όταν α>0 τότε |α|=α και αφού $\lim\limits_{x\to\alpha}x=\alpha>0$ θα είναι και x>0 άρα |x|=x.

Επομένως $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-|a|}{|x|-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x-a}=1.$

- Όταν α<0 τότε |α|=-α και αφού $\lim\limits_{x\to\alpha}x=\alpha<0$ θα είναι και x<0 άρα |x|=-x.

Επομένως $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-|a|}{|x|-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x+a}{-x-a}\right)=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x+a}{x+a}=-1.$

6. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=1$ και g(x)≠1 κοντά στο x_0, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, όπου $f(x)=\dfrac{\sqrt{g^2(x)+3}-2}{g(x)-1}$.

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{g^2(x)+3}-2}{g(x)-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(\sqrt{g^2(x)+3}-2\right)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}{(g(x)-1)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g^2(x)+3-4}{(g(x)-1)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g^2(x)-1}{(g(x)-1)\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{(g(x)-1)}(g(x)+1)}{\cancel{(g(x)-1)}\left(\sqrt{g^2(x)+3}+2\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)+1}{\sqrt{g^2(x)+3}+2}=\frac{1+1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

7. Εάν α, β ∈ Z, και $f(x)=\begin{cases}4x, & x\le\beta\\ 2(x+\alpha)+1, & x>\beta\end{cases}$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\beta}f(x)$.

Λύση: Για να υπάρχει το όριο, πρέπει $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\beta^-}(4x)=\lim\limits_{x\to\beta^+}(2(x+\alpha)+1)\Leftrightarrow$ 4β=2(β+α)+1 ⇔

⇔ 2β=2α+1 ⇔ $\beta-\alpha=\dfrac{1}{2}$ που είναι αδύνατο, γιατί β-α ∈ Z και $\dfrac{1}{2}\notin$ Z.

8. Να εξετάσετε εάν υπάρχουν α, β∈R, τέτοια ώστε $\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+2\beta-5}{x^2-1}=4$.

Λύση: Θέτω $f(x)=\frac{x^3+ax+2\beta-5}{x^2-1}$.

Τότε $\lim_{x\to1}f(x)=4$. .... (1)

και $x^3+ax+2\beta-5=(x^2-1)f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to1}(x^3+ax+2\beta-5)=\lim_{x\to1}[(x^2-1)f(x)]\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

⇔ 1+α+2β-5=0·4 ⇔ 2β=4-α .... (2)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+2\beta-5}{x^2-1}=4\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+4-a-5}{x^2-1}=4\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{x^3+\mathbf{\alpha x}-\mathbf{\alpha}-1}{x^2-1}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)+\mathbf{\alpha}(\mathbf{x}-1)}{x^2-1}=4\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1+a)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1+a}{x+1}=4\Leftrightarrow\frac{3+\alpha}{2}=4\Leftrightarrow\mathbf{\alpha=5}$$

(2) ⇔ **β=-½.**

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-1}$ **ii)** $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-x}$ **iii)** $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}$

iv) $\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}$ **v)** $\lim_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}$ **vi)** $\lim_{x\to0}\frac{x}{\varepsilon\phi x}$ **vii)** $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 7x}{\varepsilon\phi 3x}$

viii) $\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$ **ix)** $\lim_{x\to1^+}\frac{(x^2-9)\eta\mu(x-1)}{|x^2-4x+3|}$ **x)** $\lim_{x\to-\alpha}\frac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha}$

Λύση: i) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=R-{1}.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-1}=\frac{\eta\mu0}{0-1}=0.$$

Το όριο δεν προκύπτει με τον κανόνα De l' Hospital, γιατί δεν είναι μορφή ($^0/_0$) ή ($^{\pm\infty}/_{\pm\infty}$).

ii) Το όριο έχει νόημα γιατί A_f=R-{0, -1, 1}.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x(x^2-1)}=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2-1}=1\cdot\frac{1}{-1}=-1.$$

2ος τρόπος : $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x^3-x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(\eta\mu x)'}{(x^3-x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3x^2-1}=\frac{\sigma\upsilon\nu 0}{-1}=\frac{1}{-1}=-1.$

iii) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: $\begin{cases}x+4\ge0\\ \sqrt{x+4}-2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-4\\ x+4\neq4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-4\\ x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow$ A_f=[-4,0)U(0,+∞)

και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu2x}{\sqrt{x+4}-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}+2)\eta\mu2x}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}+2)\eta\mu2x}{x+4-4}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}+2)\eta\mu2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+4}+2)\cdot2\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu2x}{2x}}_{1}=4\cdot2\cdot1=8.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(\eta\mu 2x)'}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sigma\upsilon\nu 2x}{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}=\lim\limits_{x\to0}\left(4\sqrt{x+4}\,\sigma\upsilon\nu 2x\right)=8.$

iv) Πρέπει $x^2-3x+2\neq0 \Leftrightarrow \Delta=1$, $x\neq1$ και $x\neq2$. Άρα $A_f=[-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$ και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}\overset{\binom{0}{0}}{=}\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}=\lim_{x-2\to0}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}\qquad \underline{\underline{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x-2=u}}$$

$$=\underbrace{\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}}_{1}\cdot\frac{1}{2-1}=1\cdot1=1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-3x+2}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to2}\frac{(\eta\mu(x-2))'}{\left(x^2-3x+2\right)'}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)}{2x-3}\ \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{4-3}=1.$

v) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: $\eta\mu x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi$, $\kappa\in Z \Leftrightarrow A_f=R-\{\kappa\pi, \kappa\in Z\}$ και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}\overset{\binom{0}{0}}{=}\frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}}=\frac{1}{1}=1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(x)'}{(\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1}{1}=1.$

vi) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: $\varepsilon\varphi x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi$, $\kappa\in Z \Leftrightarrow A_f=R-\{\kappa\pi, \kappa\in Z\}$ και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}\overset{\binom{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}=\lim_{x\to0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}}_{1}\cdot\lim_{x\to0}\sigma\upsilon\nu x\overset{(v)}{=}1\cdot1=1.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\varepsilon\varphi x}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(x)'}{(\varepsilon\varphi x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 0=1.$

vii) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: $\varepsilon\varphi 3x\neq0 \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi/3$, $\kappa\in Z \Leftrightarrow A_f=R-\{\kappa\pi/3, \kappa\in Z\}$ και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 7x}{\varepsilon\varphi 3x}\overset{\binom{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\eta\mu 7x}{x}}{\frac{\varepsilon\varphi 3x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{7\frac{\eta\mu 7x}{7x}}{3\frac{\varepsilon\varphi 3x}{3x}}=\frac{7\cdot\overbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 7x}{7x}}^{1}}{3\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi 3x}{3x}}_{1}}=\frac{7\cdot1}{3\cdot1}=\frac{7}{3}.$$

1 (παρατήρηση 9)

Διαιρούμε αριθμητή & παρονομαστή με x

θέτω 3x=u. Τότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi 3x}{3x}=\lim\limits_{u\to0}\frac{\varepsilon\varphi u}{u}=1$ (άάσκσχ. βιβλίου)

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu 7x}{\varepsilon\varphi 3x}\overset{\binom{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{(\eta\mu 7x)'}{(\varepsilon\varphi 3x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu 7x\cdot(7x)'}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}(3x)'}=\frac{7}{3}\lim\limits_{x\to0}\left(\sigma\upsilon\nu 7x\,\sigma\upsilon\nu^2 3x\right)=\frac{7}{3}\cdot1\cdot1=\frac{7}{3}.$

viii) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού: Θέτω $f(x)=x+\eta\mu x$, $x\in R$.
$f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x\geq0$ με $f'(x)=0$ στα σημεία $x=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in Z$, στα οποία η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Άρα f γνησίως αύξουσα στο R
Προφανής ρίζα x=0 και επειδή f γνησίως αύξουσα στο R, η ρίζα είναι μοναδική.
Άρα $A_f=R^*$ και το όριο έχει νόημα.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}\overset{\binom{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{1-\overbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}^{1}}{1+\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Διαιρούμε αριθμητή & παρονομαστή με x

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\eta\mu x)'}{(x+\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1-1}{1+1}=0.$

viii) $x^2-4x+3\neq 0 \Leftrightarrow \Delta=4$, $x\neq 1$ και $x\neq 3$. Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$.
Βρίσκουμε το πρόσημο του x^2-4x+3.

x	$-\infty$ 1 ←	3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	-	+

Από τον πίνακα πρόσημου βλέπουμε ότι όταν $x\to 1^+$, τότε $1<x<3 \Rightarrow x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow |x^2-4x+3|=$
$=-(x^2-4x+3)$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-9)\eta\mu(x-1)}{|x^2-4x+3|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-3)(x+3)\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x-3)}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+3)\eta\mu(x-1)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^+}(x+3)=$$

$$=-4\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=-4\cdot\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=-4\cdot 1=\mathbf{-\,4}.$$

θέτω x-1=u. Τότε $\lim\limits_{x\to 1}u=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ και u>0.

ix) Το όριο έχει νόημα γιατί $A_f=(-\infty,-\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$.
Θέτω x+α=u. Τότε x=u-α και $\lim\limits_{x\to -a}u=\lim\limits_{x\to -a}(x+a)=0$, οπότε

$$\lim_{x\to-\alpha}\frac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu(u-a)+\eta\mu\alpha}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu u\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu u)}{u}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u\sigma\upsilon\nu\alpha}{u}-\frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu u)}{u}\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}-\eta\mu\alpha\lim_{u\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu u}{u}=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot 1-\eta\mu\alpha\cdot 0=\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu\alpha}{x+\alpha}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{(\eta\mu x+\eta\mu\alpha)'}{(x+\alpha)'}=\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\ x}{1}=\sigma\upsilon\nu\alpha..$

10. Να υπολογίσετε τα α, β∈R, τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}2ax+5\beta, & \alpha\nu\ \ \chi\leq 0\\ x^2+3\beta x+a+\beta, & \alpha\nu\ x>0\end{cases}$ **, να διέρχεται από το σημείο Α(-1,3) και να υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$**.**

Λύση: Επειδή οι άγνωστοι είναι δυο, θέλουμε δυο εξισώσεις.

$$\begin{Bmatrix} f(-1)=3\\ \kappa\alpha\iota\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} -2\alpha+5\beta=3\\ \kappa\alpha\iota\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(2\alpha x+5\beta)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3\beta x+\alpha+\beta)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} -2\alpha+5\beta=3\\ \kappa\alpha\iota\\ 5\beta=\alpha+\beta\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} -2\alpha+5\beta=3\\ \kappa\alpha\iota\\ 4\beta=\alpha\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} -8\beta+5\beta=3\\ \kappa\alpha\iota\\ 4\beta=\alpha\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} -3\beta=3\\ \kappa\alpha\iota\\ 4\beta=\alpha\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} \beta=-1\\ \kappa\alpha\iota\\ \alpha=-4\end{Bmatrix}.$$

11. Αν $f(x)=\begin{cases}3x^2-\alpha x+\beta, & \alpha\nu\ \ \chi\leq -2\\ (\beta+2)x^2-x+a, & \alpha\nu\ -2<x<1\\ x^2+2\beta x+2a-6, & \alpha\nu\ x\geq 1\end{cases}$ **, να υπολογίσετε τα α,β∈R, τέτοια ώστε να υπάρχουν τα όρια** $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ **και** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$**.**

Λύση: Επειδή οι άγνωστοι είναι δυο, θέλουμε δυο εξισώσεις.

$$\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)\\ \kappa\alpha\iota\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-2^-}(3x^2-\alpha x+\beta)=\lim\limits_{x\to-2^+}[(\beta+2)x^2-x+\alpha]\\ \kappa\alpha\iota\\ \lim\limits_{x\to1^-}[(\beta+2)x^2-x+\alpha]=\lim\limits_{x\to1^+}[x^2+2\beta x+2\alpha-6]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}3\beta-\alpha=2\\ \kappa\alpha\iota\\ \alpha+\beta=6\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\beta=2\\ \kappa\alpha\iota\\ \alpha=4\end{matrix}\right\}.$$

12. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}(3f(x)-2g(x))=7$ και $\lim\limits_{x\to x_0}(3g(x)+7f(x))=1$ να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Λύση: Θέτω $\left\{\begin{matrix}\varphi(x)=3f(x)-2g(x)\\ \&\\ \sigma(x)=3g(x)+7f(x)\end{matrix}\right\}$ ....(Σ)

Τότε οι δοθείσες γίνονται $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=7$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma(x)=1$ ....(1)

Λύνουμε το σύστημα (Σ) ως προς f(x) και g(x):

$$\left\{\begin{matrix}\varphi(x)=3f(x)-2g(x)\\ \&\\ \sigma(x)=3g(x)+7f(x)\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\times 7\\ \\ \times(-3\end{matrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}7\phi(x)=21f(x)-14g(x)\\ \&\\ -3\sigma(x)=-9g(x)-21f(x)\end{matrix}\right\}(+)$$

$$23g(x)=3\sigma(x)-7\varphi(x)\Leftrightarrow g(x)=\frac{3}{23}\sigma(x)-\frac{7}{23}\phi(x)$$ και

$$\left\{\begin{matrix}\varphi(x)=3f(x)-2g(x)\\ \&\\ \sigma(x)=3g(x)+7f(x)\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\times 3\\ \\ \times 2\end{matrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}3\phi(x)=9f(x)-6g(x)\\ \&\\ 2\sigma(x)=6g(x)+14f(x)\end{matrix}\right\}(+)$$

$$23f(x)=3\varphi(x)+2\sigma(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{23}\phi(x)+\frac{2}{23}\sigma(x).$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\frac{3}{23}\lim\limits_{x\to x_0}\sigma(x)-\frac{7}{23}\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)\overset{(1)}{=}\frac{3}{23}\cdot1-\frac{7}{23}\cdot7=-\frac{46}{23}=-2$

και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\frac{3}{23}\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)+\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2}{23}\sigma(x)\overset{(1)}{=}\frac{3}{23}\cdot7+\frac{2}{23}\cdot1=\frac{23}{23}=1.$

13. Εάν f περιττή στο R και $\lim\limits_{x\to2}(f(x)-1+\sqrt{x})=\sqrt{2}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$.

Λύση: Θέτω $g(x)=f(x)-1+\sqrt{x}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to2} g(x)=\sqrt{2}$ ....(1)

και $f(x)=g(x)+1-\sqrt{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(g(x)+1-\sqrt{x}\right)\overset{(1)}{=}\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$. ......(2)

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{u\to2} f(-u)=-\lim_{u\to2} f(u)\overset{(1)}{=}-1.$$

Θέτω u=-x

f = περιττή

14. Εάν f(x)=f(1-x) για κάθε x∈R, και $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)+4}{x-2}=1$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

Λύση: Θέτω $g(x)=\frac{f(x)+4}{x-2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=1$ ....(1)

και $f(x)=(x-2)g(x)-4$ οπότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}((x-2)g(x)-4)\overset{(1)}{=}0\cdot 1-4=-4$..........(2)

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{u\to 2} f(1-u)=\lim\limits_{u\to 2} f(u)\overset{(2)}{=}-4.$

$\boxed{\text{Θέτω u=1-x. Τότε } \lim\limits_{x\to -1} u=\lim\limits_{x\to -1}(1-x)=2}$

15. Εάν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-2}{f(x)+3}=0$, **να δείξετε ότι** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$**=2.**

Λύση: Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)-2}{f(x)+3}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ ....(1)

και $f(x)-2=(f(x)+3)g(x)\Leftrightarrow f(x)-2=f(x)g(x)+3g(x)\Leftrightarrow f(x)-f(x)g(x)=3g(x)+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)(1-g(x))=3g(x)+2$ και επειδή $g(x)=\dfrac{f(x)-2}{f(x)+3}\neq 1$ (γιατί αν g(x)=1 τότε f(x)-2=f(x)+3 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ -2=3 άτοπο), θα είναι $f(x)=\dfrac{3g(x)+2}{1-g(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3g(x)+2}{1-g(x)}\overset{(1)}{=}\dfrac{3\cdot 0+2}{1-0}=2.$

16. Εάν $|f(x)-g(x)|\leq h(x)$, **για κάθε x∈(α,x_0)U(x_0,β), και** $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$**=0,** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$**=ℓ∈R, να δείξετε ότι και** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$**=ℓ.**

Λύση: $|f(x)-g(x)|\leq h(x)\Leftrightarrow$

$|g(x)-f(x)|\leq h(x)\Leftrightarrow$

-h(x) ≤ g(x)-f(x) ≤ h(x) $\Leftrightarrow$

f(x)-h(x) ≤ g(x) ≤ f(x) +h(x)

επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-h(x))=l-0=l$

και $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+h(x))=l+0=l$

$\xrightarrow{\text{κριτ. παρεμβ.}} \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l.$

17. Αν για κάθε x∈R είναι $|\eta\mu x-xf(x)|\leq|x-\eta\mu x|$, **να δείξετε ότι** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**=1.**

Λύση: $|\eta\mu x-xf(x)|\leq|x-\eta\mu x|\Leftrightarrow$

$|xf(x)-\eta\mu x|\leq|x-\eta\mu x|\Leftrightarrow$

$\dfrac{|xf(x)-\eta\mu x|}{|x|}\leq\dfrac{|x-\eta\mu x|}{|x|}\Leftrightarrow$

$\left|\dfrac{xf(x)-\eta\mu x}{x}\right|\leq\left|\dfrac{x-\eta\mu x}{x}\right|\Leftrightarrow$

$\left|\dfrac{xf(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\leq\left|\dfrac{x}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\Leftrightarrow$

$\left|f(x)-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\leq\left|1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\Leftrightarrow$

$-\left|1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\leq f(x)-\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq\left|1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\eta\mu x}{x}-\left|1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \leq f(x) \leq \dfrac{\eta\mu x}{x}+\left|1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \\ \text{Επειδή } \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-\left|1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\right)=1-|1-1|=1-0=1 \\ \text{και } \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+\left|1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\right)=1+|1-1|=1+0=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\kappa\rho\iota\tau.\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta.} \lim_{x\to x_0} f(x)=1.$$

18. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$=0, υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0 και f(x)<0<g(x) κοντά στο x_0, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$=0.

Λύση: f(x)<0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1 \leq 0$ ....(1)

g(x)>0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2 \geq 0$ ....(2)

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Leftrightarrow l_1=l_2$ ....(3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει $l_1=l_2=0$.

19. Εάν $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$ για κάθε x∈R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=1.

Λύση: $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)+1-\eta\mu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)+1 \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)^2 \leq \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$|f(x)-1| \leq |\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$-|\eta\mu x| \leq f(x)-1 \leq |\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$1-|\eta\mu x| \leq f(x) \leq 1+|\eta\mu x|$ ....(1)

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}(1-|\eta\mu x|)=1-0=1$ ....(2)

Και $\lim\limits_{x\to 0}(1+|\eta\mu x|)=1+0=1$ ....(3)

Από (1), (2) και (3) και από το ***κριτήριο παρεμβολής***, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

20. Εάν $2x\eta\mu x+f^2(x) \leq 2xf(x)+\eta\mu^2 x$ για κάθε x∈R, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=0.

Λύση: $2x\eta\mu x+f^2(x) \leq 2xf(x)+\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2xf(x) \leq \eta\mu^2 x - 2x\eta\mu x \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2xf(x)+x^2 \leq \eta\mu^2 x - 2x\eta\mu x+x^2 \Leftrightarrow$

$(f(x)-x)^2 \leq (x-\eta\mu x)^2 \Leftrightarrow$

$|f(x)-x| \leq |x-\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$-|x-\eta\mu x| \leq f(x)-x \leq |x-\eta\mu x| \Leftrightarrow$

$x-|x-\eta\mu x| \leq f(x) \leq x+|x-\eta\mu x|$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}(x-|x-\eta\mu x|)=0-|0-0|=0$ ....(2)

Και $\lim\limits_{x\to 0}(x+|x-\eta\mu x|)=0+|0-0|=0$ ....(3)

Από (1), (2) και (3) και από το ***κριτήριο παρεμβολής***, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

21. Εάν $x-x^3 \leq 2f(x) \leq x$, για κάθε x∈R, να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Λύση: $x-x^3 \leq 2f(x) \leq x \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{x-x^3}{2} \le f(x) \le \dfrac{x}{2} \\ \text{Επειδή} & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x^3}{2} = \dfrac{0-0^3}{2} = 0 \\ \text{και} & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2} = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{κριτ. παρεμβ.}} \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ορίου διακρίνουμε περιπτώσεις:

- x<0. Τότε $x-x^3 \le 2f(x) \le x \overset{x<0}{\Rightarrow}$

$$\frac{x-x^3}{2x} \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{x}{2x} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{1-x^2}{2} \ge \dfrac{f(x)}{x} \ge \dfrac{1}{2} \\ \text{Επειδή} & \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x^2}{2} = \dfrac{1-0^2}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \text{και} & \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{κριτ. παρεμβ.}} \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

- x>0. Τότε $x-x^3 \le 2f(x) \le x \overset{x>0}{\Rightarrow}$

$$\frac{x-x^3}{2x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{x}{2x} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{1-x^2}{2} \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{1}{2} \\ \text{Επειδή} & \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x^2}{2} = \dfrac{1-0^2}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \text{και} & \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{κριτ. παρεμβ.}} \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$.

22. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x) \ge 1/2$ και για κάθε x>0 ισχύει $f(x)-1 < x < f^2(x)-f(x)$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Λύση: $f(x)-1 < x \Rightarrow$ (παρατήρηση 5)

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-1) \le \lim_{x\to 0} x = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \le 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Επίσης $f^2(x)-f(x) > x \Rightarrow$

$$f^2(x)-f(x)+\frac{1}{4} > x+\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 > x+\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| > \sqrt{x+\frac{1}{4}}$$ και επειδή $f(x) \ge ½ \Rightarrow$

$$f(x)-\frac{1}{2} > \sqrt{x+\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$f(x) > \frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}} \Rightarrow$$ (παρατήρηση 5)

$$\lim_{x\to 0} f(x) \geq \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \geq 1 \text{ .... } (2)$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$

23. **Έστω f: R→R τέτοια ώστε $f^3(x)+2x^2f(x)=3ημ^3x$ για κάθε x∈R. Εάν $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = a \in R$,**

i) να δείξετε ότι α=1,

ii) να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(ημx)}{x}$.

Λύση: **i)** $f^3(x)+2x^2f(x)=3ημ^3x \Leftrightarrow$

$$\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{2x^2 f(x)}{x^3}=\frac{3ημ^3x}{x^3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}=3\left(\frac{ημx}{x}\right)^3$$ και αφού υπάρχουν τα όρια,

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3\left(\overset{1}{\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$α^3+2α=3 \Leftrightarrow$

$α^3+2α-3=0.$ .... (1)

1	**0**	**2**	**-3**	**1**
↓	1	1	3	
1	**1**	**3**	**0**	

(1) $\Leftrightarrow$ $(α-1)(α^2+α+3)=0 \Leftrightarrow α=1$ ή $α^2+α+3=0$ που έχει Δ=-11<0 και είναι αδύνατη. Άρα α=1.

ii) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(ημx)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(ημx)}{ημx}\cdot\frac{ημx}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(ημx)}{ημx}\cdot\overset{1}{\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(ημx)}{ημx}=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=1.$$

Θέτω u=ημx. Τότε $\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}ημx=ημ0=0$

24. τέλος