ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1-13

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x-5, & αν\ 1<x\le 2\\ x-1, & αν\ 2<x<4\\ 3, & αν\ 4\le x<6\end{cases}$. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται:

a) $\int_1^2 f(x)dx$.
b) $\int_3^2 f(x)dx$.
c) $\int_3^4 f(u)du$. $\int_3^5 f(v)dv$.
d) $\int_3^5 f(\omega)d\omega$.
e) $\int_0^2 f(t)dt$.
f) $\int_6^6 f(t)dt$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x)&=\lim_{x\to 2^-}(3x-5)=1\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)&=\lim_{x\to 2^+}(x-1)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=1=f(2).$$ Άρα η f είναι συνεχής στο 2.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x)&=\lim_{x\to 4^-}(x-1)=3\\ \lim_{x\to 4^+} f(x)&=\lim_{x\to 4^+}(3)=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=3=f(4).$$ Άρα η f είναι συνεχής στο 4.

a) Στο διάστημα [1,2] δεν είναι συνεχής γιατί $1\notin D_f$. Επομένως δεν ορίζεται το $\int_1^2 f(x)dx$.
b) Στο διάστημα [2,3] είναι συνεχής. Επομένως ορίζεται το $\int_3^2 f(x)dx$.
c) Στο διάστημα [3,5] είναι συνεχής. Επομένως ορίζεται το $\int_3^4 f(u)du$. $\int_3^5 f(v)dv$.
d) Ομοίως.
e) Το διάστημα [0,2] δεν είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού D_f. Επομένως δεν ορίζεται το $\int_0^2 f(t)dt$
f) Το $\int_6^6 f(t)dt$ δεν ορίζεται, γιατί $6\notin D_f$.

2. **α)** Να δείξετε ότι $\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu x dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^\nu x dx$, για κάθε $\nu\in N^*$.

β) Να δείξετε ότι $\int_0^{\pi/2}\eta\mu^2 x dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\frac{\pi}{4}$.

Λύση: **α)** $\int_0^{\pi/2}\eta\mu^\nu x dx=-\int_{\pi/2}^{0}\eta\mu^\nu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)dy=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^\nu y dy=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^\nu x dx.$

Θέτω x=$\frac{\pi}{2}$-y.
dx=-dy και
όταν x=0 $\Rightarrow$ y=$\frac{\pi}{2}$
όταν x=$\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ y=0

β) Από (α) ερώτημα για ν=2 έχουμε $\int_0^{\pi/2}\eta\mu^2 x dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

Επίσης $\int_0^{\pi/2}\eta\mu^2 x dx+\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\int_0^{\pi/2}(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)dx=\int_0^{\pi/2}1dx=[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow\int_0^{\pi/2}\eta\mu^2 x dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\frac{\pi}{4}$.

3. Να δείξετε ότι $\int_{-2}^{2}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2+1}dx=0$.

Λύση: Έστω $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2+1}$. Έχει πεδίο ορισμού το R και $f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{(-x)^2+1}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{x^2+1}$ $=-\frac{e^x-e^{-x}}{x^2+1}=f(x)$ για κάθε x∈R. Άρα η συνάρτηση είναι περιττή και επομένως $\int_{-2}^{2}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2+1}dx=0$.

4. Υπολογίστε το $\int_{-1}^{1}|x|dx$.

Λύση: Επειδή η συνάρτηση f(x)=|x|, x∈[-1,1] είναι άρτια, γιατί $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$ για κάθε x∈[-1,1], θα είναι $\int_{-1}^{1}|x|dx=2\int_{0}^{1}|x|dx=\int_{0}^{1}2xdx=\left[x^2\right]_0^1=1$.

5. Να δείξετε ότι $\int_{\pi}^{5\pi/4}\frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi$.

Λύση: Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ είναι περιοδική με περίοδο Τ=π, γιατί $f(x+\pi)=\frac{\eta\mu 2(x+\pi)}{\sigma\upsilon\nu^2(x+\pi)}=$

$=\frac{\eta\mu(2x+2\pi)}{(-\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=f(x)$, για κάθε x∈R, θα είναι $\int_{0}^{\pi/4}\frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi=\int_{0+\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi=\int_{\pi}^{5\pi/4}\frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi$.

6. Να δείξετε ότι $\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx\geq\int_{0}^{1}x^3dx$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι $\sqrt{x}\geq x^3$, για κάθε 0≤x≤1, ή ισοδύναμα $x\geq x^6 \Leftrightarrow x-x^6\geq 0 \Leftrightarrow x(1-x^5)\geq 0$ αληθής γιατί 0≤x≤1.

7. Να δείξετε ότι $\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{x^2+1}dx\right|\leq\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2+1}dx$.

Λύση: $\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{x^2+1}dx\right|\leq\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\eta\mu x}{x^2+1}\right|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\eta\mu x|}{|x^2+1|}dx\leq\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2+1}dx.$

8. Να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{3}}{8}\leq\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{x}dx\leq\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Λύση: Έστω $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

Τότε $f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$ ....(1)

Θεωρώ την συνάρτηση g(x)=xσυνx-ημx.

g΄(x)=συνx-xημx-συνx=-xημx<0 στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

Άρα g ↘ στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ και $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right)\leq g(x)\leq g\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}\leq x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\leq\frac{\sqrt{2}(\pi-4)}{8}$.

Επομένως xσυνx-ημx<0 στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

(1)⇒ f΄(x)<0 ⇒ f ↘ στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ και για $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{3}$ ισχύει $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\leq f(x)\leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\leq f(x)\leq\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Επομένως η f έχει ελάχιστη τιμή m=$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ και μέγιστη τιμή M=$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

Εφαρμόζοντας την σχέση $m(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$ βρίσκουμε $\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}$.

9. Να δείξετε ότι $\int_2^5\frac{1}{x^2+1}dx\le\int_2^5\frac{x}{10}dx$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{x^2+1}\le\frac{x}{10}$ ή $x^3+x-10\ge0$ στο διάστημα [2,5].

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-10$ είναι ↗ στο [2,5] γιατί $f'(x)=3x^2+1>0$.

Η f έχει προφανή ρίζα το 2 και για $x\ge2\Rightarrow f(x)\ge f(2)\Rightarrow f(x)\ge0\Rightarrow x^3+x-10\ge0$ στο διάστημα [2,5].

10. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=e^{x^2-x}$, $x\in[0,2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

Λύση: Έστω $f(x)=e^{x^2-x}$, $x\in[0,2]$.

$f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ γιατί $e^{x^2-x}>0$.

x	0 ½	2
f΄(x)	-	+
f(x)	↘	↗

Άρα $f([0,\frac{1}{2}])=[f(\frac{1}{2}),f(0)]=\left[\frac{1}{\sqrt[4]{e}},1\right]$ και $f([\frac{1}{2},2])=[f(\frac{1}{2}),f(2)]=\left[\frac{1}{\sqrt[4]{e}},e^2\right]$.

Επομένως $f([0,2])=\left[\frac{1}{\sqrt[4]{e}},1\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt[4]{e}},e^2\right]=\left[\frac{1}{\sqrt[4]{e}},e^2\right]$.

Άρα $m=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ και $M=e^2$.

Εφαρμόζοντας την σχέση $m(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$ βρίσκουμε $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

11.1. $\int_0^1 2^x e^x dx$ **11.2.** $\int_0^{\pi/3}(\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)dx$ **11.3.** $\int_1^e\frac{1-\ln x}{x^2}dx$

Λύση:

11.1. $\int_0^1 2^x e^x dx=\int_0^1(2e)^x dx=\left[\frac{(2e)^x}{\ln 2e}\right]_0^1=\ldots=\frac{2e-1}{\ln 2e}$.

11.2. $\int_0^{\pi/3}(\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi/3}(1\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi/3}\left((x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x+x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'\right)dx=\int_0^{\pi/3}\left(x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'dx=$

$=\left[x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{6}$.

11.3. $\int_1^e\frac{1-\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\frac{x\cdot\frac{1}{x}-1\cdot\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\frac{x\cdot(\ln x)'-(x)'\cdot\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}\right)'dx=\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^e=\frac{1}{e}$.

12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

12.1) $\int_0^2 3x^5dx$ 12.2) $\int_0^{\pi}(x^4+3\sigma\upsilon\nu x)dx$ 12.3) $\int_1^e\frac{x^3+1}{x}dx$

12.4) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x}dx$

12.5) $\int_0^1 (x^3+x)^2 dx$	12.11) $\int_1^e e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$	12.17) $\int_0^2 \frac{\chi^2-2\chi+1}{\chi-1}dx$
12.6) $\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}dx$	12.12) $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}-\eta\mu\frac{\chi}{2}\right)^2 d\chi$	12.18) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x}dx$
12.7) $\int_0^1 \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$	12.13) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}dx$	12.19) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu^2 x}$
12.8) $\int_2^3 \sqrt{x^2-4x+4}dx$	12.14) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\varepsilon\phi^2 xdx$	12.20) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sigma\upsilon\nu 2xdx}{\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^2 x}$
12.9) $\int_0^{\pi}(e^x+2\eta\mu x)dx$	12.15) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{3-5\sigma\phi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$	12.21) $\int_0^{\pi/4}\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x}dx$
12.10) $\int_1^2 \frac{x-3}{x^4}dx$	12.16) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}dx$	

Λύση:

12.1. $\int_0^2 3x^5 dx = \left[\frac{x^6}{2}\right]_0^2 = 32.$

12.2. $\int_0^{\pi}(x^4+3\sigma\upsilon\nu x)dx = \left[\frac{x^5}{5}-3\eta\mu x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{5}.$

12.3. $\int_1^e \frac{x^3+1}{x}dx = \int_1^e\left(\frac{x^3}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int_1^e\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\ln x\right]_1^e =$

$= \frac{e^3}{3}+1-\frac{1}{3} = \frac{e^3+2}{3}.$

12.4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)dx$

$= [\varepsilon\phi x-\sigma\phi x]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$= \varepsilon\phi^{\pi}/_3 - \sigma\phi^{\pi}/_3 \cancel{-\varepsilon\phi^{\pi}/_4} \cancel{+\sigma\phi^{\pi}/_4}$

$= \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

12.5. $\int_0^1 (x^3+x)^2 dx = \int_0^1 (x^6+2x^4+x^2)dx$

$= \left[\frac{x^7}{7}+\frac{2x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{7}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3} = \frac{92}{105}.$

12.6. $\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}dx = \int_1^e\left(\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int_1^e\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln x\right]_1^e$

$= \frac{e^2}{2}+e+\ln e - \left(\frac{1^2}{2}+1+\ln 1\right)$

$= \frac{e^2}{2}+e+1 - \left(\frac{1}{2}+1\right)$

$= \frac{e^2}{2}+e+1 - \left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{e^2+2e-1}{2}.$

12.7. $\int_0^1 \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_0^1 \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

$= \int_0^1 \frac{x\cdot x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$= \int_0^1\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = \int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)dx$

$= \int_0^1\left(x^{\frac{7}{6}}-x^{\frac{1}{6}}\right)dx = \left[\frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1}-\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}\right]_0^1$

$= \left[\frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13}-\frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7}\right]_0^1 = \frac{6}{13}-\frac{6}{7} = -\frac{36}{91}.$

12.8. $\int_2^3 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx = \int_2^3 \sqrt{(x-2)^2}\,dx$

$= \int_2^3 |x-2|\,dx = \int_2^3 (x-2)\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 = \frac{9}{2}-6+2=\frac{1}{2}$

γιατί $x\in[2,3] \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow x-2\geq 0 \Rightarrow |x-2|=x-2$.

12.9. $\int_0^{\pi} (e^x+2\eta\mu x)dx = [e^x-2\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}$

$=e^{\pi}-2\overset{-1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\pi}}-\overset{1}{\cancel{e^0}}+2\overset{1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu 0}}= e^{\pi}+3$.

12.10. $\int_1^2 \frac{x-3}{x^4}dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{x^4}-\frac{3}{x^4}\right)dx$

$= \int_1^2 \left(x^{-3}-3x^{-4}\right)dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}-3\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^2$

$= \left[-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^3}\right]_1^2 =\ldots=-\frac{1}{2}$.

12.11. $\int_1^e e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx = \int_1^e \left(2e^x-\frac{1}{x}\right)dx=$

$= \left[2e^x-\ln x\right]_1^e$ $=2e^e-1-2e$.

12.12. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}-\eta\mu\frac{\chi}{2}\right)^2 d\chi$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2}-2\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}+\eta\mu^2\frac{\chi}{2}\right)d\chi$

$= \int_{-\pi}^{\pi} (1-\eta\mu\chi)d\chi = [\chi+\sigma\upsilon\nu\chi]_{-\pi}^{\pi} =\ldots=2\pi$.

12.13. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{2}dx$

$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx$ A

$= \frac{1}{2}[x+\eta\mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =\ldots= \frac{\pi-2}{2}$.

12.14. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \varepsilon\varphi^2 x dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1\right)dx$

$= [\varepsilon\varphi x - x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =\ldots= \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$.

12.15. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{3-5\sigma\varphi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{5\sigma\varphi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx$

$= 3\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx - 5\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sigma\varphi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

$= 3\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx - 5\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

$= 3\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx - 5\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx$

$= [3\varepsilon\varphi x + 5\sigma\varphi x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} =\ldots= 8-6\sqrt{3}$.

12.16. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega)(\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega)dx$

$= [\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega]_{-\pi}^{\pi} =\ldots=0$.

12.17. $\int_0^2 \frac{\chi^2-2\chi+1}{\chi-1}dx = \int_0^2 \frac{(\chi-1)^2}{\chi-1}dx$

$= \int_0^2 (\chi-1)dx = \left[\frac{\chi^2}{2}-\chi\right]_0^2 =\ldots=0$.

12.18. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x}$ είναι άρτια στο $[-\pi/2,\pi/2]$ γιατί $f(-x)=\frac{\eta\mu(-2x)}{\eta\mu(-x)}=\frac{-\eta\mu 2x}{-\eta\mu x}=\frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x}=$ $=f(x)$. Επομένως:

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x}dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x}dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx=$

$= 4\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx = 4[\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} =\ldots=4$.

12.19. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu^2 x} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1-2\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 x}=$

$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1-\eta\mu^2 x} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = [\varepsilon\varphi x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$

=…=2.

12.20. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^2 x} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^2 x} dx$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^2 x} - \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^2 x} \right) dx$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx = \left[-\sigma\phi x - \varepsilon\phi x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left[\sigma\phi x + \varepsilon\phi x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$ =…=0.

12.21. I= $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} dx =$

$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} dx =$

$= \frac{1}{2} \left[\varepsilon\phi x + x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$ =…= $\frac{\pi+4}{8}$.

13. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

13.1) $\int_0^{\pi} \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$

13.2) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu 3t dt$

13.3) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\eta\mu\chi}\,\sigma\upsilon\nu\chi d\chi$

13.4) $\int_4^{e+3} \frac{dx}{x-3}$

13.5) $\int_{-1}^{0} e^{2x+1}dx$

13.6) $\int_{5/2}^{7/2} \frac{dx}{(x-3)^2}$

13.7) $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx$

13.8) $\int_{9\pi/4}^{7\pi/3} \varepsilon\phi x dx$

13.9) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

13.10) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

13.11) $\int_{7\pi/4}^{0} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx$

13.12) $\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+1}dx$

13.13) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$

13.14) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx$

13.15) $\int_{5\pi/2}^{11\pi/4} \sigma\phi x dx$

13.16) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx$

13.17) $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$

13.18) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

13.19) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

13.20) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^7\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^3\omega d\omega$

13.21) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\varepsilon\phi^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

13.22) $\int_{-1}^{1} (x^3+2x^2+5)(3x^2+4x)dx$

13.23) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sqrt[3]{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$

13.24) $\int_1^e \frac{x^3+\ln x}{x}dx$

13.25) $\int_4^9 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

13.26) $\int_0^1 \frac{3xdx}{x^2+1}$

13.27) $\int_{-1}^{1} x^3(2-3x^4)^3dx$

13.28) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{4+x\ln x}dx$

13.29) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x-1}dx$

13.30) $\int_{1/2}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

13.31) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2-1}xdx$

13.32) $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}d\alpha$

13.33) $\int_{-8}^{-3} \frac{3d\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon}}$

13.34) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

13.35) $\int_0^{\pi/2} \alpha^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x dx$

13.36) $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

13.37) $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}dx$

13.38) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \eta\mu^3 6x\sigma\upsilon\nu 6x dx$

13.39) $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2x+3}{2x+1}dx$

13.40) $\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

13.41) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

13.42) $\int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx$

13.43) $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

13.44) $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx$

13.45) $\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}}\frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)dx}{x}$

13.46) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{2\sigma\upsilon\nu x+3\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}dx$

13.47) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3 xdx$

13.48) $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^4 xdx$

13.49) $\int_0^{\sqrt{e-1}}\frac{2xdx}{x^2+1}$

13.50) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{4-x^2}$

13.51) $\int_0^{\sqrt[3]{\ln 3}}x^2e^{x^3}dx$

13.52) $\int_{\sqrt[3]{7}}^{2}(x^3-7)^8 3x^2dx$

13.53) $\int_1^{e}\frac{\ln^3 x}{x}dx$

13.54) $\int_{-3}^{e-4}\frac{x}{x+4}dx$

13.55) $\int_0^{\pi/4}(\varepsilon\varphi^2 x+\varepsilon\varphi^4 x)dx$

13.56) $\int_0^{1}\frac{xdx}{x^2+4}$

Λύση:

13.1. Θέτω $2x+\frac{\pi}{2}$=w. Τότε $\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)'dx=(w)'dw \Rightarrow$ 2dx=dw $\Rightarrow dx=\frac{dw}{2}$ και:

- όταν x=0 τότε w=$\pi/2$.
- όταν x=π τότε w=$5\pi/2$.

Άρα $\int_0^{\pi}\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\eta\mu w dw=-\frac12[\sigma\upsilon\nu w]_{\pi/2}^{5\pi/2}=\frac12[\sigma\upsilon\nu w]_{5\pi/2}^{\pi/2}$=...=0.

2ος τρόπος: $\int_0^{\pi}\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac12\int_0^{\pi}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)'\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx=-\frac12\int_0^{\pi}\left(\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'dx$

$=\frac12\left[\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac12\left(\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)=\frac12\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)$=0.

13.2. Θέτω 3t=u. Τότε $(3t)'dt=(u)'du \Rightarrow$ 3dt=du $\Rightarrow dt=\frac{du}{3}$ και:

- όταν t=-π τότε u=-3π
- όταν t= $\pi/2$ τότε u=3 $\pi/2$.

Άρα $\int_{-\pi}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu 3tdt=\frac13\int_{-3\pi}^{3\pi/2}\sigma\upsilon\nu udu=\frac13[\eta\mu u]_{-3\pi}^{3\pi/2}$=...=$-\frac13$.

2ος τρόπος: $\int_{-\pi}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu 3tdt=\frac13\int_{-\pi}^{\pi/2}(3t)'\sigma\upsilon\nu 3tdt=\frac13\int_{-\pi}^{\pi/2}(\eta\mu 3t)'dt=\frac13[\eta\mu 3t]_{-\pi}^{\pi/2}=\frac13\left(\eta\mu\frac{3\pi}{2}-\eta\mu(-\pi)\right)$=

$=\frac13\left(\cancelto{-1}{\eta\mu\frac{3\pi}{2}}+\cancelto{0}{\eta\mu\pi}\right)=-\frac13$.

13.3. Θέτω ημx=w. Τότε (ημx)΄dx=(w)΄dw ⇒ συνxdx=dw και:

- όταν x=0 τότε w=ημ0^0=0
- όταν x= $\pi/2$ τότε w=ημ $\pi/2$ =1.

Άρα $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\eta\mu\chi}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=\int_0^1\sqrt{w}dw=\int_0^1 w^{1/2}dw=\left[\frac{w^{\frac12+1}}{\frac12+1}\right]_0^1=\left[\frac{2w^{\frac32}}{3}\right]_0^1$=...=$\frac23$.

2ος τρόπος: $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\eta\mu\chi}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=\int_0^{\pi/2}(\eta\mu x)^{\frac12}(\eta\mu x)'dx=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{(\eta\mu x)^{\frac12+1}}{\frac12+1}\right)'dx=\left[\frac{2(\eta\mu x)^{\frac32}}{3}\right]_0^{\pi/2}$=

$\frac{2(\cancelto{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2}})^{\frac32}}{3}-\frac{2(\cancelto{0}{\eta\mu 0})^{\frac32}}{3}=\frac23$.

13.4. Θέτω x-3=y. Τότε (x-3)΄dx=(y)΄dy ⇒ dx=dy και:

- όταν x=4 τότε y=1
- όταν x=e+3 τότε y=e.

Άρα $\int_4^{e+3} \frac{dx}{x-3} = \int_1^e \frac{dy}{y} = [\ln y]_1^e$ =lne-ln1=1-0=1.

2ος τρόπος: $\int_4^{e+3} \frac{dx}{x-3} = \int_4^{e+3} \frac{1}{x-3}(x-3)'dx = \int_4^{e+3} (\ln(x-3))'\,dx = [\ln(x-3)]_4^{e+3}$ =lne-ln1=1-0=1.

13.5. Θέτω 2x+1=y. Τότε (2x+1)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ 2dx=dy $\Rightarrow dx=\frac{dy}{2}$ και:

- όταν x=-1 τότε y=-1
- όταν x=0 τότε y=1.

Άρα $\int_{-1}^{0} e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^y dy = \frac{1}{2}\left[e^y\right]_{-1}^{1} = \frac{e^2-1}{2e}$.

2ος τρόπος: $\int_{-1}^{0} e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(2x+1)'e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(e^{2x+1}\right)'dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x+1}\right]_{-1}^{0} = \frac{e^2-1}{2}$.

13.6. Θέτω x-3=y. Τότε (x-3)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ dx=dy και:

- όταν $x={}^5/_2$ τότε $y=-{}^1/_2$
- όταν $x={}^7/_2$ τότε $y={}^1/_2$.

Άρα $\int_{5/2}^{7/2} \frac{dx}{(x-3)^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y}\right]_{-1/2}^{1/2} = \left[\frac{1}{y}\right]_{1/2}^{-1/2}$ =...=-4.

2ος τρόπος: $\int_{5/2}^{7/2} \frac{dx}{(x-3)^2} = -\int_{5/2}^{7/2} \frac{-(x-3)'}{(x-3)^2}dx = \int_{5/2}^{7/2}\left(\frac{1}{x-3}\right)'dx = \left[\frac{1}{x-3}\right]_{5/2}^{7/2}$ =...=-4.

13.7. Η συνάρτηση f(x)= $x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)$ είναι **περιττή** στο [$-\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$], γιατί f(-x)= $-x\sigma\upsilon\nu\left((-x)^2+\frac{\pi}{2}\right)$ =

=$-x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)$=-f(x). Άρα $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx$=0.

2ος τρόπος: $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)'\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\left(\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)\right)'dx$

$=\frac{1}{2}\left[\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)\right]_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\left(\eta\mu\left(\sqrt{\pi}^2+\frac{\pi}{2}\right)-\eta\mu\left((-\sqrt{\pi})^2+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$=0.

13.8. $I=\int_{9\pi/4}^{7\pi/3}\varepsilon\varphi x dx = \int_{9\pi/4}^{7\pi/3}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_{9\pi/4}^{7\pi/3}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\eta\mu x dx$.

Θέτω συνx=w. Τότε (συνx)΄dx=(w)΄dw $\Rightarrow$ -ημxdx=dw $\Rightarrow$ ημxdx=-dw και:

- όταν x= ${}^{7\pi}/_3$ τότε w=συν ${}^{7\pi}/_3$=συν(2π+ ${}^{\pi}/_3$)=συν ${}^{\pi}/_3$=${}^1/_2$
- όταν x= ${}^{9\pi}/_4$ τότε w=συν ${}^{9\pi}/_4$=συν(2π+ ${}^{\pi}/_4$)=συν ${}^{\pi}/_4$= ${}^{\sqrt{2}}/_2$.

Άρα $I=-\int_{\sqrt{2}/2}^{1/2}\frac{1}{w}dw = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{w}dw = [\ln w]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{2}$.

2ος τρόπος: $\int_{9\pi/4}^{7\pi/3}\varepsilon\varphi x dx = \int_{9\pi/4}^{7\pi/3}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\int_{9\pi/4}^{7\pi/3}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\int_{9\pi/4}^{7\pi/3}(\ln(\sigma\upsilon\nu x))'dx = -[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_{9\pi/4}^{7\pi/3}$=

$=[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_{7\pi/3}^{9\pi/4}$=...=$\ln\sqrt{2}$.

13.9. Θέτω x^2+x+1=y. Τότε (x^2+x+1)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ (2x+1)dx=dy και:

- όταν x=0 τότε y=1

• όταν x=1 τότε y=3.

Άρα $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}(2x+1)dx=\int_1^3 \frac{1}{y}dy=[ln\,y]_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3$.

2ος τρόπος: $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 \left(\ln(x^2+x+1)\right)'dx=\left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1=\ln 3-\ln 1=\ln 3$.

13.10. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ είναι **περιττή** στο [-1,1], γιατί $f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$

. Άρα $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$=0.

2ος τρόπος: $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_{-1}^1 \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)'dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_{-1}^1=\sqrt{2}-\sqrt{2}$=0.

13.11. Θέτω συνx=w. Τότε (συνx)΄dx=(w)΄dw ⇒ -ημxdx=dw ⇒ ημxdx=-dw και:

• όταν x= $^{7\pi}/_4$ τότε w=συν $^{7\pi}/_4$=συν(2π-$^{\pi}/_4$)=συν(-$^{\pi}/_4$)= συν$^{\pi}/_4$= $\sqrt{2}/_2$.

• όταν x=0 τότε w=συν0^0=1.

Άρα $\int_{7\pi/4}^0 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx=\int_{7\pi/4}^0 \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\eta\mu x dx=-\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{w^3}dw=\int_1^{\sqrt{2}/2} w^{-3}dw=\left[\frac{w^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=\left[-\frac{1}{2w^2}\right]_1^{\sqrt{2}/2}$

$=\left[\frac{1}{2w^2}\right]_{\sqrt{2}/2}^1$ =...=$-\frac{1}{2}$.

2ος τρόπος: $\int_{7\pi/4}^0 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx=-\int_{7\pi/4}^0 \sigma\upsilon\nu^{-3}x(\sigma\upsilon\nu x)'dx=\int_0^{7\pi/4}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^{-3+1}x}{-3+1}\right)'dx=-\int_0^{7\pi/4}\left(\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)'dx=$

$=\int_{7\pi/4}^0 \left(\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)'dx=\left[\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}\right]_{7\pi/4}^0$ =...=$-\frac{1}{2}$.

13.12. Η συνάρτηση f(x)= $x\sqrt{x^2+1}$ είναι περιττή στο [-1,1], γιατί f(-x)= $-x\sqrt{(-x)^2+1}=-x\sqrt{x^2+1}$=-f(x).

Άρα $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+1}dx$=0.

2ος τρόπος: $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x^2+1)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left(\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{-1}^1=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{-1}^1=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot(2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2\cdot(2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$=0.

13.13. Θέτω lnx=w. Τότε (lnx)΄dx=(w)΄dw ⇒ $\frac{1}{x}$dx=dw και: { •όταν x=e τότε w=lne=1 • όταν x=e^2 τότε w=lne^2=2.

Άρα $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln x dx=\int_1^2 wdw=\left[\frac{w^2}{2}\right]_1^2$=...=$\frac{3}{2}$.

2ος τρόπος: $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln x dx=\int_e^{e^2}(\ln x)'\ln x dx=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_e^{e^2}=\frac{\ln^2 e^2}{2}-\frac{\ln^2 e}{2}=\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

13.14. Θέτω $e^{3x}+1=y$. Τότε $(e^{3x}+1)'dx=(y)'dy \Rightarrow 3e^{3x}\,dx=dy \Rightarrow e^{3x}dx=\frac{dy}{3}$ και:

- όταν x=0 τότε $y=e^0+1=2$
- όταν x=1 τότε $y=e^3+1$.

Άρα $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{e^{3x}+1}e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int_2^{e^3+1}\frac{1}{y}dy=\frac{1}{3}\left[\ln y\right]_2^{e^3+1}=\frac{1}{3}\ln\frac{e^3+1}{2}=\ln\sqrt[3]{\frac{e^3+1}{2}}$.

2ος τρόπος: $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(e^{3x}+1\right)'}{e^{3x}+1}dx=\frac{1}{3}\left[\ln(e^{3x}+1)\right]_0^1=\frac{1}{3}\ln\frac{e^3+1}{2}=\ln\sqrt[3]{\frac{e^3+1}{2}}$.

13.15. I$=\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}\sigma\phi x dx=\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx=\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x dx$.

Θέτω ημx=w. Τότε $(\eta\mu x)'dx=(w)'dw \Rightarrow$ συνxdx=dw και:

- όταν x= $^{5\pi}/_2$ τότε w=ημ $^{5\pi}/_2$=ημ(2π+ $^{\pi}/_2$)=ημ $^{\pi}/_2$=1.
- όταν x= $^{11\pi}/_4$ τότε w=ημ $^{11\pi}/_4$=ημ(3π- $^{\pi}/_4$)=ημ(π- $^{\pi}/_4$)=ημ$^{\pi}/_4$= $^{\sqrt{2}}/_2$.

Άρα I$=\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x dx=\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{w}dw=\left[\ln w\right]_1^{\sqrt{2}/2}=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2ος τρόπος: $\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}\sigma\phi x dx=\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx=\int_{5\pi/2}^{11\pi/4}\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}dx=\left[\ln(\eta\mu x)\right]_{5\pi/2}^{11\pi/4}=\ldots=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.16. Θέτω $x^2+\frac{\pi}{2}$=y. Τότε $\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)'$ dx=(y)΄dy ⇒ 2xdx=dy $\Rightarrow xdx=\frac{dy}{2}$ και:

- όταν x=0 τότε y=$^{\pi}/_2$.
- όταν x=$\sqrt{\pi}$ τότε y= $^{3\pi}/_2$.

Άρα $\int_0^{\sqrt{\pi}}x\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\eta\mu y dy=\frac{1}{2}\left[-\sigma\upsilon\nu y\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}=\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu y\right]_{3\pi/2}^{\pi/2}$=0.

2ος τρόπος: $\int_0^{\sqrt{\pi}}x\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)'\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[-\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}}$

$=\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)\right]_{\sqrt{\pi}}^0=\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)}-\cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right)$=0.

13.17. Θέτω x^2-5x+6=y. Τότε $(x^2-5x+6)'dx=(y)'dy \Rightarrow$ (2x-5)dx=dy και:

- όταν x=0 τότε y=6.
- όταν x=1 τότε y=2.

Άρα $\int_0^1\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx=\int_6^2\frac{dy}{y}dx=\left[\ln y\right]_6^2=\ln\frac{1}{3}$=-ln3.

2ος τρόπος: $\int_0^1\frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2-5x+6\right)'}{x^2-5x+6}dx=\left[\ln(x^2-5x+6)\right]_0^1=\ln\frac{1}{3}$=-ln3.

13.18. I$=\int_{\pi/8}^{\pi/4}\sigma\upsilon\nu^2xdx=\int_{\pi/8}^{\pi/4}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4}dx+\frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4}\sigma\upsilon\nu 2xdx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4}\sigma\upsilon\nu 2xdx=$

$=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4}\sigma\upsilon\nu 2xdx$.

$\text{I}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_{\pi/8}^{\pi/4}$

$=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)=\ldots$

$=\underline{\pi+2(2-\sqrt{2})}$

Θέτω 2x=y. Τότε (2x)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ 2dx=dy $\Rightarrow dx=\frac{dy}{2}$ και:
- όταν x=$^{\pi}/_{8}$ τότε y=$^{\pi}/_{4}$.
- όταν x=$^{\pi}/_{4}$ τότε y=$^{\pi}/_{2}$.

ή

Άρα $I=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu y dy=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}[\eta\mu y]_{\pi/4}^{\pi/2}=\ldots=\frac{\pi+2(2-\sqrt{2})}{16}$.

13.19. I= $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\eta\mu^2 x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$.

Θέτω ημx=y. Τότε (ημx)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ συνxdx=dy και:
- όταν x=-$^{\pi}/_{2}$ τότε y=ημ(-$^{\pi}/_{2}$)=-ημ$^{\pi}/_{2}$=-1.
- όταν x=$^{\pi}/_{2}$ τότε y=ημ$^{\pi}/_{2}$=1.

Άρα $I=\int_{-1}^{1}(1-y^2)dy=\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\ldots=\frac{4}{3}$.

2ος τρόπος: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\eta\mu^2 x)\cdot(\eta\mu x)' dx\left[\eta\mu x-\frac{\eta\mu^3 x}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\ldots=\frac{4}{3}$.

3ος τρόπος: Η συνάρτηση f(x)=συν^{3}x είναι **άρτια** στο [-$^{\pi}/_{2}$,$^{\pi}/_{2}$], γιατί f(-x)=συν^3(-x)=συν^{3}x=f(x).

Άρα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=2\int_{0}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=\ldots=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

13.20. I= $\int_{0}^{\pi/2}\eta\mu^7\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^3\omega d\omega=\int_{0}^{\pi/2}\eta\mu^7\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega d\omega=\int_{0}^{\pi/2}\eta\mu^7\omega\cdot(1-\eta\mu^2\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$.

Θέτω ημω=y. Τότε (ημω)΄dω=(y)΄dy $\Rightarrow$ συνωdω=dy και:
- όταν ω=0 τότε y=0.
- όταν ω=$^{\pi}/_{2}$ τότε y=ημ $^{\pi}/_{2}$=1.

Άρα I=$\int_{0}^{1}y^7(1-y^2)dy=\int_{0}^{1}\left(y^7-y^9\right)dy=\left[\frac{y^8}{8}-\frac{y^{10}}{10}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$.

2ος τρόπος: I= $\int_{0}^{\pi/2}\eta\mu^7\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^3\omega d\omega=\int_{0}^{\pi/2}\eta\mu^7\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega d\omega=\int_{0}^{\pi/2}\eta\mu^7\omega\cdot(1-\eta\mu^2\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega d\omega=$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\left(\eta\mu^7\omega-\eta\mu^9\omega\right)\cdot(\eta\mu\omega)' d\omega=\left[\frac{\eta\mu^8\omega}{8}-\frac{\eta\mu^{10}\omega}{10}\right]_{0}^{\pi/2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40}.$$

13.21. Θέτω εφx=y. Τότε (εφx)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$dx=dy και:
- όταν x=$^{\pi}/_{4}$ τότε y=εφ $^{\pi}/_{4}$=1.
- όταν x=$^{\pi}/_{3}$ τότε y=εφ $^{\pi}/_{3}$=$\sqrt{3}$.

Άρα $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\varepsilon\phi^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\varepsilon\phi^3 x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_{1}^{\sqrt{3}}y^3 dy=\left[\frac{y^4}{4}\right]_{1}^{\sqrt{3}}$ =...=2.

13.22. Θέτω x^3+2x^2+5=y. Τότε (x^3+2x^2+5)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ (3x^2+4x)dx=dy και: $\begin{cases}\text{όταν } x=-1 \text{ τότε } y=6.\\ \text{όταν } x=1 \text{ τότε } y=8.\end{cases}$

Άρα $\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+5)(3x^2+4x)dx=\int_{6}^{8}y dy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_{6}^{8}$ =...=14.

2ος τρόπος: $\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+5)(3x^2+4x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+5)(x^3+2x^2+5)' dx=\left[\frac{\left(x^3+2x^2+5\right)^2}{2}\right]_{-1}^{1}$ =...=14.

13.23. Θέτω ημx=y. Τότε (ημx)΄dω=(y)΄dy $\Rightarrow$ συνxdx=dy και:

- όταν x=π/2 τότε y=ημ π/2=1.
- όταν x=3π/4 τότε y=ημ 3π/4=ημ(π-π/4)=ημ π/4=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα $\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\sqrt[3]{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{\pi/2}^{3\pi/4}(\eta\mu x)^{\frac{1}{3}}\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{1}^{\sqrt{2}/2}y^{\frac{1}{3}}dy=\left[\frac{y^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=\left[\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_1^{\sqrt{2}/2}$

$=\left[\frac{3\cdot\sqrt[3]{y}^{\,4}}{4}\right]_1^{\sqrt{2}/2}=\frac{3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1\right)}{4}$.

2ος τρόπος: $\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\sqrt[3]{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{\pi/2}^{3\pi/4}(\eta\mu x)^{\frac{1}{3}}\cdot(\eta\mu x)'dx=\left[\frac{(\eta\mu x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_{\pi/2}^{3\pi/4}=\left[\frac{3(\eta\mu x)^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_{\pi/2}^{3\pi/4}=\ldots=\frac{3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1\right)}{4}$.

13.24. I=$\int_1^e\frac{x^3+\ln x}{x}dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^e\left(x^2+\ln x\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e x^2dx+\int_1^e\ln x\frac{1}{x}dx$.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα $\int_1^e x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e=\frac{e^3-1}{3}$.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θέτω lnx=y. Τότε (lnx)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ $\frac{1}{x}$dx=dy και:

- όταν x=1 τότε y=ln1=0.
- όταν x=e τότε y=lne=1.

Άρα $\int_1^e\ln x\frac{1}{x}dx=\int_0^1 ydy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$.

Επομένως I=$\frac{e^3-1}{3}+\frac{1}{2}$.

2ος τρόπος: $\int_1^e\frac{x^3+\ln x}{x}dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^e\left(x^2+\ln x\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e x^2dx+\int_1^e\ln x\frac{1}{x}dx=$

$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e+\int_1^e\ln x(\ln x)'dx=\frac{e^3-1}{3}+\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e=\frac{e^3-1}{3}+\frac{1}{2}$.

13.25. $\int_4^9\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int_4^9\frac{1}{2\sqrt{x}}3^{\sqrt{x}}dx=2\int_4^9\left(\sqrt{x}\right)'3^{\sqrt{x}}dx=2\int_4^9\left(\frac{3^{\sqrt{x}}}{\ln 3}\right)'dx=\frac{2}{\ln 3}\left[3^{\sqrt{x}}\right]_4^9=\frac{2(3^3-3^2)}{\ln 3}=\frac{36}{\ln 3}$.

2ος τρόπος: Θέτω $\sqrt{x}$=y. Τότε ($\sqrt{x}$)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$dx=dy $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$dx=2dy και:

- όταν x=4 τότε y=$\sqrt{4}$=2.
- όταν x=9 τότε y=$\sqrt{9}$=3.

Άρα $\int_4^9\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_4^9 3^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int_2^3 3^y dy=2\left[\frac{3^y}{\ln 3}\right]_2^3=\frac{2(3^3-3^2)}{\ln 3}=\frac{36}{\ln 3}$.

13.26. Θέτω x^2+1=y. Τότε (x^2+1)΄dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ 2xdx=dy $\Rightarrow$ xdx=$\frac{1}{2}$dy και:

- όταν x=0 τότε y=1.
- όταν x=1 τότε y=2.

Άρα $\int_0^1\frac{3xdx}{x^2+1}=3\int_0^1\frac{1}{x^2+1}xdx=\frac{3}{2}\int_1^2\frac{1}{y}dy=\frac{3}{2}\left[\ln y\right]_1^2=\frac{3}{2}\ln 2$.

2ος τρόπος: $\int_0^1 \frac{3xdx}{x^2+1} = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'dx = \frac{3}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{3}{2}\ln 2$.

13.27. Η συνάρτηση $f(x)=x^3(2-3x^4)^3$ είναι **περιττή** στο [-1,1], γιατί $f(-x)=(-x)^3(2-3(-x)^4)^3=-x^3(2-3x^4)^3=-f(x)$.

Άρα $\int_{-1}^{1} x^3(2-3x^4)^3 dx=0$.

2ος τρόπος: Θέτω $2-3x^4=y$. Τότε $(2-3x^4)'dx=(y)'dy \Rightarrow -12x^3dx=dy \Rightarrow x^3dx=-\frac{1}{12}dy$ και:
- όταν x=-1 τότε y=-1.
- όταν x=1 τότε y=-1.

Άρα $\int_{-1}^{1} x^3(2-3x^4)^3 dx = -\frac{1}{12}\int_{-1}^{-1} y^3 dy=0$.

3ος τρόπος: $\int_{-1}^{1} x^3(2-3x^4)^3 dx = -\frac{1}{12}\int_{-1}^{1} (2-3x^4)^3(2-3x^4)'dx = -\frac{1}{12}\left[\frac{\left(2-3x^4\right)^4}{4}\right]_{-1}^{1}=0$.

13.28. Θέτω $4+x\ln x=y$. Τότε $(4+x\ln x)'dx=(y)'dy \Rightarrow (1+\ln x)dx=dy$ και:
- όταν x=1 τότε y=4.
- όταν x=e τότε y=4+e.

Άρα $\int_1^e \frac{1+\ln x}{4+x\ln x}dx = \int_4^{4+e}\frac{dy}{y} = [\ln y]_4^{4+e} = \ln\frac{4+e}{4}$.

2ος τρόπος: $\int_1^e \frac{1+\ln x}{4+x\ln x}dx = \int_1^e \frac{\left(4+x\ln x\right)'}{4+x\ln x}dx = [\ln|4+x\ln x|]_1^e = \ln\frac{4+e}{4}$.

13.29. Θέτω $e^x-1=y$. Τότε $(e^x-1)'dx=(y)'dy \Rightarrow e^x dx=dy$ και:
- όταν x=ln3 τότε $y=e^{\ln 3}-1=3-1=2$.
- όταν x=ln2 τότε $y=e^{\ln 2}-1=2-1=1$.

Άρα $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x-1}dx \int_1^2 \frac{1}{y}dy = [\ln y]_1^2 = \ln 2$.

2ος τρόπος: $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x-1}dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}dx = \left[\ln(e^x-1)\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln 2$.

13.30. Θέτω $\frac{1}{x}=y$. Τότε $\left(\frac{1}{x}\right)'dx=(y)'dy \Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx=dy \Rightarrow \frac{1}{x^2}dx=-dy$ και:
- όταν x= ½ τότε y=2.
- όταν x=1 τότε y=1.

Άρα $\int_{1/2}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-\int_2^1 e^y dy=\int_1^2 e^y dy=\left[e^y\right]_1^2=e^2-e$.

2ος τρόπος: $\int_{1/2}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-\int_{1/2}^{1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}dx=-\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{1/2}^{1}=\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{1}^{1/2}=e^2-e$.

13.31. Η συνάρτηση $f(x)=xe^{-x^2-1}$ είναι **περιττή** στο [-1,1], γιατί $f(-x)=-xe^{-(-x)^2-1}=-xe^{-x^2-1}=-f(x)$.

Άρα $\int_{-1}^{1} e^{-x^2-1}xdx=0$.

2ος τρόπος: Θέτω $-x^2-1=y$. Τότε $(-x^2-1)'dx=(y)'dy \Rightarrow -2xdx=dy \Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dy$ και:
- όταν x=1 τότε y=-2.
- όταν x=-1 τότε y=-2.

Άρα $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2-1}x\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{-2} e^{y}\,dy$=0.

3ος τρόπος: $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2-1}x\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2-1}(-x^2-1)'dy = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2-1}\right]_{-1}^{1}$=0.

13.32. Θέτω $\sqrt{a}$=y. Τότε $(\sqrt{a})'$dα=(y)΄dy $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\sqrt{a}}$dα=dy $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{a}}$dα=2dy και:

- όταν α=$\pi^2/4$ τότε y = $\pi/2$.
- όταν α=π^2 τότε y=π.

Άρα $\int\limits_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}d\alpha = \int\limits_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}d\alpha = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma\upsilon\nu y\,dy = 2[\eta\mu y]_{\pi/2}^{\pi}$ =2($\overset{0}{\eta\mu\pi}$-$\overset{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2}}$)=-2.

2ος τρόπος: $\int\limits_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}d\alpha = 2\int\limits_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}\,\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}d\alpha = 2\int\limits_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}\cdot\left(\sqrt{\alpha}\right)'d\alpha = 2\left[\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}\right]_{\pi^2/4}^{\pi^2}$ =

=2($\overset{-1}{\sigma\upsilon\nu\pi}$-$\overset{0}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}$)=-2.

13.33. Θέτω 1–υ =y. Τότε (1-υ)΄ dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ -du=dy $\Rightarrow$ du=- dy και:

- όταν υ=-8 τότε y=9.
- όταν υ=-3 τότε y=4.

Άρα $\int\limits_{-8}^{-3} \frac{3d\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon}} = -3\int\limits_{9}^{4} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 6\left[\sqrt{y}\right]_{4}^{9}$=6.

2ος τρόπος: $\int\limits_{-8}^{-3} \frac{3d\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon}} = -3\int\limits_{-8}^{-3} \frac{(1-\upsilon)'d\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon}} = -6\left[\sqrt{1-\upsilon}\right]_{-8}^{-3}$=6.

13.34. Θέτω lnx =y. Τότε (lnx)΄ dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ $\frac{1}{x}$dx=dy και:

- όταν x=e τότε y=lne=1.
- όταν x=e^2 τότε y=$\ln e^2$=2.

Άρα $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{y^2}dy = \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{y^2}dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2}$.

2ος τρόπος: $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}\cdot(\ln x)'dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{e}^{e^2} = \frac{1}{2}$.

13.35. Θέτω ημx=y. Τότε (ημx)΄ dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ συνxdx=dy και:

- όταν x=0 τότε y=ημ0^0=0.
- όταν x=π τότε y=ημ$\pi/2$=1.

Άρα $\int\limits_{0}^{\pi/2} \alpha^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\,dx \int\limits_{0}^{1} \alpha^{y}dy = \left[\frac{a^y}{\ln a}\right]_{0}^{1} = \frac{a-1}{\ln a}$.

2ος τρόπος: $\int\limits_{0}^{\pi/2} \alpha^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \alpha^{\eta\mu x}(\eta\mu x)'dx = \left[\frac{a^{\eta\mu x}}{\ln a}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{a-1}{\ln a}$.

13.36. Θέτω 1+lnx=y. Τότε (1+lnx)΄ dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ $\frac{1}{x}$dx=dy και:

- όταν x=1/e τότε y=1+ln$^1/_e$=1-lne=1-1=0.

- όταν x=e^7 τότε y=1+lne^7=1+7=8.

Άρα $\int_{1/e}^{e^7} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx = \int_{1/e}^{e^7} (1+\ln x)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}dx = \int_0^8 y^{\frac{1}{3}}dy = \left[\frac{y^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_0^8 = \left[\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^8 = \left[\frac{3\cdot\sqrt[3]{y}^4}{4}\right]_0^8 = \frac{3\cdot\sqrt[3]{8}^4}{4}$=12.

$2^{ος}$ τρόπος: $\int_{1/e}^{e^7} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx = \int_{1/e}^{e^7} (1+\ln x)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}dx = \int_{1/e}^{e^7} (1+\ln x)^{\frac{1}{3}}(1+\ln x)'dx = \left[\frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_{1/e}^{e^7}$

$= \left[\frac{3(1+\ln x)^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_{1/e}^{e^7} = \left[\frac{3\cdot\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}}{4}\right]_{1/e}^{e^7}$ =...=12.

13.37. Η συνάρτηση $f(x) = x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}$ είναι **περιττή** στο $\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$, γιατί $f(-x) = -x\cdot\sqrt[5]{5-(-x)^2} =$

$= -x\cdot\sqrt[5]{5-x^2} = -f(x)$

Επομένως $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}dx$=0.

$2^{ος}$ τρόπος: Θέτω 5-x^2=y. Τότε (5-x^2)΄ dx=(y)΄dy ⇒ -2xdx=dy ⇒ xdx=$-\frac{1}{2}$ dy και:

- όταν x=-$\sqrt{5}$ τότε y=0.
- όταν x=$\sqrt{5}$ τότε y=0.

Άρα $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}dx = \int_0^0 \sqrt[5]{y}dy = 0$.

$3^{ος}$ τρόπος: $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}dx = -\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5-x^2)'\cdot\left(5-x^2\right)^{\frac{1}{5}}dx = -\left[\frac{(5-x^2)^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \left[\frac{5(5-x^2)^{\frac{4}{5}}}{4}\right]_{\sqrt{5}}^{-\sqrt{5}}$ =...=0.

13.38. Θέτω ημ6x=y. Τότε (ημ6x)΄ dx=(y)΄dy ⇒ 6συν6xdx=dy ⇒ συν6xdx=$\frac{1}{6}$ dy και:

- όταν x=$\pi/3$ τότε y=ημ $6\pi/3$ =ημ2π=0.
- όταν x=$\pi/12$ τότε y=ημ $6\pi/12$=ημ$\pi/2$=1.

Άρα $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \eta\mu^3 6x\sigma\upsilon\nu 6x dx = \frac{1}{6}\int_1^0 y^3 dy = \frac{1}{6}\left[\frac{y^4}{4}\right]_1^0 = \frac{1}{24}\left[y^4\right]_1^0 = -\frac{1}{24}$.

$2^{ος}$ τρόπος: $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \eta\mu^3 6x\sigma\upsilon\nu 6x dx = \frac{1}{6}\int_{\pi/12}^{\pi/3} \eta\mu^3 6x(\eta\mu 6x)'dx = \frac{1}{6}\left[\frac{\eta\mu^4 6x}{4}\right]_{\pi/12}^{\pi/3} = \frac{1}{24}\left[\eta\mu^4 6x\right]_{\pi/12}^{\pi/3} = -\frac{1}{24}$.

13.39. $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2x+3}{2x+1}dx = \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2x+1+2}{2x+1}dx = \int_0^{\frac{e-1}{2}} \left(\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}\right)dx = \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2x+1}{2x+1}dx + \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2}{2x+1}dx =$

$= \int_0^{\frac{e-1}{2}} dx + 2\int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{1}{2x+1}dx = \frac{e-1}{2} + \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{(2x+1)'}{2x+1}dx = \frac{e-1}{2} + \left[\ln(2x+1)\right]_0^{\frac{e-1}{2}} = \frac{e-1}{2}+1 = \frac{e+1}{2}$.

13.40. Θέτω x^3+1=y. Τότε (x^3+1)΄ dx=(y)΄dy ⇒ 3x^2dx=dy ⇒ x^2dx=$\frac{1}{3}$ dy και:

- όταν x=$\sqrt[3]{26}$ τότε y=27.
- όταν x=$\sqrt[3]{7}$ τότε y=8.

Άρα $\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \frac{1}{3}\int_8^{27} \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{1}{3}\int_8^{27} y^{-\frac{1}{3}}dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_8^{27} = \frac{1}{3}\left[\frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_8^{27} = \left[\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_8^{27} = \frac{5}{2}$.

2ος τρόπος: $\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \frac{(x^3+1)'dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{3}}(x^3+1)'dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3+1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} =$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{3(x^3+1)^{-\frac{1}{3}+1}}{2}\right]_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} = \left[\frac{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} = \left[\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}\right]_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} =\ldots= \frac{5}{2}$.

13.41. Θέτω x+συνx=y. Τότε (x+συνx)΄ dx=(y)΄dy ⇒ (1-ημx)dx=dy και:
- όταν x=0 τότε y=0+συν0=1.
- όταν x=$\pi/2$ τότε y=$\pi/2$ +συν $\pi/2$=$\pi/2$.

Άρα $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_1^{\pi/2}\frac{1}{y}dy = [\ln y]_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2}$.

2ος τρόπος: $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{(x+\sigma\upsilon\nu x)'}{x+\sigma\upsilon\nu x}dx = [\ln(x+\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\pi/2} =\ldots= \ln\frac{\pi}{2}$.

13.42. Η συνάρτηση f(x)=συν²xημx είναι **περιττή** στο [-π,π], γιατί f(-x)=συν²(-x)ημ(-x)=-συν²xημx=-f(x).

Άρα $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx$ =0.

2ος τρόπος: Θέτω συνx=y. Τότε (συνx)΄ dx=(y)΄dy ⇒ -ημxdx=dy ⇒ ημxdx=-dy και:
- όταν x=-π τότε y=συν(-π)=συνπ=-1.
- όταν x=π τότε y=συνπ=-1.

Άρα $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx = -\int_{-1}^{-1} y^2dy$ =0.

3ος τρόπος: $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx = -\int_{-\pi}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x)'dx = -\left[\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$ =...=0.

13.43. Θέτω $\sqrt{x}$ =y. Τότε ($\sqrt{x}$)΄ dx=(y)΄dy ⇒ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$dx=dy ⇒ $\frac{1}{\sqrt{x}}$dx=2dy και:
- όταν x=$\frac{\pi^2}{9}$ τότε y= $\pi/3$.
- όταν x=$\frac{\pi^2}{16}$ τότε y=$\pi/4$.

Άρα $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\eta\mu y dy = -2[\sigma\upsilon\nu y]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = 2[\sigma\upsilon\nu y]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ =1-$\sqrt{2}$.

2ος τρόπος: $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu\sqrt{x}dx = 2\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}}\left(\sqrt{x}\right)'\eta\mu\sqrt{x}dx = -2\left[\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\right]_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}} = 2\left[\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\right]_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{9}} =$

=...=1-$\sqrt{2}$.

13.44. Θέτω 1-συνx=y. Τότε (1-συνx)΄ dx=(y)΄dy ⇒ ημxdx=dy και:
- όταν x=$\pi/2$ τότε y=1-συν $\pi/2$ =1.
- όταν x=π τότε y=1-συνπ=1-(-1)=2.

Άρα $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_{1}^{2}\frac{dy}{y} = [\ln y]_1^2$ =ln2.

2ος τρόπος: $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx = [\ln(1-\sigma\upsilon\nu x]_{\pi/2}^{\pi}$ =…=ln2.

13.45. Θέτω lnx=y. Τότε (lnx)΄ dx=(y)΄dy $\Rightarrow$ $\frac{dx}{x}$ =dy και:

- όταν x= $e^{\frac{\pi}{4}}$ τότε y=ln $e^{\frac{\pi}{4}}$ = $\pi/4$.
- όταν x= $e^{\frac{\pi}{2}}$ τότε y=ln $e^{\frac{\pi}{2}}$ = $\pi/2$.

Άρα $\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)dx}{x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu y dy = [\eta\mu y]_{\pi/4}^{\pi/2} == \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

2ος τρόπος: $\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)dx}{x} = \int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu(\ln x)dx = \int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} (\ln x)'\sigma\upsilon\nu(\ln x)dx = [\eta\mu(\ln x)]_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}}$ =…$== \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

.

13.46. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x} + \frac{3\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}\right)dx = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x}dx + 3\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{\eta\mu^2 x}dx =$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} \eta\mu^{-3}x(\eta\mu x)'dx - 3[\sigma\phi x]_{\pi/6}^{\pi/3} = 2\left[\frac{\eta\mu^{-3+1}x}{-3+1}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + 2\sqrt{3} = \left[\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right]_{\pi/3}^{\pi/6} + 2\sqrt{3} = \frac{8}{3} + 2\sqrt{3}.$$

13.47. Η συνάρτηση f(x)=συν³x είναι **άρτια** στο [-$\pi/2$,$\pi/2$], γιατί f(-x)=συν³(-x)=συν³x=f(x).

Άρα I= $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3 x dx = 2\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3 x dx = 2\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx = 2\int_0^{\pi/2}(1-\eta\mu^2 x)\cdot(\eta\mu x)'dx =$

$$= 2\left[\eta\mu x - \frac{\eta\mu^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

13.48. $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int_0^{\pi}(\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+2\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 2x dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 2x dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\overbrace{[\eta\mu 2x]_0^{\pi}}^{0} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi}dx + \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 4x dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{32}\overbrace{[\eta\mu 4x]_0^{\pi}}^{0} = \frac{3\pi}{8}.$$

13.49. $\int_0^{\sqrt{e-1}}\frac{2xdx}{x^2+1} = \int_0^{\sqrt{e-1}}\frac{(x^2+1)'dx}{x^2+1} = [\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{e-1}}$ =1.

13.50. Η συνάρτηση f(x)= $\frac{x}{4-x^2}$ είναι **περιττή**, γιατί f(-x)= $\frac{-x}{4-(-x)^2} = -\frac{x}{4-x^2}$ =-f(x).

Άρα $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{4-x^2}$ =0.

2ος τρόπος: $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(4-x^2)'dx}{4-x^2} = -\frac{1}{2}[\ln(4-x^2)]_{-1}^{1}$ =0.

13.51. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt[3]{\ln 3}}(x^3)' e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\left[e^{x^3}\right]_0^{\sqrt[3]{\ln 3}} = \frac{1}{3}\left(e^{\ln 3}-1\right) = \frac{1}{3}(3-1) = \frac{2}{3}$.

13.52. $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{7}}^{2}(x^3-7)^8 3x^2 dx = \int_{\sqrt[3]{7}}^{2}(x^3-7)^8(x^3-7)'dx = \left[\frac{\left(x^3-7\right)^9}{9}\right]_{\sqrt[3]{7}}^{2} = \ldots = \frac{1}{9}$.

13.53. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int_1^e \ln^3 x\frac{1}{x}dx = \int_1^e \ln^3 x(\ln x)'dx = \left[\frac{\ln^4 x}{4}\right]_1^e = \ldots = \frac{1}{4}$.

13.54. $\displaystyle\int_{-3}^{e-4}\frac{x}{x+4}dx = \int_{-3}^{e-4}\frac{x+4-4}{x+4}dx = \int_{-3}^{e-4}\left(\frac{x+4}{x+4}-\frac{4}{x+4}\right)dx = \int_{-3}^{e-4}\left(1-\frac{4}{x+4}\right)dx = \int_{-3}^{e-4}dx - 4\int_{-3}^{e-4}\frac{1}{x+4}dx$

$= e-1-4\left[\ln(x+4)\right]_{-3}^{e-4}$ =…=e-5.

13.55. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}(\varepsilon\phi^2 x+\varepsilon\phi^4 x)dx = \int_0^{\pi/4}\varepsilon\phi^2 x(1+\varepsilon\phi^2 x)dx = \int_0^{\pi/4}\varepsilon\phi^2 x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\pi/4}\varepsilon\phi^2 x(\varepsilon\phi x)'dx = \left[\frac{\varepsilon\phi^3 x}{3}\right]_0^{\pi/4} =$

$=\frac{1}{3}$.

13.56. $\displaystyle\int_0^1\frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+4)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$.