ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

2ον ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1) Να βρεθεί το $\mu\in R$, ώστε η ευθεία (ε): $2x+3y+\mu=0$ να εφάπτεται της παραβολής $x^2=-6y$.

Λύση: $\begin{cases}2x+3y+\mu=0\\ x^2=-6y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{2x+\mu}{3}\\ x^2=-6y\end{cases}\Leftrightarrow x^2=2(2x+\mu)\Leftrightarrow x^2-4x-2\mu=0$……..(1)

Η (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x. Αφού η ευθεία (ε) εφάπτεται της παραβολής, τέμνει αυτή σε ένα μόνο σημείο, άρα η (1) έχει μοναδική λύση. Άρα $\Delta=0\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma=0$

$\Leftrightarrow 16+8\mu=0$

$\Leftrightarrow \mu=-2$.

Θα πρέπει να διαπιστώσουμε όμως αν πράγματι για $\mu=-2$ η (ε): $2x+3y-2=0$ είναι εφαπτομένη.

Για $\mu=-2$ το τριώνυμο (1) έχει διπλή ρίζα $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=2$.

Τότε $y=-\dfrac{2x+\mu}{3}=-\dfrac{2\cdot2-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$. Άρα το σημείο επαφής είναι $A\left(2,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $xx_A=-3(y+y_A)\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow 2x+3y-2=0$.

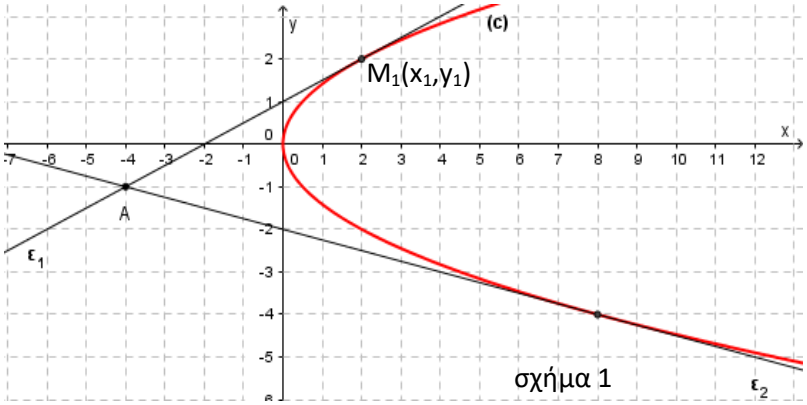
2) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2x$, που διέρχεται από το σημείο A(-4,-1).

Λύση: Προφανώς (?) το σημείο A δεν είναι σημείο της παραβολής (c).

Εάν $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $yy_1=\rho(x+x_1)$ και επειδή $\rho=1\Leftrightarrow$ $yy_1=x+x_1$……..(1)

$\left.\begin{array}{l}A\in(\varepsilon)\Leftrightarrow -y_1=-4+x_1\text{…..(2)}\\ M_1\in(c)\Leftrightarrow y_1^2=2x_1\text{…..(3)}\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2\\ y_1=2\end{cases}$ ή $\begin{cases}x_1=8\\ y_1=-4\end{cases}$.



σχήμα 1

☛ $M_1(2,2)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $x-2y+2=0$.

☛ $M_1(8,-4)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $x+4y+8=0$ (δυο εφαπτόμενες, βλέπε σχήμα 1).

3) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) της παραβολής (c): $y^2=5x$, που είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $3x+2y-1=0$.

Λύση: $\rho={}^5/_2$.

Έστω (δ): $yy_1=\dfrac{5}{2}(x+x_1)\Leftrightarrow 2yy_1=5x+5x_1\Leftrightarrow 5x-2y_1y+5x_1=0$ (1) η εξίσωση της εφαπτόμενης της (c), όπου $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής.

Δυο διανύσματα παράλληλα στις (δ) και (ε) είναι τα $\vec{u}=(-2y_1,-5)$ και $\vec{v}=(2,-3)$.

$(\delta)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow -4y_1+15=0$

$\Leftrightarrow y_1={}^{15}/_4$.

$M_1\in(c)\Leftrightarrow y_1^2=5x_1$ η οποία για $y_1={}^{15}/_4$ δίνει $x_1={}^{45}/_{16}$ οπότε η (1) δίνει $16x-24y+45=0$.

4) Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της (δ) που είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $3x+y+3=0$.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενών της που διέρχονται από το σημείο A(-2,1).

Λύση:

i) $\rho=2$. Έστω (δ): $yy_1=2(x+x_1)\Leftrightarrow yy_1=2x+2x_1\Leftrightarrow 2x-y_1y+2x_1=0$ (1) η εξίσωση της εφαπτόμενης της (c), όπου $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής.

Δυο διανύσματα παράλληλα στις (δ) και (ε) είναι τα $\vec{u}=(-y_1,-2)$ και $\vec{v}=(1,-3)$.

$(\delta)\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow -y_1+6=0$

$\Leftrightarrow y_1=6$.

$M_1 \in (c) \Leftrightarrow y_1^2=4x_1$ η οποία για $y_1=6$ δίνει $x_1=9$ οπότε η (1) δίνει $x-3y+9=0$.

ii) Εάν $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε από την (1) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A\in(\varepsilon) \Leftrightarrow -4-y_1+2x_1=0 \ldots\ldots(2) \\ M_1\in(c) \Leftrightarrow y_1^2=4x_1 \ldots\ldots\ldots(3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1=1 \\ y_1=-2 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} x_1=4 \\ y_1=4 \end{Bmatrix}.$$

☛ $M_1(1.-2)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $x+y+1=0$.

☛ $M_1(4,4)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $x-2y+4=0$.

5) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων (δ) της παραβολής (c): $y^2=16x$, που απέχουν από την κορυφή της απόσταση $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Λύση: $\rho=8$.

Έστω (δ): $yy_1=8(x+x_1) \Leftrightarrow yy_1=8x+8x_1 \Leftrightarrow 8x-y_1y+8x_1=0$ (1) η εξίσωση της εφαπτόμενης της (c), όπου $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής.

$$\begin{Bmatrix} d(O,\delta)=\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_1^2=16x_1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 80x_1^2-y_1^2=64 \\ y_1^2=16x_1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1=1 \\ y_1=4 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} x_1=1 \\ y_1=-4 \end{Bmatrix}$$ (η περίπτωση $x_1=-{}^4/_5$ απορρ.?).

☛ $M_1(1,4)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $2x+y+2=0$.

☛ $M_1(1,-4)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $2x-y+2=0$.

6) Δίνεται η παραβολή $y^2=2\rho x$ και από σημείο Μ του επιπέδου οι δυο εφαπτόμενές της. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ, ώστε οι δυο εφαπτόμενες να είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση: Έστω (ε_1): $yy_1=\rho(x+x_1)$

$\Leftrightarrow -\rho x+y_1y-\rho x_1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

και (ε_2): $yy_2=\rho(x+x_2)$

$\Leftrightarrow -\rho x+y_2y-\rho x_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

οι εξισώσεις των δυο εφαπτομένων, όπου $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ είναι τα σημεία επαφής.

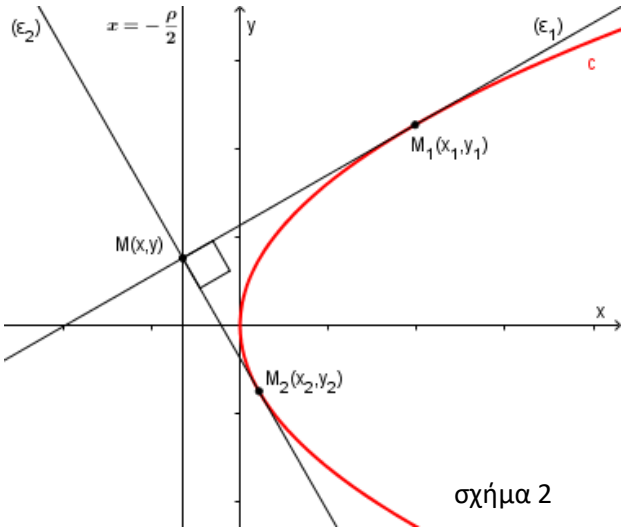
Δυο διανύσματα παράλληλα στις (ε_1) και (ε_2) είναι τα $\vec{u}=(y_1,\rho)$ και $\vec{v}=(y_2,\rho)$.

$(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2) \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow y_1y_2=-\rho^2 \ldots\ldots\ldots(3)$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε τις συν/νες του σημείου $M\left(\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2}, \rho\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\right)$

(η περίπτωση $y_1=y_2$ απορρίπτεται, γιατί τότε η (3) δίνει $y_1^2=-\rho^2$, που είναι αδύνατη).

Επίσης $y_1^2=2\rho x_1$ και $y_2^2=2\rho x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$



σχήμα 2

$$x_M=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2}=\frac{(x_1y_2-x_2y_1)(y_1+y_2)}{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}$$

$$=\frac{x_1y_1y_2+x_1y_2^2-x_2y_1^2-x_2y_1y_2}{y_1^2-y_2^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ η οποία λόγω της (4) γίνεται:}$$

$$=\frac{x_1y_1y_2+\cancel{2\rho x_1x_2}-\cancel{2\rho x_2x_1}-x_2y_1y_2}{2\rho(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{y_1y_2\cancel{(x_1-x_2)}}{2\rho\cancel{(x_1-x_2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ που λόγω της (3) γίνεται:}$$

$$=\frac{-\rho^2}{2\rho}=-\frac{\rho}{2}.$$

Άρα ο γ.τ. είναι η διευθετούσα της παραβολής (σχήμα 2).

7) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που εφάπτεται της ευθείας (ε): y=4x+1.

Λύση: *1η περίπτωση*: Έστω (c): $y^2=2\rho x$ η εξίσωση της παραβολής. Λύνουμε το σύστημα των (ε) και (c) για να βρούμε το σημείο τομής:

$\begin{cases} y^2=2\rho x \\ y=4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow (4x+1)^2=2\rho x \Leftrightarrow 16x^2+8x+1-2\rho x=0 \Leftrightarrow 16x^2+2(4-\rho)x+1=0$……..(1)

Η (1) είναι 2ου βαθμού ως προς x και για να έχει μοναδική λύση (αφού εφάπτεται) πρέπει Δ=0 ⇔ $\beta^2-4\alpha\gamma=0 \Leftrightarrow$ **…** ⇔ ρ=0 (απορρ.) ή ρ=8.

Για ρ=8 η (1) γίνεται $16x^2-8x+1=0 \Leftrightarrow (4x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

Για $x=\frac{1}{4}$ η y=4x+1 δίνει y=2, επομένως το σημείο επαφής είναι $M_1\left(\frac{1}{4},2\right)$

Το ότι η (ε) τέμνει την παραβολή σε ένα σημείο, δεν είναι ικανή συνθήκη ώστε να εφάπτεται αυτής. Θα δείξουμε ότι η (ε) πράγματι εφάπτεται της παραβολής.

Η εφαπτομένη στο σημείο $M_1\left(\frac{1}{4},2\right)$ έχει εξίσωση $yy_1=\rho(x+x_1) \Leftrightarrow 2y=8\left(x+\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y=4x+1$.

2η περίπτωση: Έστω (c): $x^2=2\rho y$ η εξίσωση της παραβολής. Λύνουμε το σύστημα των (ε) και (c) για να βρούμε το σημείο τομής:

$\begin{cases} x^2=2\rho y \\ y=4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=2\rho(4x+1) \Leftrightarrow x^2-8\rho x-2\rho=0$ ……..(2)

Η (2) είναι 2ου βαθμού ως προς x και για να έχει μοναδική λύση (αφού εφάπτεται) πρέπει Δ=0 ⇔ $\beta^2-4\alpha\gamma=0 \Leftrightarrow$ **…** ⇔ ρ=0 (απορρ.) ή $\rho=-{}^1/_8$.

Για $\rho=-{}^1/_8$ η (2) γίνεται $4x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Για $x=-\frac{1}{2}$ η y=4x+1 δίνει y=-1, επομένως το σημείο επαφής είναι $M_1\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

Το ότι η (ε) τέμνει την παραβολή σε ένα σημείο, δεν είναι ικανή συνθήκη ώστε να εφάπτεται αυτής. Θα δείξουμε ότι η (ε) πράγματι εφάπτεται της παραβολής.

Η εφαπτομένη στο σημείο $M_1\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ έχει εξίσωση $xx_1=\rho(y+y_1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=-\frac{1}{8}(y-1) \Leftrightarrow y=4x+1$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=16x$ ή $y=-4x^2$.

8) **i)** Βρείτε τον γ.τ. των σημείων $M(2\rho t^2, 2\rho t)$, όπου ρ=σταθ. πραγμ. αριθ., όταν το t μεταβάλλεται.
ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω γ.τ. που διέρχονται από το σημείο A(3,4), αν ρ=2.

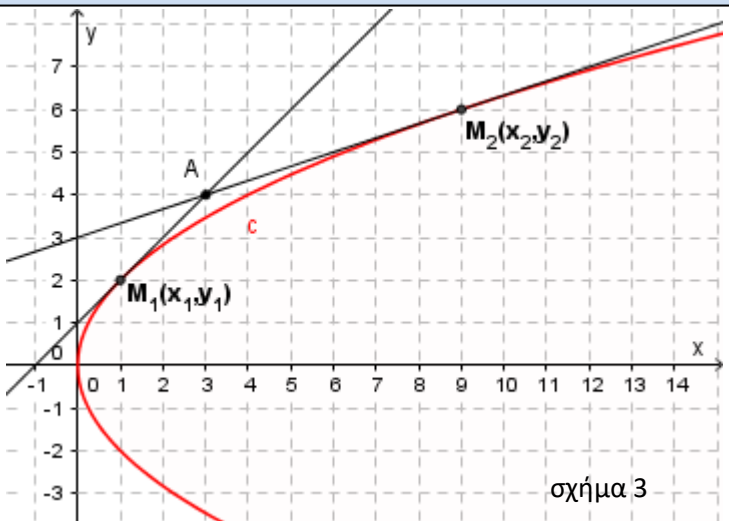
Λύση:

i) Θέτω $x=2\rho t^2$ και $y=2\rho t$.
Απαλείφουμε από αυτές το t και βρίσκουμε:

$\begin{cases} x=2\rho t^2 \\ y=2\rho t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\rho t^2 \\ y^2=4\rho^2 t^2 \end{cases}$ (:)

$\frac{x}{y^2}=\frac{1}{2\rho} \Leftrightarrow y^2=2\rho x$.

Άρα ο γ.τ. είναι η παραβολή $y^2=2\rho x$.



σχήμα 3

ii) Για ρ=2 η παραβολή έχει εξίσωση (c): $y^2=4x$……(1)
Έστω (ε): $yy_1=2(x+x_1)$ (1) η εξίσωση της εφαπτόμενης της (c), όπου $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής.

$\left.\begin{array}{l} A\in(\varepsilon) \Leftrightarrow 4y_1=2(3+x_1)\text{…..(2)} \\ M_1\in(c) \Leftrightarrow y_1^2=4x_1\text{……..(3)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \begin{cases} 16y_1^2=4(3+x_1)^2 \\ y_1^2=4x_1 \end{cases}$ (:) $\Leftrightarrow 16=\frac{(3+x_1)^2}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2-10x_1+9=0$.

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{Bmatrix}$ ή $\begin{Bmatrix} x_1 = 9 \\ y_1 = 6 \end{Bmatrix}$.

Άρα έχουμε δυο εφαπτόμενες στα σημεία $M_1(1,2)$ και $M_2(9,6)$ (σχήμα 3).

☛ $M_1(1,2)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση x-y+1=0.

☛ $M_1(1,-4)$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση x-3y+9=0.

9) Να βρεθεί το $\alpha \in R$, ώστε μια ευθεία παράλληλη στην (ε): x+2y+1=0 να είναι κοινή εφαπτομένη της παραβολής $y^2=4x$ και της καμπύλης (c) που ορίζεται από τα σημεία $M(\alpha+\sqrt{5}\,\sigma\upsilon\nu t,\ -2+\sqrt{5}\,\eta\mu t)$, όταν το t μεταβάλλεται.

Λύση: Θέτω $x=\alpha+\sqrt{5}\,\sigma\upsilon\nu t$ και $y=-2+\sqrt{5}\,\eta\mu t$.

Απαλείφουμε από αυτές το t και βρίσκουμε:

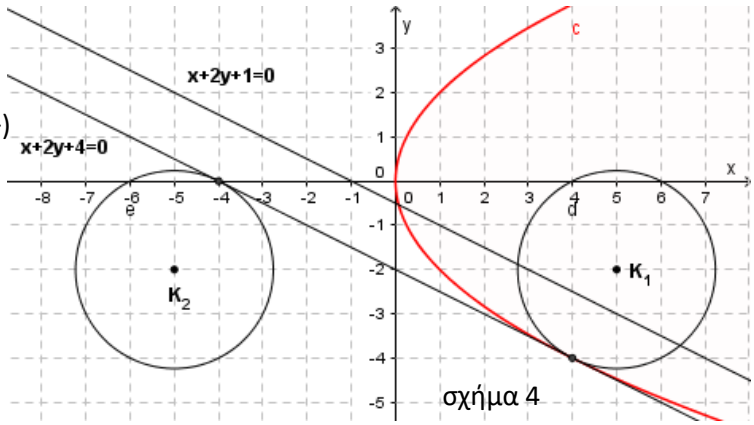
$$\begin{Bmatrix} x-a=\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu t \\ y+2=\sqrt{5}\eta\mu t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x-a)^2=5\sigma\upsilon\nu^2 t \\ (y+2)^2=5\eta\mu^2 t \end{Bmatrix} (+)$$

$$(x-\alpha)^2+(y-2)^2=5(\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^2 t)$$

$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-2)^2=5$.

Άρα το M κινείται σε κύκλο κέντρου $K(\alpha,-2)$ και ακτίνας $\rho=\sqrt{5}$.

Η κοινή εφαπτομένη αφού είναι παράλληλη στην ευθεία (ε), θα έχει εξίσωση x+2y+κ=0.



σχήμα 4

Αφού εφάπτεται, το σύστημα $\begin{Bmatrix} x+2y+\kappa=0 \\ y^2=4x \end{Bmatrix}$ έχει μοναδική λύση.

$\begin{Bmatrix} x+2y+\kappa=0 \\ y^2=4x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-2y-\kappa \\ y^2=4x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow y^2=4(-2y-\kappa) \Leftrightarrow y^2+8y+4\kappa=0$.....(1)

Η τελευταία είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς x και για να έχει μοναδική λύση πρέπει Δ=0 ⇔ … ⇔ κ=4.

Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία x+2y+4=0 εφάπτεται της παραβολής.

Για κ=4 η (1) έχει μοναδική λύση $y_1=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-4$. Τότε $x_1=4$ και το σημείο επαφής είναι M1(4,-4).

Η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $yy_1=2(x+x_1) \Leftrightarrow -4y=2(x+4) \Leftrightarrow x+2y+4=0$.

$d(K,\varepsilon)=\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|\alpha\cdot 1-2\cdot 2+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |\alpha|=5 \Leftrightarrow \alpha=5$ ή $\alpha=-5$ (δύο λύσεις. Βλέπε σχήμα 4).

10) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων της παραβολής $y^2=3x$ και του κύκλου $x^2+y^2=4$.

Λύση: Έστω (ε): $yy_1={}^3/_2(x+x_1) \Leftrightarrow 2yy_1=3x+3x_1 \Leftrightarrow 3x-2y_1y+3x_1=0$ (1) η εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής, όπου $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής με την παραβολή.

$d(O,\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|3x_1|}{\sqrt{3^2+4y_1^2}}=2 \Leftrightarrow$

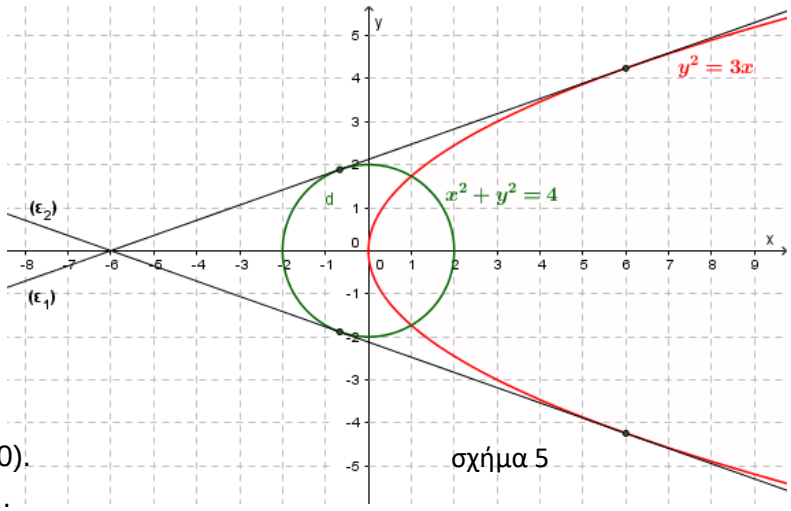
$9x_1^2=4(9+4y_1^2)$ και επειδή $y_1^2=3x_1$, θα έχουμε $9x_1^2=4(9+12x_1)$

$\Leftrightarrow 3x_1^2=4(3+4x_1)$

$\Leftrightarrow 3x_1^2-16x_1-12=0$.

Δ=400 και $x_1=6$ ή $x_1=-{}^2/_3$ (απορρ. γιατί x>0).

Για $x_1=6$, $y_1^2=3x_1=3\cdot 6=18$ οπότε $y_1=\pm 3\sqrt{2}$.



σχήμα 5

Άρα έχουμε δυο κοινές εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) (σχήμα 5), με εξισώσεις $x \pm 2\sqrt{2}\,y+6=0$.

11) α) Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη (ε) της παραβολής $y^2=2\rho x$ σε τυχαίο της σημείο $M_1(x_1,y_1)$ εκτός της κορυφής της, γράφεται στην μορφή $y=\lambda x+\dfrac{\rho}{2\lambda}$, λ≠0.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=mx+\frac{15}{4m}$ είναι εφαπτομένη της παραβολής $y^2=15x$, για κάθε $m\in R^*$.

γ) Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της παραβολής $y^2=15x$ και της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=16$.

Λύση:

α) Έστω (ε): $yy_1=\rho(x+x_1) \Leftrightarrow y=\frac{\rho}{y_1}x+\frac{\rho x_1}{y_1}$, γιατί $y_1\neq 0$ (?) ..... (1)

Θέτω $\lambda=\frac{\rho}{y_1}$. ..... (2)

Τότε $y_1=\frac{\rho}{\lambda}$ και η σχέση $y_1^2=2\rho x_1$ γίνεται $\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2=2\rho x_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{\rho}{2\lambda^2}$. ..... (3)

Η σχέση (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται $y=\lambda x+\frac{\rho}{2\lambda}$.

β) Είναι εφαρμογή του (α) ερωτήματος, για $\rho={}^{15}/_{2}$.

γ) Από το (β) ερώτημα, (ε): $y=mx+\frac{15}{4m}$

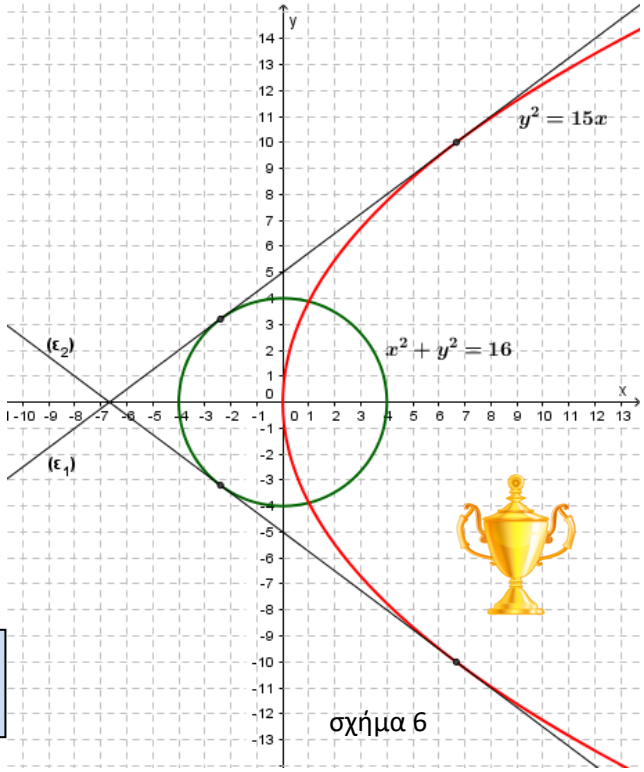
$\Leftrightarrow 4m^2x-4my+15=0$ ..... (4)

$d(O,\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \frac{|15|}{4\sqrt{m^4+m^2}}=4$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 256m^4+256m^2-225=0$ ..... (5)

Η εξίσωση (5) είναι διτετράγωνη ως προς m και έχει δεκτή την θετική της ρίζα $m^2={}^{9}/_{16} \Leftrightarrow m=\pm\frac{3}{4}$.

Άρα έχουμε δυο κοινές εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) (σχήμα 6), με εξισώσεις $y=\pm\frac{3}{4}x\pm 5$.



σχήμα 6

12) Να δείξετε ότι αν Ρ τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2=2\rho x$, τότε ο κύκλος διαμέτρου ΕΡ, όπου Ε η εστία της, εφάπτεται στον άξονα y΄Oy.

Λύση: Στο σχήμα 7 έχουμε φέρει την ΡΑ κάθετη στην διευθετούσα ευθεία (ε) και από το μέσο Κ του ΡΕ, τμήμα ΚΔ κάθετο στον άξονα yy΄.

Αρκεί να δείξουμε ότι (ΡΕ)=2(ΚΔ).

Έχουμε διαδοχικά:

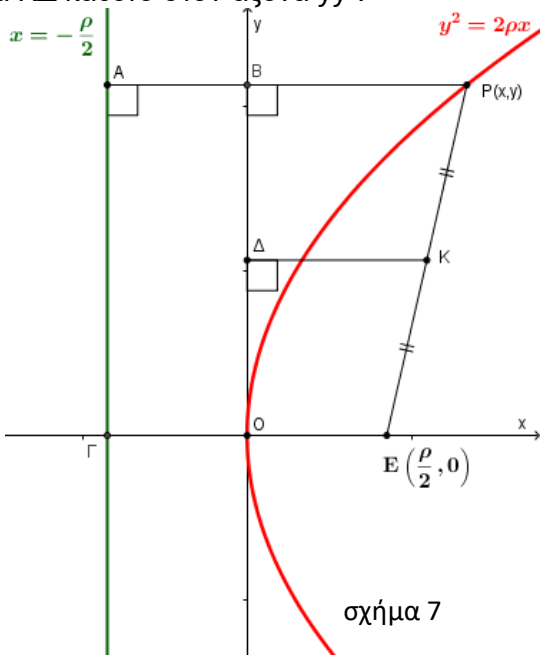
(ΡΑ)=(ΡΕ) $\Leftrightarrow$ (ΡΒ)+(ΒΑ)=(ΡΕ) ..... (1)

Στο τραπέζιο ΟΕΡΒ η ΚΔ είναι διάμεσος.

Άρα (ΡΒ)+(ΟΕ)=2(ΚΔ) ..... (2)

Επίσης (ΒΑ)=(ΟΕ)=$\frac{|\rho|}{2}$ ..... (3)

Από (1), (2) και (3) $\Rightarrow$ (ΡΕ)=2(ΚΔ).



σχήμα 7

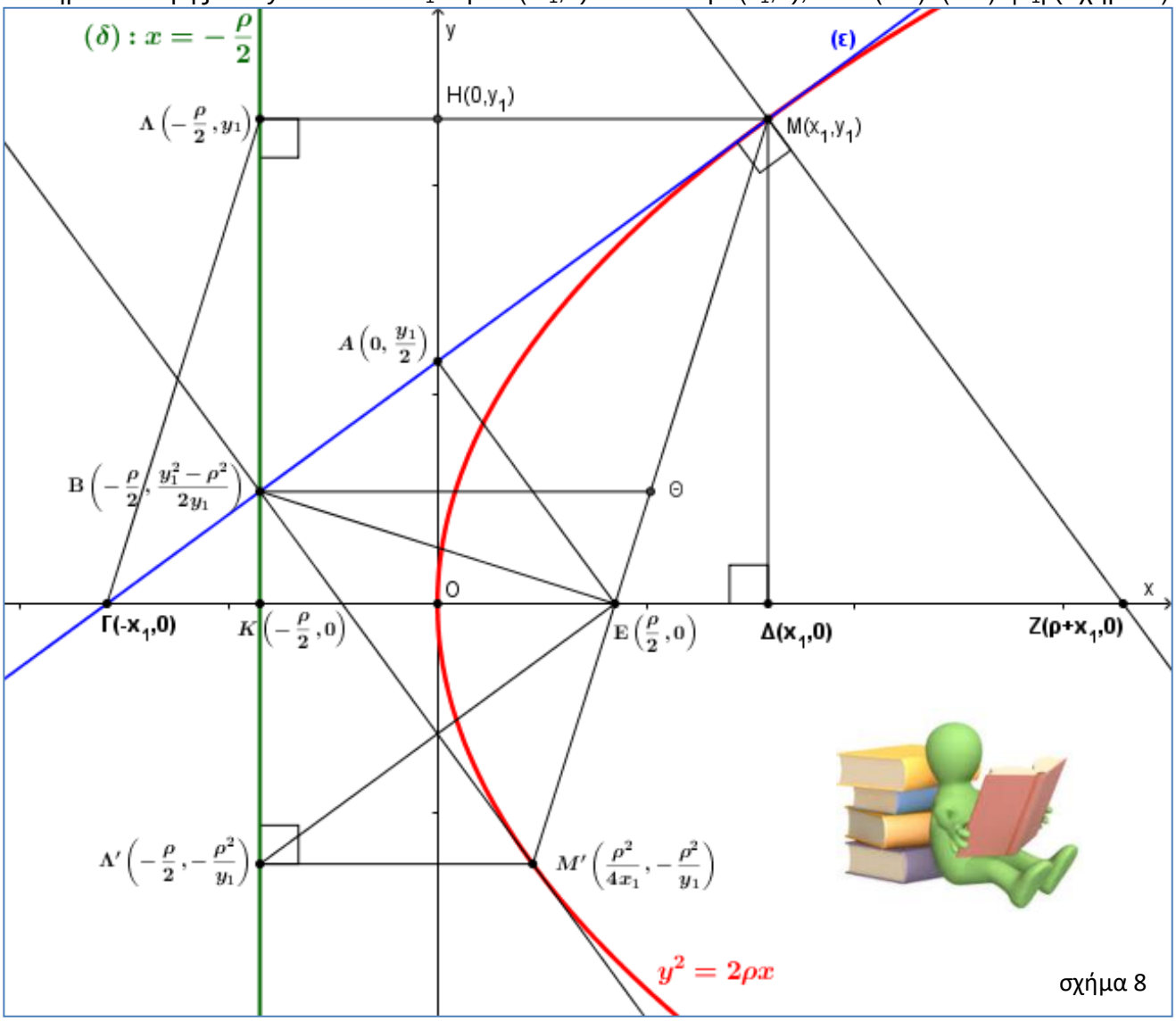
13) Δίνεται η παραβολή $y^2=2\rho x$ και σημείο της $M(x_1,y_1)$, με $0\neq x_1\neq \rho/2$. Ευθύγραμμο τμήμα ΜΜ΄ έχει τα άκρα του στην παραβολή και διέρχεται από την εστία Ε (χορδή της παραβολής). Φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο Μ που τέμνει τον άξονα x΄Ox στο Γ, τον άξονα y΄Oy στο Α και την διευθετούσα (δ) στο Β. Εάν ΜΛ ⊥(δ), ΜΔ ⊥ x΄Ox, ΜΖ ⊥(ε) και Μ΄Λ΄⊥(δ), να δείξετε ότι:

i) (ΟΓ)=(ΟΔ),
ii) (ΕΓ)=(ΕΜ)=(ΕΖ)=(ΜΛ)=(ΓΛ),
iii) (ΔΖ)=2(ΟΕ),
iv) (ΒΛ)=(ΒΛ΄),
v) τα σημεία Μ, Ο, Λ΄ είναι συνευθειακά,
vi) τα σημεία Μ΄, Ο, Λ είναι συνευθειακά,
vii) τα σημεία Ε, Α, Λ είναι συνευθειακά,
viii) Λ΄Ε//(ε)

ix) ΕΑ⊥ΑΜ, ΒΕ⊥ΕΜ, ΛΕ⊥ΕΛ΄ και ΒΜ⊥ΒΜ΄
x) η ΒΜ΄ είναι εφαπτομένη της παραβολής,
xi) τα τετράπλευρα ΕΒΛΜ, ΕΑΒΚ, ΕΒΛ΄Μ΄ και ΕΑΜΔ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,
xii) ο κύκλος διαμέτρου ΜΜ΄ εφάπτεται της διευθετούσας στο Β και
xiii) όταν το Μ κινείται πάνω στην παραβολή, το μέσο Θ του ΜΜ΄ κινείται στην γραμμή με εξίσωση $y^2 = \rho\left(x - \frac{\rho}{2}\right)$.

Λύση:

i) Έστω (ε): $yy_1=\rho(x+x_1)$ (1) η εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής, όπου $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής. Για y=0 δίνει $x=-x_1$. Άρα $Γ(-x_1,0)$ και επειδή $Δ(x_1,0)$, είναι (ΟΓ)=(ΟΔ)=$|x_1|$ (σχήμα 8).



σχήμα 8

ii) Επειδή (ΓΚ)=(ΕΔ)=$|x_1-\rho/2|$, θα έχουμε:
(ΕΓ)=(ΕΚ)+(ΓΚ)
=(ΕΚ)+(ΕΔ)
=(ΚΔ)
=(ΜΛ) ……..λόγω του ορθογωνίου ΚΔΜΛ
=(ΜΕ)……..από τον ορισμό της παραβολής
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΖ είναι (ΕΓ)=(ΜΕ). Άρα η ΜΕ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα και επομένως (ΕΓ)=(ΜΕ)=(ΕΖ).
Επειδή (ΕΓ)=//(ΜΛ), το τετράπλευρο ΓΕΜΛ είναι παρ/μο. Άρα (ΜΕ)=(ΛΓ).
Άρα (ΕΓ)=(ΜΕ)=(ΕΖ)=(ΜΛ)=(ΛΓ).

iii) Επειδή Ε μέσο του ΖΓ, $x_Z+x_Γ=2x_E \Leftrightarrow x_Z-x_1=\rho \Leftrightarrow x_Z=\rho+x_1$. Άρα $Z(\rho+x_1,0)$.
(ΔΖ)= $\sqrt{(x_Z-x_\Delta)^2+(y_Z-y_\Delta)^2} = \sqrt{(\rho+\cancel{x_1}-\cancel{x_1})^2+(0-0)^2}$ =…=|ρ|=2(ΟΕ).

iv) Η σχέση (1) για $x=-\rho/2$ δίνει $y_By_1=\rho(-\rho/2+x_1) \Leftrightarrow y_B = \frac{(2x_1-\rho)\rho}{2y_1} = \frac{2x_1\rho-\rho^2}{2y_1} = \frac{y_1^2-\rho^2}{2y_1}$.

Άρα $B\left(-\frac{\rho}{2},\frac{y_1^2-\rho^2}{2y_1}\right)$.

(ΒΛ)=$\left|\frac{y_1^2-\rho^2}{2y_1}-y_1\right|=\left|\frac{y_1^2-\rho^2-2y_1^2}{2y_1}\right|=\frac{y_1^2+\rho^2}{2|y_1|}$ .....(1)

Βρίσκουμε τις συν/νες του Μ΄(x,y).

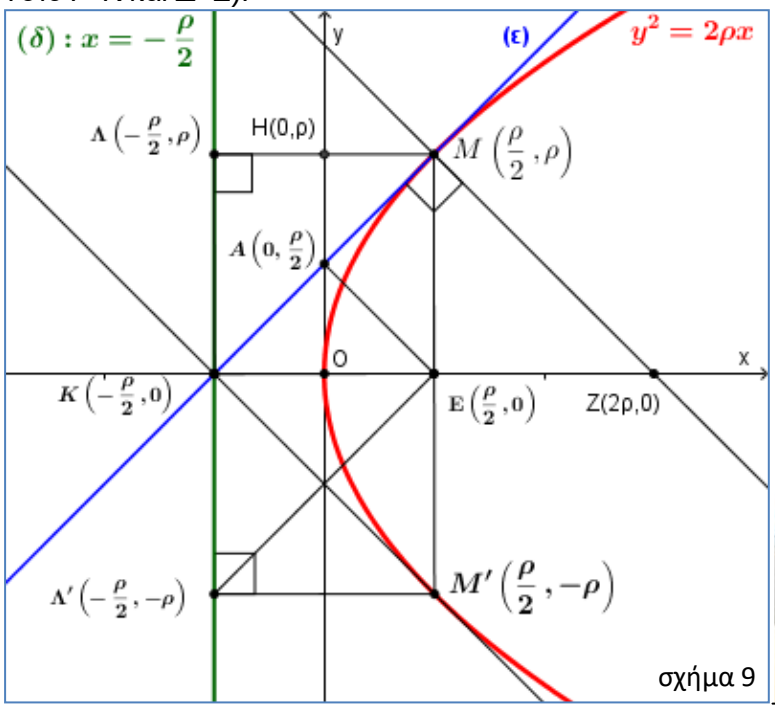
$\overrightarrow{EM}=\left(x_1-\frac{\rho}{2},y_1\right)$ και $\overrightarrow{EM'}=\left(x-\frac{\rho}{2},y\right)$

ΕΜ // ΕΜ΄ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-\frac{\rho}{2} & y_1 \\ x-\frac{\rho}{2} & y \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow y\left(x_1-\frac{\rho}{2}\right)=y_1\left(x-\frac{\rho}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y(2x_1-\rho)=(2x-\rho)y_1$

$\Leftrightarrow y=\frac{(2x-\rho)y_1}{2x_1-\rho}$. .....(2)

(γιατί $x_1\neq\frac{\rho}{2}$. Αν $x_1=\frac{\rho}{2}$ οπότε και $x=\frac{\rho}{2}$ οδηγεί στην περίπτωση που τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα xx΄ που είναι τετριμμένη περίπτωση και περιγράφεται στο σχήμα 9. Τότε Γ≡Κ και Δ≡Ε).



σχήμα 9

$y^2=2\rho x \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{(2x-\rho)^2y_1^2}{(2x_1-\rho)^2}=2\rho x \Leftrightarrow \frac{(2x-\rho)^2 2\rho x_1}{(2x_1-\rho)^2}=2\rho x$

$\Leftrightarrow \frac{(2x-\rho)^2x_1}{(2x_1-\rho)^2}=x$

$\Leftrightarrow (2x-\rho)^2x_1=(2x_1-\rho)^2x$

$\Leftrightarrow (4x^2-4x\rho+\rho^2)x_1=(4x_1^2-4x_1\rho+\rho^2)x$

$\Leftrightarrow 4x^2x_1-\cancel{4xx_1\rho}+\rho^2x_1=4xx_1^2-\cancel{4xx_1\rho}+\rho^2x$

$\Leftrightarrow \mathbf{4x^2x_1+\rho^2x_1-4xx_1^2-\rho^2x=0}$

$\Leftrightarrow 4xx_1(x-x_1)-\rho^2(x-x_1)=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(4xx_1-\rho^2)=0$

$\Leftrightarrow x-x_1=0$ ή $4xx_1-\rho^2=0$

$\Leftrightarrow x=x_1$ (σημείο Μ) ή $4xx_1-\rho^2=0$ δηλαδή $x=\frac{\rho^2}{4x_1}$.

Για $x=\dfrac{\rho^2}{4x_1}$ η σχέση (2) μετά από πράξεις δίνει $y=-\dfrac{\rho y_1}{2x_1}=-\dfrac{\rho y_1^{\,2}}{2x_1y_1}=-\dfrac{\rho\cdot\cancel{2\rho x_1}}{\cancel{2x_1}y_1}=-\dfrac{\rho^2}{y_1}$.

Άρα $M'\left(\dfrac{\rho^2}{4x_1},-\dfrac{\rho^2}{y_1}\right)$.

Επίσης $\Lambda'\left(-\dfrac{\rho}{2},-\dfrac{\rho^2}{y_1}\right)$.

(ΒΛ΄)=$\left|\dfrac{y_1^2-\rho^2}{2y_1}+\dfrac{\rho^2}{y_1}\right|=\left|\dfrac{y_1^2-\rho^2+2\rho^2}{2y_1}\right|=\dfrac{y_1^2+\rho^2}{2|y_1|}$ .....(2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ (ΒΛ)=(ΒΛ΄).

v) $\overrightarrow{OM}=(x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{O\Lambda'}=\left(-\dfrac{\rho}{2},-\dfrac{\rho^2}{y_1}\right)$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -\dfrac{\rho}{2} & -\dfrac{\rho^2}{y_1}\end{vmatrix}=\frac{\rho y_1}{2}-\frac{\rho^2x_1}{y_1}=\frac{\rho y_1^{\,2}-2\rho^2x_1}{2y_1}=\frac{\rho\cdot 2\rho x_1^{\,2}-2\rho^2x_1}{2y_1}=\frac{2\rho^2x_1^{\,2}-2\rho^2x_1}{2y_1}=0.$$

Άρα ΟΜ//ΟΛ΄ και επειδή έχουν το Ο κοινό, τα Μ, Ο και Λ΄ είναι συνευθειακά.

vi) $\overrightarrow{O\Lambda}=\left(-\dfrac{\rho}{2},y_1\right)$ και $\overrightarrow{OM'}=\left(\dfrac{\rho^2}{4x_1},-\dfrac{\rho^2}{y_1}\right)$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\rho}{2} & y_1 \\ \dfrac{\rho^2}{4x_1} & -\dfrac{\rho^2}{y_1}\end{vmatrix}=\frac{\rho^3}{2y_1}-\frac{\rho^2y_1}{4x_1}=\frac{2\rho^3x_1-\rho^2y_1^{\,2}}{4x_1y_1}=\frac{\rho^2(2\rho x_1-y_1^{\,2})}{4x_1y_1}=\frac{\rho^2(\cancel{y_1^{\,2}}-\cancel{y_1^{\,2}})}{4x_1y_1}=0.$$

Άρα ΟΜ΄//ΟΛ και επειδή έχουν το Ο κοινό, τα Μ΄, Ο και Λ είναι συνευθειακά.

vii) Στο παρ/μο ΛΜΕΓ το Α είναι το μέσο της διαγωνίου ΜΓ. Άρα είναι το κέντρο του παρ/μου και από το Α διέρχεται και η άλλη διαγώνιος ΕΛ. Άρα τα Ε, Α και Λ είναι συνευθειακά.

viii) $\overrightarrow{E\Lambda'}=\left(-\rho,-\dfrac{\rho^2}{y_1}\right)$ και $\overrightarrow{\Gamma M}=(2x_1,y_1)$.

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & y_1 \\ -\rho & -\dfrac{\rho^2}{y_1}\end{vmatrix}=\rho y_1-\frac{2\rho^2x_1}{y_1}=\frac{\rho y_1^{\,2}-2\rho^2x_1}{y_1}=\frac{\rho(y_1^{\,2}-2\rho x_1)}{y_1}=\frac{\rho(\cancel{y_1^{\,2}}-\cancel{y_1^{\,2}})}{y_1}=0.$$ Άρα ΕΛ΄// (ε).

ix) ☛ Από το **(ii)** ερώτημα, το παρ/μο ΓΕΜΛ είναι ρόμβος. Άρα οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.
Άρα ΕΑ $\perp$ ΑΜ.

☛ $\overrightarrow{BE}=\left(\rho,\dfrac{\rho^2-y_1^2}{2y_1}\right)$ και $\overrightarrow{EM}=\left(x_1-\dfrac{\rho}{2},y_1\right)$.

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EM}=\rho\left(x_1-\frac{\rho}{2}\right)+\frac{\rho^2-y_1^2}{2}=\frac{2\rho x_1-\cancel{\rho^2}+\cancel{\rho^2}-y_1^2}{2}=\frac{\cancel{y_1^2}-\cancel{y_1^2}}{2}=0.$$ Άρα ΒΕ $\perp$ ΕΜ.

☛ Από **(viii)** ερώτημα, ΕΛ΄// (ε)
Από **(ix)** ερώτημα, ΕΑ $\perp$ (ε) $\Big\}\Rightarrow$ ΕΑ $\perp$ ΕΛ΄.

☛ $\overrightarrow{\Gamma M}=(2x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{BM'}=\left(\dfrac{\rho^2}{4x_1}+\dfrac{\rho}{2},-\dfrac{\rho^2}{y_1}+\dfrac{\rho^2-y_1^2}{2y_1}\right)$ οπότε

$$\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{BM'}=\frac{\rho^2}{2}+\rho x_1-\rho^2+\frac{\rho^2-y_1^2}{2}=\frac{\cancel{\rho^2}+2\rho x_1-\cancel{2\rho^2}+\cancel{\rho^2}-y_1^2}{2}=\frac{\cancel{y_1^2}-\cancel{y_1^2}}{2}=0.$$ Άρα ΒΜ΄$\perp$ (ε).

x) Η εφαπτομένη στο σημείο Μ΄ είναι:

$yy_{M'} = \rho(x + x_{M'}) \Leftrightarrow -y\dfrac{\rho^2}{y_1} = \rho\left(x + \dfrac{\rho^2}{4x_1}\right) \Leftrightarrow -y\dfrac{\rho}{y_1} = x + \dfrac{\rho^2}{4x_1}$ η οποία για $x = -\dfrac{\rho}{2}$ γίνεται:

$$-y\frac{\rho}{y_1} = -\frac{\rho}{2} + \frac{\rho^2}{4x_1} \Leftrightarrow \frac{y}{y_1} = \frac{1}{2} - \frac{\rho}{4x_1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y_1(2x_1 - \rho)}{4x_1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y_1(2\rho x_1 - \rho^2)}{4\rho x_1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y_1({y_1}^2 - \rho^2)}{2{y_1}^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{{y_1}^2 - \rho^2}{2y_1} = y_B$$

Άρα η ΒΜ΄ είναι εφαπτομένη της παραβολής.

xi) Λόγω του **(ix)** ερωτήματος, έχουμε:

- ΒΕ ⊥ ΕΜ ⇔ $M\hat{E}B + B\hat{\Lambda}M$ =90^0+90^0=180^0 ⇔ ΕΒΛΜ εγγράψιμο σε κύκλο.
- ΕΑ ⊥ ΑΜ ⇔ $E\hat{A}B + B\hat{K}E$ =90^0+90^0=180^0 ⇔ ΕΑΒΚ εγγράψιμο σε κύκλο.
- ΒΕ ⊥ ΕΜ ⇔ $B\hat{E}M' + B\hat{\Lambda}'M'$ =90^0+90^0=180^0 ⇔ ΕΒΛ΄Μ΄ εγγράψιμο σε κύκλο.
- ΕΑ ⊥ ΑΜ ⇔ $E\hat{A}M + M\hat{\Delta}E$ =90^0+90^0=180^0 ⇔ ΕΑΜΔ εγγράψιμο σε κύκλο.

xii) Φέρνουμε ΒΘ ⊥ (δ). Τότε επειδή (ΒΛ)=(ΒΛ΄) και ΜΛ//ΒΘ//Μ΄Λ΄ (ως κάθετες στην δ), η ΒΘ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΜΛΛ΄Μ΄. Άρα το Θ είναι μέσο του ΜΜ΄ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΜ΄ (ΒΜ΄⊥ ΒΜ) η ΒΘ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα. Άρα (ΘΜ)=(ΘΒ)=(ΘΜ΄) και ο κύκλος διαμέτρου ΜΜ΄ διέρχεται από το Β και επειδή ΒΘ⊥(δ), η (δ) είναι εφαπτομένη αυτού.

xiii) $\Theta\left(\dfrac{x_1 + \dfrac{\rho^2}{4x_1}}{2}, \dfrac{y_1 - \dfrac{\rho^2}{y_1}}{2}\right)$ ή $\Theta\left(\dfrac{4{x_1}^2 + \rho^2}{8x_1}, \dfrac{{y_1}^2 - \rho^2}{2y_1}\right)$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $y^2 = \rho\left(x - \dfrac{\rho}{2}\right)$, τις συντεταγμένες του Θ:

$$\left(\frac{{y_1}^2 - \rho^2}{2y_1}\right)^2 = \rho\left(\frac{4{x_1}^2 + \rho^2}{8x_1} - \frac{\rho}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\left(2\rho x_1 - \rho^2\right)^2}{4{y_1}^2} = \rho\left(\frac{4{x_1}^2 + \rho^2 - 4\rho x_1}{8x_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\frac{(2x_1 - \rho)^2}{8\rho x_1} = \rho\frac{(2x_1 - \rho)^2}{8x_1}$$ που ισχύει.

Άρα το Θ είναι σημείο της καμπύλης $y^2 = \rho\left(x - \dfrac{\rho}{2}\right)$.

14) Δίνονται οι παραβολές (c_1): y^2=2ρx και (c_2): x^2=2ρy, με ρ>0 που τέμνονται στο Α. Η εφαπτόμενη (ε_1) της (c_1) στο Α τέμνει την (c_2) στο Γ και η εφαπτόμενη (ε_2) της (c_2) στο Α τέμνει την (c_1) στο Β. Να δείξετε ότι η ΒΓ είναι κοινή εφαπτόμενη των δύο παραβολών.

Λύση: $\begin{cases} y^2 = 2\rho x & (1) \\ x^2 = 2\rho y & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\rho^2 x^2 = y^4 \\ x^2 = 2\rho y \end{cases}$ ⇔ y^3=8ρ^3 ⇔ y=2ρ.

$\overset{y=2\rho}{\Leftrightarrow}$ (1) ⇔ x=2ρ. Άρα Α(2ρ,2ρ).

(ε_1): yy_A=ρ(x+x_A) ⇔ 2y=x+2ρ…… (3)

Ομοίως (ε_2): 2x=y+2ρ.

$\left.\begin{cases} 2y = x + 2\rho \\ x^2 = 2\rho y \end{cases}\right\}(4) \Leftrightarrow x^2=\rho(x+2\rho) \Leftrightarrow x^2-\rho x-2\rho^2=0$ ..... (5)

Η εξίσωση (5) είναι 2ου βαθμού ως προς x, έχει διακρίνουσα $\Delta=9\rho^2$ και $x=2\rho$ (σημείο Α) ή $x=-\rho$.

$(4) \overset{x=-\rho}{\Leftrightarrow} y=\frac{\rho}{2}$. Άρα $\Gamma\left(-\rho,\frac{\rho}{2}\right)$.

Ομοίως $B\left(\frac{\rho}{2},-\rho\right)$ (σχήμα 10).

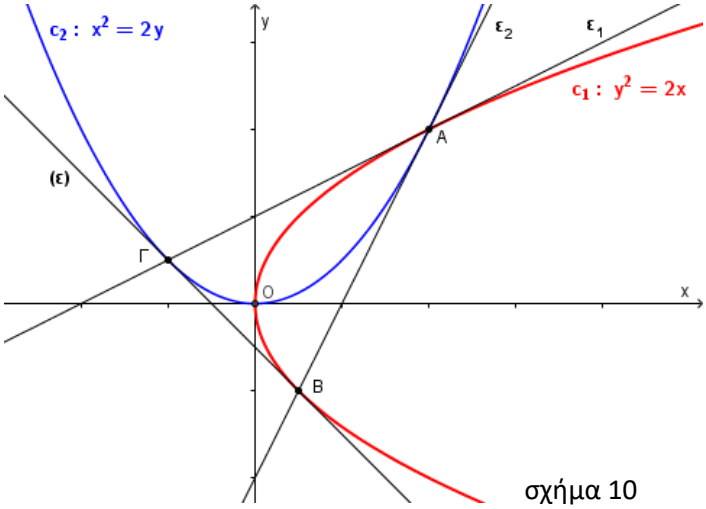
Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής (c_2) στο σημείο Γ έχει εξίσωση $xx_\Gamma=\rho(y+y_\Gamma)$

$\Leftrightarrow 2x+2y+\rho=0$

η οποία για $x=\frac{\rho}{2}$ δίνει $y=-\rho=y_B$.

Άρα η εφαπτομένη της (c_2) στο Γ διέρχεται από το Β.

Ομοίως εφαπτομένη της (c_1) στο Β διέρχεται από το Γ.



σχήμα 10

15) Από σημείο Α εκτός της παραβολής, φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΒ΄. Εάν Ε η εστία της, να δείξετε ότι $\frac{(AB)^2}{(AB')^2}=\frac{(EB)}{(EB')}$.

Λύση:

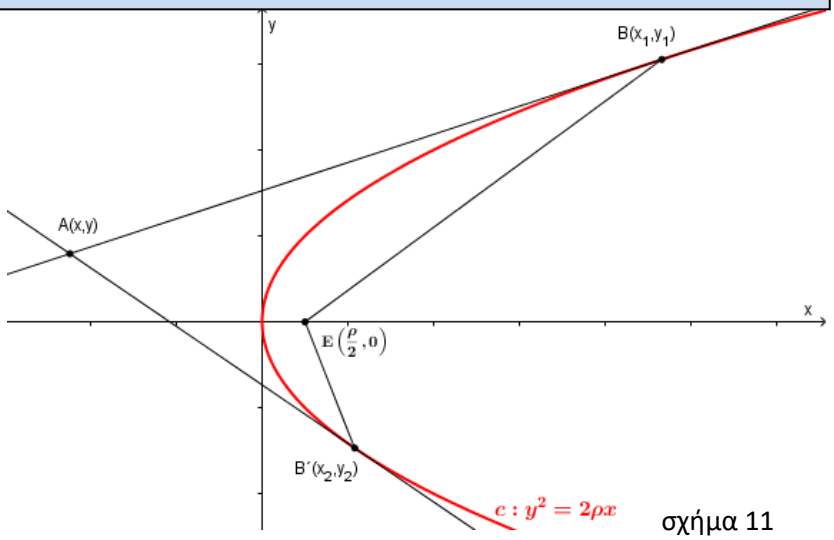
$$\frac{(EB)}{(EB')}=\frac{\sqrt{\left(x_1-\frac{\rho}{2}\right)^2+y_1^2}}{\sqrt{\left(x_2-\frac{\rho}{2}\right)^2+y_2^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(x_1-\frac{\rho}{2}\right)^2+2\rho x_1}{\left(x_2-\frac{\rho}{2}\right)^2+2\rho x_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x_1^2-\rho x_1+\frac{\rho^2}{4}+2\rho x_1}{x_2^2-\rho x_2+\frac{\rho^2}{4}+2\rho x_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x_1^2+\rho x_1+\frac{\rho^2}{4}}{x_2^2+\rho x_2+\frac{\rho^2}{4}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(x_1+\frac{\rho}{2}\right)^2}{\left(x_2+\frac{\rho}{2}\right)^2}}=\frac{\left|x_1+\frac{\rho}{2}\right|}{\left|x_2+\frac{\rho}{2}\right|}=\frac{|2x_1+\rho|}{|2x_2+\rho|}=\frac{2x_1+\rho}{2x_2+\rho} \text{ .....(1)}$$



σχήμα 11

γιατί ρ, x_1, x_2 ομόσημα (σχήμα 11).

$$\left.\begin{cases} yy_1 = \rho(x+x_1) \\ yy_2 = \rho(x+x_2) \end{cases}\right\}(2) \Leftrightarrow \left.\begin{cases} yy_1 = \rho x+\rho x_1 \\ yy_2 = \rho x+\rho x_2 \end{cases}\right\}(-)$$

$$\Rightarrow yy_1-yy_2=\rho(x_1-x_2)$$

$$\Rightarrow y(y_1-y_2)=\rho(x_1-x_2)$$
$$\Rightarrow 2y(y_1-y_2)=2\rho x_1-2\rho x_2$$
$$\Rightarrow 2y(y_1-y_2)=y_1^2-y_2^2$$
$$\Rightarrow 2y\cancel{(y_1-y_2)}=\cancel{(y_1-y_2)}(y_1+y_2)$$ ..... και αφού $y_1 \neq y_2$ (?)

$\Rightarrow 2y=y_2+y_1$.....(3)

Η σχέση (2) $\Leftrightarrow 2yy_1=2\rho x+2\rho x_1$

$\Leftrightarrow (y_1+y_2)y_1=2\rho x+y_1^2$

$\Leftrightarrow \cancel{y_1^2}+y_1y_2=2\rho x+\cancel{y_1^2}$

$\Leftrightarrow 2\rho x=y_1y_2$ .....(4)

$$\frac{(AB)^2}{(AB')^2}=\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$=\frac{(2\rho x-2\rho x_1)^2+\rho^2(2y-2y_1)^2}{(2\rho x-2\rho x_2)^2+\rho^2(2y-2y_2)^2}$$ .....πολ/ζω αριθμητή & παρονομαστή με $4\rho^2$.

$$=\frac{(y_1y_2-y_1^2)^2+\rho^2(y_2+y_1-2y_1)^2}{(y_1y_2-y_2^2)^2+\rho^2(y_2+y_1-2y_2)^2}$$ ..... λόγω των (3) και (4)

$$=\frac{y_1^2(y_2-y_1)^2+\rho^2(y_2-y_1)^2}{y_2^2(y_1-y_2)^2+\rho^2(y_1-y_2)^2}$$

$$=\frac{y_1^2(y_1-y_2)^2+\rho^2(y_1-y_2)^2}{y_2^2(y_1-y_2)^2+\rho^2(y_1-y_2)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(y_1-y_2)^2}(y_1^2+\rho^2)}{\cancel{(y_1-y_2)^2}(y_2^2+\rho^2)}$$

$$=\frac{y_1^2+\rho^2}{y_2^2+\rho^2}$$

$$=\frac{2\rho x_1+\rho^2}{2\rho x_2+\rho^2}$$

$$=\frac{2x_1+\rho}{2x_2+\rho}$$ .....(4)

Από (1) και (4) προκύπτει το ζητούμενο.

16) Έστω M(x,y) τυχαίο σημείο. Εάν θ η γωνία που σχηματίζει η OM με τον θετικό ημιάξονα Ox, να βρείτε τον γ.τ. των σημείων M, όταν το θ μεταβάλλεται, με $\theta \neq {}^{\kappa\pi}/_{2}$, $\kappa \in Z$, για τα οποία το πηλίκο $\frac{x}{2\sigma\phi^2\theta}$ είναι σταθερό.

Λύση: Έστω $\frac{x}{2\sigma\phi^2\theta}=\rho \Leftrightarrow x=2\rho\sigma\phi^2\theta$

$$\Leftrightarrow x=2\rho\left(\frac{x}{y}\right)^2$$

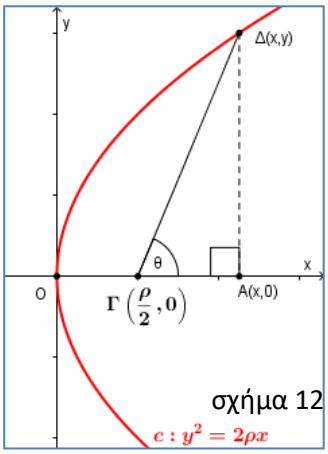
$$\Leftrightarrow x=\frac{2\rho x^2}{y^2}$$

$\Leftrightarrow y^2=2\rho x$.

Άρα ο γ.τ. είναι η παραβολή $y^2=2\rho x$ εκτός της κορυφής της.

17) Δίνεται η παραβολή $y^2=2\rho x$ και η εστία της Γ. Αν Δ τυχαίο σημείο της, να δείξετε ότι $\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|=\frac{\rho}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}$, όπου $\theta=\gamma\omega\nu\left(\overrightarrow{\Gamma\Delta},Ox\right)$.

Λύση: Έστω ρ>0. Τότε και x≥0.



σχήμα 12

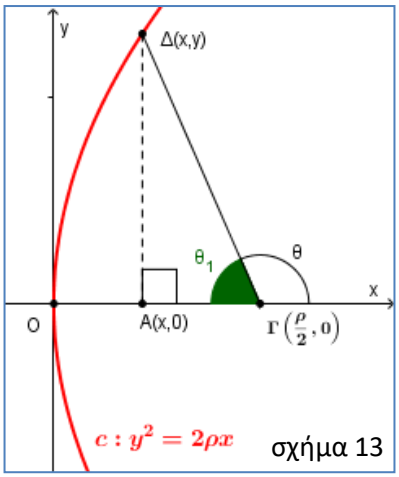
$$\left|\vec{\Gamma\Delta}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{\rho}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - \rho x + \frac{\rho^2}{4} + 2\rho x}$$

$$= \sqrt{x^2 + \rho x + \frac{\rho^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(x+\frac{\rho}{2}\right)^2} = \left|x+\frac{\rho}{2}\right| = x + \frac{\rho}{2} \quad \text{.....(1)}$$

☛ x>$\frac{\rho}{2}$. Τότε θ<90^0 (σχήμα 12) και συνθ>0. Άρα συνθ=$\frac{(\text{ΑΓ})}{(\Gamma\Delta)}$ που λόγω της (1) γίνεται:



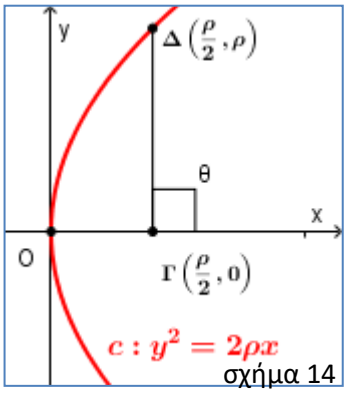
σχήμα 13

$$\text{συνθ}=\frac{x-\frac{\rho}{2}}{x+\frac{\rho}{2}} = \frac{2x-\rho}{2x+\rho} \quad \text{.....(2)}$$

$$\frac{\rho}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\rho}{1-\frac{2x-\rho}{2x+\rho}} = \frac{\rho(2x+\rho)}{(2x+\rho)-(2x-\rho)} = \frac{\rho(2x+\rho)}{2\rho} = x+\frac{\rho}{2} = \left|\vec{\Gamma\Delta}\right|.$$

☛ x<$\frac{\rho}{2}$. Τότε θ>90^0 (σχήμα 13) και συνθ<0. Άρα συνθ=-συνθ$_1$= =-$\frac{(\text{ΑΓ})}{(\Gamma\Delta)}$ που λόγω της (1) γίνεται:

$$\text{συνθ}=-\frac{\frac{\rho}{2}-x}{x+\frac{\rho}{2}} = \frac{2x-\rho}{2x+\rho} \quad \text{.....(3)}$$



σχήμα 14

$$\frac{\rho}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\rho}{1-\frac{2x-\rho}{2x+\rho}} = \frac{\rho(2x+\rho)}{(2x+\rho)-(2x-\rho)} = \frac{\rho(2x+\rho)}{2\rho} = x+\frac{\rho}{2} = \left|\vec{\Gamma\Delta}\right|.$$

☛ x=$\frac{\rho}{2}$. Τότε θ=90^0 (σχήμα 14) και συνθ=0.

Τότε $\frac{\rho}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\rho}{1-0}$ =ρ=$\left|\vec{\Gamma\Delta}\right|$.

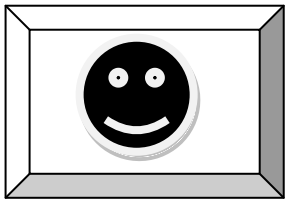
Ομοίως όταν ρ<0.

18) Πάνω στον άξονα y΄Oy δίνεται σταθερό σημείο Α(0,α) και στον άξονα x΄Ox μεταβλητό σημείο Η(t,0). Η κάθετη από το Ο στην ΑΗ τέμνει την ευθεία x=t στο Μ. Να βρεθεί ο γ.τ. του κέντρου βάρους Ν του τριγώνου ΟΗΜ.

Λύση: Έστω Μ(t,y_M) οι συν/νες του σημείου Μ.

$\vec{OM}$ = (t,y_M) και $\vec{AH}$ = (t,-α).

$\vec{OM} \perp \vec{AH} \Leftrightarrow$ t^2-αy_M=0 $\Leftrightarrow$ $y_M = \frac{t^2}{a}$. Άρα $M\left(t,\frac{t^2}{a}\right)$ (σχήμα 15).



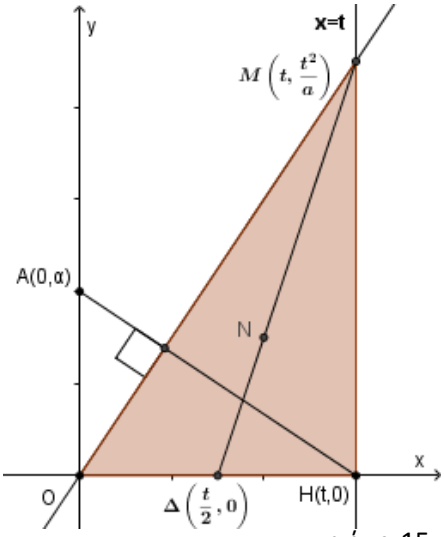
Εάν Ν(x,y) το βαρύκεντρο του τριγώνου ΟΗΜ, τότε:

$$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{M\Delta} \Leftrightarrow \left(x-t, y-\frac{t^2}{a}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{t}{2}, -\frac{t^2}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-t=-\dfrac{t}{3} \\ y-\dfrac{t^2}{a}=-\dfrac{2t^2}{3a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2t}{3} \\ y=\dfrac{t^2}{3a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{4}{9}t^2 \\ t^2=3ay \end{cases} \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{9}3ay \Leftrightarrow x^2=\frac{4a}{3}y$$

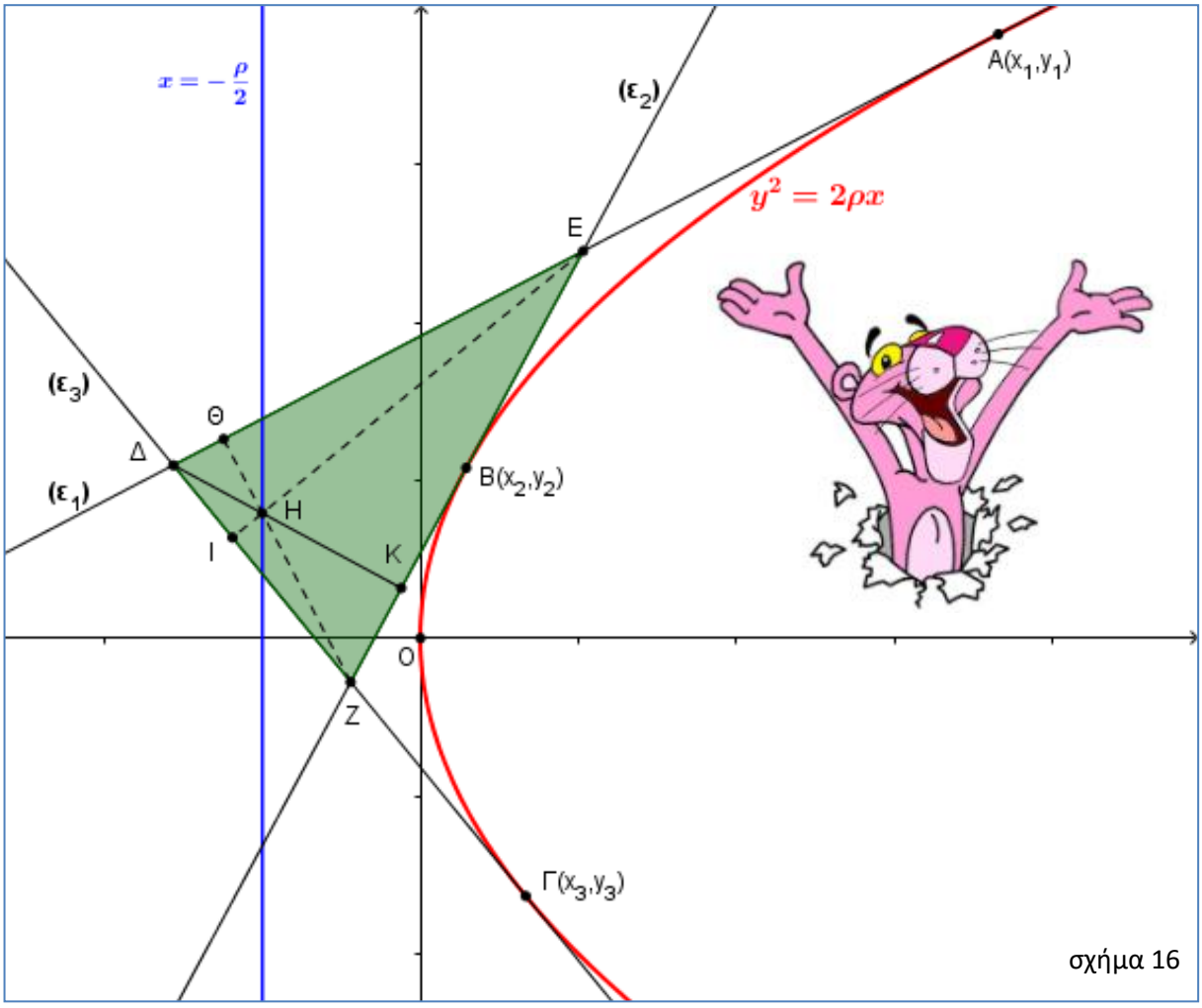


σχήμα 15

που είναι παραβολή με ρ=$\frac{2a}{3}$.

19) Να δείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τρείς εφαπτόμενες μιας παραβολής βρίσκεται στην διευθετούσα της.

Λύση: Από τις σχέσεις (3) και (4) της άσκησης 15, έχουμε $\Delta\left(\frac{y_1y_3}{2\rho},\frac{y_1+y_3}{2}\right)$(σχήμα 16).



σχήμα 16

Εάν το ύψος ΔΚ τέμνει την διευθετούσα στο σημείο $H\left(-\frac{\rho}{2},y\right)$, τότε $\overrightarrow{H\Delta}=\left(\frac{y_1y_3}{2\rho}+\frac{\rho}{2},\frac{y_1+y_3}{2}-y\right)$

Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία (ε$_2$): $yy_2=\rho(x+x_2) \Leftrightarrow \rho x-y_2y+\rho x_2=0$, είναι το $\vec{\alpha}=(y_2,\rho)$.

$\vec{\alpha}\perp\overrightarrow{H\Delta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{H\Delta}=0 \Leftrightarrow y_2\left(\frac{y_1y_3}{2\rho}+\frac{\rho}{2}\right)+\rho\left(\frac{y_1+y_3}{2}-y\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1y_2y_3}{2\rho}+\frac{\rho y_2}{2}+\rho\frac{y_1+y_3}{2}-\rho y=0$$

$$\Leftrightarrow \rho y=\frac{y_1y_2y_3}{2\rho}+\frac{\rho^2y_2}{2\rho}+\frac{\rho^2(y_1+y_3)}{2\rho}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{y_1y_2y_3+\rho^2(y_1+y_2+y_3)}{2\rho^2}.$$

Άρα $\mathrm{H}\left(-\frac{\rho}{2},\frac{y_1y_2y_3+\rho^2(y_1+y_2+y_3)}{2\rho^2}\right)$.

Ομοίως και τα άλλα ύψη ΕΙ και ΘΖ, τέμνουν την διευθετούσα στα σημεία $\left(-\frac{\rho}{2},\frac{y_2y_3y_1+\rho^2(y_2+y_3+y_1)}{2\rho^2}\right)$ και $\left(-\frac{\rho}{2},\frac{y_3y_1y_2+\rho^2(y_3+y_1+y_2)}{2\rho^2}\right)$ που προφανώς είναι το σημείο Η.

20) δζζωζ