ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν μ∈R, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, αν

i) $f(x)=(\mu^2-|\mu|)x^3+\mu x^2+\mu^2 x-\mu$

ii) $f(x)=\dfrac{(x^3+x)\mu^2+(x^3-x)\mu-\mu}{(x-x^2)\mu^2+x\mu+x^2|\mu|-1}$

Λύση:

i) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

a) $\mu^2-|\mu|=0 \Leftrightarrow |\mu|^2-|\mu|=0$
$\Leftrightarrow |\mu|(|\mu|-1)=0$
$\Leftrightarrow |\mu|=0$ ή $|\mu|-1=0$
$\Leftrightarrow \mu=0$ ή $|\mu|=1$
$\Leftrightarrow \mu=0$ ή $\mu=1$ ή $\mu=-1$.

- μ=0. Τότε f(x)=0 για κάθε x∈R, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
- μ=1. Τότε $f(x)=x^2+x-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=(-\infty)^2=+\infty$.
- μ=-1. Τότε $f(x)=-x^2+x+1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-(-\infty)^2=-\infty$.

b) $\mu^2-|\mu|=0 \Leftrightarrow \mu\neq0$ και $\mu\neq1$ και $\mu\neq-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}((\mu^2-|\mu|)x^3+\mu x^2+\mu^2x-\mu)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(\mu^2-|\mu|)x^3=$

$=\begin{cases}-\infty, & \textbf{αν } \mathbf{x}\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ +\infty, & \textbf{αν } \mathbf{x}\in(-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$.

μ	-∞	-1		0		1	+∞
μ²-|μ|	+	0	-	0	-	0	+

ii) $f(x)=\dfrac{(x^3+x)\mu^2+(x^3-x)\mu-\mu}{(x-x^2)\mu^2+x\mu+x^2|\mu|-1}$

$=\dfrac{x^3\mu^2+x\mu^2+x^3\mu-x\mu-\mu}{x\mu^2-x^2\mu^2+x\mu+x^2|\mu|-1}$

$=\dfrac{(\mu^2+\mu)x^3+(\mu^2-\mu)x-\mu}{(|\mu|-\mu^2)x^2+(\mu^2+\mu)x-1}$.

Ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή, εξαρτάται από τις παραστάσεις $\mu^2+\mu$ και $|\mu|-\mu^2$.
$\mu^2+\mu=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mu=0$ ή $\mu=-1$.
$|\mu|-\mu^2=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mu=0$ ή $\mu=1$ ή $\mu=-1$.

- μ=0. Τότε f(x)=0 για κάθε x∈R, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
- μ=1. Τότε $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{2x-1}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-1}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=(-\infty)^2=+\infty$.
- μ=-1. Τότε $f(x)=-2x-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=-2(-\infty)=+\infty$.
- μ≠0 και μ≠1 και μ≠-1.

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\mu^2+\mu)x^3+(\mu^2-\mu)x-\mu}{(|\mu|-\mu^2)x^2+(\mu^2+\mu)x-1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\mu^2+\mu)x^3}{(|\mu|-\mu^2)x^2}$

$=\dfrac{\mu^2+\mu}{|\mu|-\mu^2}\lim\limits_{x\to-\infty}x$

μ	-∞	-1		0		1	+∞
|μ|-μ²	-		+		+		-
μ²+μ	+		-		+		+
$\dfrac{\mu^2+\mu}{\|\mu\|-\mu^2}$	-		-		+		-

$$= \frac{\mu^2+\mu}{|\mu|-\mu^2}\cdot(-\infty)$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \textbf{αν } \mathbf{x} \in (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(1,+\infty) \\ -\infty, & \textbf{αν } \mathbf{x} \in \mathbf{(0,1)} \end{cases}.$$

2. ***Υπολογίστε τα όρια:***

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x-3)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right]$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x-3)\eta\mu\frac{1}{x}\right]$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\varepsilon\phi\frac{1}{x+2}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

Λύση:

Θέτω $u=\frac{1}{x}$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} = \lim\limits_{u\to 0}\sigma\upsilon\nu u$ =συν0=1.

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x-3)\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right] \overset{(i)}{=}$ -∞·1=-∞.

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x-3)\eta\mu\frac{1}{x}\right] \overset{(i)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)\cdot\lim\limits_{u\to 0}\eta\mu u$ =-∞·ημ0=-∞·0 (απροσδιόριστη μορφή).

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(2x-3)\eta\mu\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x(2-\frac{3}{x})\eta\mu\frac{1}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left[x\eta\mu\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$= (2-0)\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}$$

=2·1

=2.

iv) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x\varepsilon\phi\frac{1}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+2}(x+2)\varepsilon\phi\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left((x+2)\varepsilon\phi\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \cancel{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}\right)}^{\,1}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\varepsilon\phi\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+2}}\right)$$

Θέτω $u=\frac{1}{x+2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=0$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\varepsilon\phi u}{u} = 1.$$

v) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(x)\cdot \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= -\infty \cdot \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} \longleftarrow$$

Θέτω $u=\frac{1}{x}$. Τότε $\lim_{x\to-\infty} u = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

$= -\infty \cdot 1$

$= -\infty$.

3. *Υπολογίστε τα όρια:*

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^4-3x^2+1}+2x-1\right)$

ii) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{8x^2-2}\right)$

iii) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^4+1}-\sqrt{9x^4+2}\right)$

iv) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\eta\mu x}{x^2+2}$

v) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{x^3-x+1}$

Λύση:

i) Είναι της μορφής $f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}\pm Q(x)$ με P(x)=$9x^4$-$3x^2$+1 και Q(x)=2x-1.

Επειδή η ρίζα του μεγιστοβάθμιου όρου του P(x) είναι $\sqrt{9x^4}=3x^2$, διαφορετικό από τον μεγιστοβάθμιο όρο του Q(x) που είναι 2x, βγάζουμε σταδιακά κοινούς παράγοντες τους μεγιστοβάθμιους όρους (παρατήρηση 8):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^4-3x^2+1}+2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4\left(9-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}+x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sqrt{\left(9-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}+x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\left(9-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}+\frac{1}{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=+\infty\cdot\left(\sqrt{9-0+0}+0(2-0)\right)$$

$= +\infty\cdot 3$

$= +\infty$.

ii) Είναι της μορφής $f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}-\sqrt[\nu]{Q(x)}$ με P(x)=$4x^2$+1 και Q(x)=$8x^2$-2.

Επειδή ο μεγιστοβάθμιος όρος του P(x) είναι $4x^2$, διαφορετικός από τον μεγιστοβάθμιο όρο του Q(x) που είναι $8x^2$, βγάζουμε σταδιακά κοινούς παράγοντες τους μεγιστοβάθμιους όρους (παρατήρηση 8):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{8x^2-2}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(8-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-|x|\sqrt{\left(8-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>0\\|x|=x}}\left(x\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-x\sqrt{\left(8-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>0\\|x|=x}}x\left(\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{\left(8-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$=+\infty\cdot\left(\sqrt{4+0}-\sqrt{8-0}\right)$$

$= +\infty\cdot\left(\sqrt{4}-\sqrt{8}\right)$

$= -\infty$. ……………………….γιατί $\sqrt{4}<\sqrt{8}$ άρα $\sqrt{4}-\sqrt{8}<0$.

iii) Είναι της μορφής $f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}-\sqrt[\nu]{Q(x)}$ με P(x)=9x^4+1 και Q(x)= 9x^4+2.
Επειδή τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) έχουν τον ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο 9x^4, εάν εξάγουμε κοινούς παράγοντες τους μεγιστοβάθμιους όρους, θα καταλήξουμε στην απροσδιόριστη μορφή +∞·0 (παρατήρηση 9), οπότε πολ/ζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^4+1}-\sqrt{9x^4+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^4+1}-\sqrt{9x^4+2}\right)\left(\sqrt{9x^4+1}+\sqrt{9x^4+2}\right)}{\left(\sqrt{9x^4+1}+\sqrt{9x^4+2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^4+1}\right)^2-\left(\sqrt{9x^{4^2}+2}\right)^2}{\left(\sqrt{x^4\left(9+\frac{1}{x^4}\right)}+\sqrt{x^4\left(9+\frac{2}{x^4}\right)}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{9x^4}+1-\cancel{9x^4}-2}{\left(x^2\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}+x^2\sqrt{9+\frac{2}{x^4}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{9+\frac{2}{x^4}}\right)}$$

$$=\frac{-1}{+\infty\left(\sqrt{9+0}+\sqrt{9+0}\right)}$$

$$=\frac{-1}{+\infty(3+3)}$$

$$=\frac{-1}{+\infty\cdot 6}$$

$$=\frac{-1}{+\infty}$$

=0.

iv) Επειδή το $\lim\limits_{x\to-\infty}\eta\mu x$ δεν υπάρχει γιατί η συνάρτηση ημx είναι περιοδική, προσπαθούμε να κάνουμε χρήση κριτηρίου παρεμβολής:

-1≤ημx≤1 $\underset{\substack{x\to-\infty\\x<0}}{\Longleftrightarrow}$ -x≥xημx≥x

$$\Leftrightarrow\ \frac{x}{x^2+2}\le\frac{x\eta\mu x}{x^2+2}\le\frac{-x}{x^2+2}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\overset{\text{Κρ.Παρ.}}{\Longrightarrow}\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\eta\mu x}{x^2+2}$=0.

__Παρατήρηση__: Μια συνάρτηση f λέγεται **φραγμένη**, όταν υπάρχουν αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε m ≤ f(x) ≤ M, για κάθε x. Τέτοια είναι η ημx γιατί -1≤ημx≤1.

Μια συνάρτηση f λέγεται **μηδενική**, όταν έχει όριο το μηδέν. Τέτοια είναι η $\frac{x}{x^2+2}$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+2}$=0. Ισχύει το θεώρημα: «**το γινόμενο μηδενικής επί φραγμένης είναι μηδενική**».

v) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=$ (-∞)3=-∞ ⇒ x^3-x+1<0…………………(1)

$$\left|\frac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{x^3-x+1}\right| = \frac{|x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|}{|x^3-x+1|}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{|x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|}{-x^3+x-1}$$

$$\le \frac{|x\eta\mu x|+|-\sigma\upsilon\nu x|}{-x^3+x-1}$$

$$= \frac{|x|\cdot|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{-x^3+x-1}$$

$$\le \frac{-x+1}{-x^3+x-1}$$ ……γιατί |ημx|≤1, |συνx|≤1 και όταν x→-∞ ⇒ x<0 ⇒|x|=-x

Άρα $\dfrac{x-1}{-x^3+x-1}\le\dfrac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{x^3-x+1}\le\dfrac{-x+1}{-x^3+x-1}$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{-x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x^3}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{-x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

$\overset{\text{Κρ.Παρ.}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{x^3-x+1}=0.$

4. *Υπολογίστε τα όρια:*

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}$

(*Παρατήρηση*: τα ερωτήματα είναι εξαρτώμενα.)

Λύση:

i) $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$ ………………γιατί |ημx|≤1 και όταν x→-∞ ⇒ x<0 ⇒|x|=-x

Άρα $\dfrac{1}{x}\le\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le-\dfrac{1}{x}$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$

$\overset{\text{Κρ.Παρ.}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0.$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}$ ⟵ Θέτω $u=\dfrac{1}{x}$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$=1.$

iii) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ (Άσκηση 2v) ⇒ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}=0$.………………………(1)

dzcz $\left|\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}\right| = \left|\dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}\right| = 2\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x\eta\mu\frac{1}{x}}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right|$

$= 2\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\cdot\left|\dfrac{1}{x\eta\mu\frac{1}{x}}\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu x\right|$

$\leq 2\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\cdot\left|\dfrac{1}{x\eta\mu\frac{1}{x}}\right|$ ....γιατί |συνx|≤1

και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$=0 (ερώτημα (i)) και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$ (ερώτημα (ii))

με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}=0.$

5. Να υπολογίσετε τα α, β∈R, ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-\alpha x+\beta\right)=1.$

Λύση:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}-\alpha x+\beta\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1-\alpha x(x+2)+\beta(x+2)}{x+2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-2ax+\beta x+2\beta}{x+2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(1-\alpha)x^2+(\beta-2a)x+1+2\beta}{x+2}\right)=1 \text{.......................(1)}$$

• α≠1. Τότε ο αριθμητής έχει μεγαλύτερο βαθμό από τον παρονομαστή και το όριο ισούται με ±∞ άτοπο γιατί το όριο ισούται με 1.

• α=1. Τότε η (1) δίνει:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(\beta-2)x+1+2\beta}{x+2}\right)=1 \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(\beta-2)\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)=1$ … γιατί εάν β=2 το όριο ισούται με 0, άτοπο.

⇔ β-2=1

⇔ β=3.

Άρα α=1, β=3.

6. **α)** Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+ax+1\right)$

β) βρείτε τα α, β∈R, ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+ax-2\beta\right)=1.$

Λύση:

α) Είναι της μορφής $f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}\pm Q(x)$ με P(x)=4x^2+x+1 και Q(x)=αx+1.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• α=2. Τότε πολ/ζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση (παρατήρηση 9 &10):

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x+1\right)\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x-1\right)}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}\right)^2-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+x+1-4x^2-4x-1}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{|x|\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}} \frac{-3x}{-x\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{-x\left(\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{4+0+0}+2-0}$$

= ¾.

- α≠2. Τότε εξάγουμε κοινούς παράγοντες τους μεγιστοβάθμιους όρους:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+ax+1\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+ax+1\right)\left(\sqrt{4x^2+x+1}-ax-1\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+1}-ax-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}\right)^2-(ax+1)^2}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x\left(a+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+x+1-a^2x^2-2ax-1}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\left(a+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}} \frac{4x^2+x+1-a^2x^2-2ax-1}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\left(a+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(4-a^2)x^2+(1-2a)x}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(a^2-4)x^2+(2a-1)x}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{1}{x}\right)}.$$

Το όριο εξαρτάται από την παράσταση α^2-4.

Εάν α^2-4 ≠ 0 $\overset{\alpha\neq 2}{\Leftrightarrow}$ α ≠ -2, τότε το όριο γίνεται:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(a^2-4+(2a-1)\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(a^2-4+(2a-1)\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-\infty\left(a^2-4+0\right)}{\sqrt{4+0+0}+a+0}$$

$$= \frac{-\infty(a-2)(a+2)}{a+2}$$ ……………………………….και αφού α ≠ -2

= -∞·(α-2)= $\begin{cases} -\infty, & \textbf{αν α} > \textbf{2} \\ +\infty, & \textbf{αν -2} \neq \textbf{α} < \textbf{2} \end{cases}$ .fκ

Εάν $α^2$-4 = 0 $\overset{\alpha\neq 2}{\Leftrightarrow}$ α = -2, τότε το δοθέν όριο δεν είναι απροσδιόριστη μορφή και γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x+1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty\\x<0\\|x|=-x}}\left(-x\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= -\lim_{\substack{x\to-\infty\\x<0\\|x|=-x}} x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2+\frac{1}{x}\right)$$

$$= +\infty\left(\sqrt{4+0+0}+2+0\right)$$

$$= +\infty\cdot 4$$

= +∞.

β) Το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+ax-2\beta\right)$ με αντικατάσταση γίνεται +∞+α·(-∞).

- Εάν α<0, τότε γίνεται +∞+∞=+∞ που απορρίπτεται γιατί $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+ax-2\beta\right)=1$.
- Εάν α>0 τότε προκύπτει απροσδιόριστη μορφή +∞-∞. Τότε εάν:

i) α ≠ 2, εξάγουμε κοινούς παράγοντες (παρατήρηση 8):

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+ax-2\beta\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(a-\frac{2\beta}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\left(a-\frac{2\beta}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty\\x<0\\|x|=-x}}\left(-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\left(a-\frac{2\beta}{x}\right)\right)$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a+\frac{2\beta}{x}\right)$$

$$=-\infty\left(\sqrt{4+0+0}-\alpha+0\right)$$

$$= +\infty\cdot(\alpha-2) = \begin{cases} +\infty, & \textbf{αν } \alpha>2 \\ -\infty, & \textbf{αν } 0<\alpha<2 \end{cases}.$$

Που απορρίπτεται γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+\alpha x-2\beta\right)=1.$

ii) α=2. Τότε πολ/ζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση (περίπτωση 9 & 10):

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+\alpha x-2\beta\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x-2\beta\right)\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x+2\beta\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x+2\beta\right)}=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+1}\right)^2-(2x-2\beta)^2}{\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x\left(2-\frac{2\beta}{x}\right)\right)}=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+x+1-4x^2+8\beta x-4\beta^2}{\left(|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\left(2-\frac{2\beta}{x}\right)\right)}=1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0\\ |x|=-x}}\frac{(1+8\beta)x+1-4\beta^2}{\left(-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\left(2-\frac{2\beta}{x}\right)\right)}=1$$

$$\Leftrightarrow -\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+8\beta+\frac{1-4\beta^2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{2\beta}{x}\right)}=1$$

…..γιατί αν 1+8β=0 τότε το όριο ισούται με μηδέν, γιατί ο αριθμητής έχει μικρότερο βαθμό του παρονομαστή, που απορρίπτεται γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+\alpha x-2\beta\right)=1.$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{1+8\beta+\frac{1-4\beta^2}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{2\beta}{x}}=-1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{1+8\beta+\frac{1-4\beta^2}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{2\beta}{x}}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+8\beta+0}{\sqrt{4+0+0}+2-0}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+8\beta}{4}=-1$$

$\Leftrightarrow$ 1+8β=-4

$\Leftrightarrow$ β=-$^5/_8$.

Άρα α=2 και β=-$^5/_8$.

7. Εάν για την περιττή συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2-\eta\mu x}=-\infty$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Λύση:

• Θέτω $g(x)=\frac{f(x)}{2-\eta\mu x}$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ ……………………………………………………(1)

και f(x)=(2-ημx)g(x) οπότε:

Επειδή ημx≤1 ⇔ -ημx≥-1

⇔ 2-ημx≥2-1

⇔ 2-ημx≥1

⇔ (2-ημx)g(x) ≤ g(x)………………… γιατί $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Leftrightarrow$ g(x)<0 κοντά στο -∝

⇔ f(x) ≤ g(x)…………………………………………………………….…(2)

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ……………………………………………….…(3)

(Εάν μια συνάρτηση έχει όριο το -∝, τότε και κάθε μικρότερή της έχει όριο το -∝)

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} f(-u) = -\lim_{u\to+\infty} f(u)$ 2 $\overset{(3)}{=}$ -(-∝)=+∝.

Θέτω u=-x. Τότε x=-u και όταν x⟶-∝ τότε u⟶+∝

f περιττή

8. *Υπολογίστε τα όρια:*

i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{x^4+1}$

ii) $\lim_{x\to 0}\left[(3x-5)\ln x^2\right]$

iii) $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$

iv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}+2^x}{e^x+2^{x+3}}$

v) $\lim_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

Λύση:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4+1}=1\cdot 0=0.$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(3x-5)\ln x^2\right]$= -5·(-∞)=+∞.

iii) Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$ $=e^2$.

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}+2^x}{e^x+2^{x+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(e+\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{e^x\left(1+8\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}$ …………………..γιατί e>2

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e+\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1+8\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^x}$$

$$=\frac{e+0}{1+8\cdot 0}$$

=e.

v) Βρίσκουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0\\ |x|=x}}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{+\infty \cdot \left(\sqrt{1+0}+1\right)}$$

=0.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u$ =-∝.............. γιατί $\sqrt{x^2+1}-x>0$.

9. δsD

Θέτω $\sqrt{x^2+1}-x=u$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ =0