ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΣΤΙΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ.

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x)=2(συν^4x-ημ^4x)+ημ^2x-3συν^2x+4$

είναι σταθερή και να βρείτε την f.

Απόδειξη:

$f΄(x)=8συν^3x(συνx)΄-8ημ^3x(ημx)΄+2ημx(ημx)΄-6συνx(συνx)΄$

$=-8συν^3xημx-8ημ^3xσυνx+\mathbf{2ημxσυνx}+\mathbf{6συνxημx}$

$=-8συνxημx(\overbrace{συν^2x+ημ^2x}^{1})+8συνxημx$

$=\cancel{-8συνxημx}+\cancel{8συνxημx}$

$=0.$

Άρα η f είναι σταθερή και επειδή $f(0)=2(συν^40-ημ^40)+ημ^20-3συν^20+4=...=3$, θα είναι $f(x)=3$ για κάθε $x\in R$.

2. Να υπολογίσετε το $λ\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=συν^6x+ημ^6x+λ(ημ^4x+συν^4x)$ να είναι σταθερή και να βρείτε την f.

Λύση:

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f΄(x)=0 \Leftrightarrow$

$6συν^5x(συνx)΄+6ημ^5x(ημx)΄+4λημ^3x(ημx)΄+4λσυν^3x(συνx)΄=0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{-6συν^5xημx+6ημ^5xσυνx+4λημ^3xσυνx-4λσυν^3xημx}=0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{6συνxημx(ημ^4x-συν^4x)+4λημxσυνx(ημ^2x-συν^2x)}=0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{6συνxημx(\overbrace{ημ^2x+συν^2x}^{1})(ημ^2x-συν^2x)+4λημxσυνx(ημ^2x-συν^2x)}=0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{6συνxημx(ημ^2x-συν^2x)+4λημxσυνx(ημ^2x-συν^2x)}=0 \Leftrightarrow$

$2συνxημx(ημ^2x-συν^2x)(3+2λ)=0$

η οποία για να ισχύει για κάθε $x\in R$ πρέπει $3+2λ=0 \Leftrightarrow λ=-^3/_2$.

$f(x)=f(0)=συν^60+ημ^60-^3/_2(ημ^40+συν^40)=...=-\frac{1}{2}$

3. Εάν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f΄(x)=g^2(x)$, $g΄(x)=f^2(x)$, για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^3(x)-g^3(x)$ είναι σταθερή.

Απόδειξη:

$[f^3(x)-g^3(x)]΄=3f^2(x)f΄(x)-3g^2(x)g΄(x)$

$=\cancel{3f^2(x)g^2(x)}-\cancel{3g^2(x)f^2(x)}$

$=0.$

Άρα $f^3(x)-g^3(x)=$σταθερή.

4. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f΄΄(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{3}{2}f^2(x)-\frac{3}{2}[f'(x)]^2$ είναι σταθερή.

Απόδειξη:

$$g΄(x)=\left(\frac{3}{2}f^2(x)-\frac{3}{2}[f'(x)]^2\right)'$$

$$=\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}f(x)f'(x)-\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2}f'(x)f''(x)$$

$$=3\cancel{f(x)f'(x)}-3\cancel{f'(x)f(x)}$$

$=0.$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

5. Να βρεθεί συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $xf΄(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R^*$ και $f(1)=2016$.

Λύση: $xf΄(x)=2f(x) \Leftrightarrow x^2f΄(x)=2xf(x)$

$\Leftrightarrow x^2f΄(x)-2xf(x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=0.$$

Άρα $\frac{f(x)}{x^2}=c \Leftrightarrow f(x)=cx^2$......................(1)

$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow} c=2016.$

Επομένως $f(x)=2016x^2$.

6. Αν $f΄(x)+e^x=2συν2x+\frac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$, να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=0$.

Λύση:

$f΄(x)+e^x=2συν2x+\frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$\left(f(x)+e^x\right)'=\left(ημ2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)+e^x=ημ2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c\text{.........(1)}$$

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} c=1.$

Άρα $f(x)=ημ2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+1-e^x$.

7. Έστω $f: R\to R$ με $f΄(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την f(x) αν $f(0)=1$.

Λύση: $f΄(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow e^xf΄(x)+e^xf(x)=0$

$\Leftrightarrow (e^xf(x))΄=0.$

Άρα $e^xf(x)=c$......................................(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} c=1.$

Επομένως $e^xf(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}$.

8. Να προσδιοριστεί συνάρτηση f τέτοια ώστε $f΄(x)=e^x(ημx-συνx)$ για κάθε $x\in R$ και $f(π/2)=1$.

Λύση:

$f΄(x)=e^x(ημx-συνx) \Leftrightarrow f΄(x)=e^xημx-e^xσυνx$

$\Leftrightarrow f΄(x)=-e^x(συνx)’-(e^x)΄συνx$

$\Leftrightarrow f΄(x)=(-e^xσυνx)΄.$

Άρα $f(x)=-e^xσυνx+c$.............................(1)

$(1)\overset{x=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} c=1$

Επομένως $f(x)=1-e^xσυνx$.

9. Να βρείτε την συνάρτηση f: R→R με f(R)=R_+^*, $\frac{f'(x)}{f(x)}=1+e^x$ για κάθε x∈R και f(ln3)=3.

Λύση: $\frac{f'(x)}{f(x)}=1+e^x \Leftrightarrow$ (lnf(x))΄=(x+e^x)΄.

Άρα lnf(x)=x+e^x+c..............................(1)

$(1)\overset{x=\ln 3}{\Longrightarrow}$ lnf(ln3)=ln3+$e^{\ln 3}$+c

$\Leftrightarrow$ ln3=ln3+3+c

$\Leftrightarrow$ c=-3.

Επομένως lnf(x)=x+e^x-3

$\Leftrightarrow$ f(x)=e^{x+e^x-3}.

10. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν f΄΄(x)=1 για κάθε x∈R, f(0)=1 και f(1)=0.

Λύση: f΄΄(x)=1 $\Leftrightarrow$ f΄(x)=x+c_1

$\Leftrightarrow$ f(x)=$\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2$.........(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $c_2=1$

$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}$ $c_1=-\frac{3}{2}$

Άρα f(x)=$\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$.

11. Να βρείτε συνάρτηση f με

i. f΄΄(x)=e^x+2x για κάθε x∈R και

ii. η γραφική παράσταση αυτής τέμνει τον άξονα xx΄ στα σημεία με τετμημένες $x_o=1$ και $x_1=0$.

Λύση: f΄΄(x)=e^x+2x $\Leftrightarrow$ f΄(x)=e^x+x^2+c1

$\Leftrightarrow$ f(x)=$e^x+\frac{1}{3}x^3+c_1x+c_2$.(1)

f(0)=0 $\Leftrightarrow$ $c_2=-1$

f(1)=0 $\Leftrightarrow$ e+$\frac{1}{3}$+c_1-1=0

$\Leftrightarrow$ $c_1=\frac{2}{3}-e$

Άρα f(x)=$e^x+\frac{1}{3}x^3+\left(\frac{2}{3}-e\right)x-1$.

12. Η συνάρτηση f: (-π/2,π/2)→R είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με f΄(0)=0 και f΄΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈(-π/2, π/2). Να δείξετε ότι f(x)=κσυνx, κ σταθερά.

Λύση:

1ος τρόπος: Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$=κ.

$$\left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ ....(1)$$

Έστω g(x)=f΄(x)συνx+f(x)ημx.

g΄(x)=f΄΄(x)συνx-f΄(x)ημx+f΄(x)ημx+f(x)συνx

=-f(x)συνx+f(x)συνx

=0

Άρα g(x)=σταθερή

f΄΄(x)+f(x)=0 $\Leftrightarrow$ f΄΄(x)=-f(x)

g(x)=g(0)

=$\cancelto{0}{f'(0)}$συν0+f(0)$\cancelto{0}{\eta\mu 0}$

=0.

$$(1)\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=0$$

Προσθαφαιρούμε f΄(x)ημx

Άρα $\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$=κ, κ=σταθερά

$\Leftrightarrow$ f(x)=κσυνx.

2ος τρόπος: f΄΄(x)+f(x)=0.....(πολ/ζουμε με συνx)

$\Leftrightarrow$ f΄΄(x)συνx+f(x)συνx=0

$\Leftrightarrow$ f΄΄(x)συνx-f΄(x)ημx+f΄(x)ημx+f(x)συνx=0

$\Leftrightarrow$ (f΄(x)συνx)΄+(f(x)ημx)΄=0

$\Leftrightarrow$ (f΄(x)συνx)΄=(-f(x)ημx)΄

Άρα f΄(x)συνx=-f(x)ημx+c.....................(2)

$(2)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $\cancelto{0}{f'(0)}$συν0=-f(0)$\cancelto{0}{\eta\mu 0}$+c $\Leftrightarrow$ c=0

Επομένως f΄(x)συνx=-f(x)ημx

$\Leftrightarrow$ f΄(x)συνx+f(x)ημx=0

$\Leftrightarrow$ f΄(x)συνx-f(x)(συνx)΄=0

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=0.$$

Άρα $\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$=κ $\Leftrightarrow$ f(x)=κσυνx.

13. Δίνεται η συνάρτηση f:(0,+∞)→R με f΄(x)=2xf(x) για κάθε x∈(0,+∞).

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)·e^{-x^2} είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f, αν f(1)=-1.

Λύση:

i. $g'(x)=f'(x)\cdot e^{-x^2}+f(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$

$=f'(x)\cdot e^{-x^2}-2xf(x)\cdot e^{-x^2}$

$=\cancel{2xf(x)}\cdot e^{-x^2}-\cancel{2xf(x)}\cdot e^{-x^2}$ =0.

Άρα g σταθερή.

ii. Από το (i) ερώτημα g(x)=c

$\Leftrightarrow$ f(x)·e^{-x^2}=c

$\Leftrightarrow$ f(x)=ce^{x^2}.................(1)

$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}$ c=e^{-1}.

Άρα f(x)=e^{x^2-1}.

14. Δίνεται f: R*→R με $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}$ για κάθε x≠0. Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(\ln 2)=-\frac{2}{3}$.

Λύση: $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(e^{-x}-e^x\right)=f(x)\left(e^{-x}+e^x\right)$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(e^{-x}-e^x\right)-f(x)\left(e^{-x}+e^x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\ f'(x)\left(e^{-x}-e^{x}\right)+f(x)\left(e^{-x}-e^{x}\right)'=0$$
$$\Leftrightarrow\ \left[f(x)\left(e^{-x}-e^{x}\right)\right]'=0$$
$$\Leftrightarrow\ f(x)\left(e^{-x}-e^{x}\right)=c$$
$$\Leftrightarrow\ f(x)=\frac{c}{e^{-x}-e^{x}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$(1)\overset{x=\ln 2}{\Rightarrow}\ f(\ln 2)=\frac{c}{e^{-\ln 2}-e^{\ln 2}}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}=\frac{c}{\frac{1}{e^{\ln 2}}-e^{\ln 2}}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}=\frac{c}{\frac{1}{2}-2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}=\frac{c}{-\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow c=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=1.$$

Άρα $f(x)=\dfrac{1}{e^{-x}-e^{x}}$.

15. Δίνεται f:R→R με $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$ για κάθε x≠0. Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(\ln 2)=2$.

Λύση: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$

$$\Leftrightarrow (\ln f(x))'=1+\frac{1}{e^{2x}}$$
$$\Leftrightarrow (\ln f(x))'=1+e^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow (\ln f(x))'=\left(x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'$$
$$\Leftrightarrow \ln f(x)=x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$(1)\overset{x=\ln 2}{\Rightarrow}\ \ln f(\ln 2)=\ln 2-\frac{1}{2}e^{-2\ln 2}+c$$
$$\Leftrightarrow \ln 2=\ln 2-\frac{1}{2\left(e^{\ln 2}\right)^2}+c$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\ln 2}=\cancel{\ln 2}-\frac{1}{2\left(e^{\ln 2}\right)^2}+c$$
$$\Leftrightarrow c=\frac{1}{2\cdot 2^2}=\frac{1}{8}.$$
$$(1)\Rightarrow \ln f(x)=x-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=e^{x-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{8}}.$$

16. Δίνεται f:R→R με f΄΄(x)≥0 για κάθε x∈R και f΄(-1)=f΄(1)=0. Να δείξετε ότι f(-1/2)=f(1/2).

Λύση: f΄΄(x)≥0 για κάθε x∈R.

Άρα f΄↗ στο R. Επομένως στο διάστημα [-1,1] έχουμε:

-1≤x≤1 ⇔ f΄(-1)≤ f΄(x)≤ f΄(1)
⇔ 0≤ f΄(x)≤0
⇔ f΄(x)=0.

Επομένως η f είναι σταθερή στο [-1,1] και συνεπώς f(-1/2)=f(1/2).

17. Έστω f,g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο R, τέτοιες ώστε f(0)=g(0) και f΄΄(x)=g΄΄(x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι:

i. υπάρχει c∈R τέτοιο ώστε f(x)-g(x)=cx για κάθε x∈R,

ii. αν ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<0<\rho_2$ ρίζες της g(x) τότε η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$.

Λύση:

i. f΄΄(x)=g΄΄(x) ⇔ f΄(x)=g΄(x)+c
⇔ f(x)=g(x)+cx+c_1…………(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $c_1=0$ οπότε η (1) γίνεται f(x)-g(x)=cx.

ii. Εφαρμόζουμε το θ. **Bolzano** για την f στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

- f συνεχής γιατί είναι παραγωγίσιμη,
- $f(\rho_1)=g(\rho_1)-c\rho_1=-c\rho_1$, $f(\rho_2)=g(\rho_2)-c\rho_2=-c\rho_2$ ⇨ γιατί ρ_1,ρ_2 ρίζες της g(x)=0

⇒ $f(\rho_1)f(\rho_2)=c^2\rho_1\rho_2\le 0$….γιατί $\rho_1<0<\rho_2$.

☞ $f(\rho_1)f(\rho_2)=0$ ⇔ $f(\rho_1)=0$ ή $f(\rho_2)=0$………(2)

☞ $f(\rho_1)f(\rho_2)<0$. Τότε από θ. Bolzano η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2)……………………………………….(3)

Από (2) και (3) προκύπτει ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$.

18. Εάν f΄΄΄(x)=0 για κάθε x∈R, να βρείτε τον τύπο της f εάν f(1)=0, f(3)=2 και f(-1)=6.

Λύση: f΄΄΄(x)=0 ⇔ f΄΄(x)=c_1
⇔ f΄(x)=c_1x+c_2
⇔ f(x)=$\frac{1}{2}c_1x^2+c_2x+c_3$……(1)

$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}$ 0=$\frac{1}{2}c_1+c_2+c_3$ ……………………….(2)

$(1)\overset{x=-1}{\Rightarrow}$ 6=$\frac{1}{2}c_1-c_2+c_3$ ……………………….(3)

$(1)\overset{x=3}{\Rightarrow}$ 2=$\frac{9}{2}c_1+3c_2+c_3$ ……………………….(4)

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) και (4) βρίσκουμε $c_1=2$, $c_2=-3$ και $c_3=2$.

Άρα f(x)=x^2-3x+2.

19. Εάν f΄΄΄(x)=0 για κάθε x∈R, να βρείτε την f εάν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή O(0,0), και η εφαπτομένη στο σημείο της M(1,2) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των x γωνία π/4.

Λύση: $f'''(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)=c_1$
$\Leftrightarrow f'(x)=c_1x+c_2$
$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2x+c_3$……(1)

$f(0)=0 \Leftrightarrow c_3=0$
$f(1)=2 \Leftrightarrow 2=\frac{1}{2}c_1+c_2$ …………………………(2)
$f'(1)=\varepsilon\varphi^{\pi}/_4=1 \Leftrightarrow 1=c_1+c_2$……………………(3)
Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε $c_2=3$ και $c_1=-2$.
Άρα $f(x)=-x^2+3x$.

20. (ΕΜΕ) Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(x)>0 για κάθε x∈R, της οποίας η γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο της M(x,f(x)) έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε x∈R και ισχύει f(1)=9.

Λύση: $f'(x)=4x\sqrt{f(x)}$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)'=\left(x^2\right)'$$
$\Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=x^2+c$……………………….(1)
$\Leftrightarrow f(x)=(x^2+c)^2$.
Για x=1 βρίσκουμε c=-4 ή c=2.
Αν c=-4, τότε η $(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}\sqrt{f(0)}=-4$ άτοπο.
Άρα c=2 και $f(x)=(x^2+2)^2$.

21. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και την $F(x)=f^2(x)+(f'(x))^2$, για κάθε x∈R. Εάν $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε x∈R, να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση. Ποιος είναι ο τύπος της f εάν $f(0)=f'(0)=0$;
Λύση: $F'(x)=[f^2(x)+(f'(x))^2]'$
$=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$
$=2f(x)f'(x)-2f'(x)f(x)$
$=0$.
Άρα F σταθερή.
$F(x)=F(0)=f^2(0)+(f'(0))^2=0 \Rightarrow$
$f^2(x)+(f'(x))^2=0 \Rightarrow$
$f(x)=f'(x)=0$.

γιατί $f''(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)=-f(x)$

22. (ΕΜΕ) Έστω f, g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο R, τέτοιες ώστε $f''(x)g(x)=f(x)g''(x)$ για κάθε x∈R, $f'(0)g(0)=f(0)g'(0)$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι υπάρχει λ∈R τέτοιος ώστε $f(x)=\lambda g(x)$ για κάθε x∈R.

Λύση:
Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ ή $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad\text{………….(1)}$$

Θέτω $h(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$.
$h'(x)=f''(x)g(x)+\cancel{f'(x)g'(x)}-\cancel{f'(x)g'(x)}-f(x)g''(x)$
$=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$
$=0$.
Άρα h=σταθερή.
$h(x)=h(0)=f'(0)g(0)-f(0)g'(0)=0$.
Άρα $(1)\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$.

23. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f'(x)<x$ για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι $f(4)-f(2)<6$.

Λύση: $f'(x)<x \Leftrightarrow f'(x)<\left(\frac{x^2}{2}\right)'$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-\frac{x^2}{2}\right)'<0.$$

Άρα η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

$2<4 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(2)>g(4)$
$$\Leftrightarrow f(2)-\frac{2^2}{2}>f(4)-\frac{4^2}{2}$$
$\Leftrightarrow f(4)-f(2)<6$.

24. Έστω $f: R\to R$ με $f'(x)=3f(x)$ για κάθε x∈R.
a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{e^{3x}}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f,
b) Εάν f(x) είναι η λύση του (α) ερωτήματος, για την οποία f(0)=3, να λυθεί στο R η εξίσωση $f^2(x)-4f(x)-5=0$.

Λύση:
a)
$$\left(\frac{f(x)}{e^{3x}}\right)'=\frac{f'(x)e^{3x}-3f(x)e^{3x}}{\left(e^{3x}\right)^2}=\frac{3f(x)e^{3x}-3f(x)e^{3x}}{\left(e^{3x}\right)^2}=0.$$

Άρα $\frac{f(x)}{e^{3x}}$=σταθερή.

b) Από (a) ερώτημα $\frac{f(x)}{e^{3x}}=c \Leftrightarrow f(x)=ce^{3x}$.
$f(0)=3 \Leftrightarrow c=3$
και συνεπώς $f(x)=3e^{3x}$.
$f^2(x)-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow … \Leftrightarrow f(x)=-1$ ή $f(x)=5$.
Η $f(x)=-1$ είναι αδύνατη γιατί $f(x)=3e^{3x}>0$
Άρα $f(x)=5 \Leftrightarrow 3e^{3x}=5$
$\Leftrightarrow e^{3x}=5/3$
$\Leftrightarrow 3x=\ln 5/3$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\ln 5/3$.

25. Να βρείτε τον τύπο της η συνάρτησης f:(1,+∞)→R με $\frac{f(x)}{f'(x)}+x\ln x=0$ για κάθε x>1 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο της M(e,f(e)) είναι κάθετη στην ευθεία (ε): x-y=2016.

Λύση: $\frac{f(x)}{f'(x)}+x\ln x=0$

$\Leftrightarrow f(x)+f'(x)x\ln x=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}f(x)+f'(x)\ln x=0$

$\Leftrightarrow (\ln x)'f(x)+f'(x)\ln x=0$

$\Leftrightarrow \left(f(x)\ln x\right)'=0$

⇔ f(x)lnx=c

$f(x)=\frac{c}{\ln x}$ ....(1)

$\lambda_\varepsilon=1 \Leftrightarrow f'(e)=-1$....(?)

$f'(x)=-\frac{c}{x\ln^2 x}\overset{x=e}{\Leftrightarrow}-1=-\frac{c}{e}\Leftrightarrow c=e.$

Άρα $f(x)=\frac{e}{\ln x}$.

26. Δίνεται η συνάρτηση g:(-π/2,π/2)→R με g΄(x)συνx+g(x)ημx=g(x)συνx για κάθε x∈(-π/2,π/2).

i. Να δείξετε ότι $\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$ για κάθε x∈(-π/2,π/2).

ii. Να βρείτε τον τύπο της g, αν g(0)=2016.

Λύση:

i. g΄(x)συνx+g(x)ημx=g(x)συνx

⇔ g΄(x)συνx-g(x)(συνx)΄=g(x)συνx

$\Leftrightarrow \frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x-g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

ii. $\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=ce^x$

$\Leftrightarrow g(x)=ce^x\sigma\upsilon\nu x$ ....(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ c=2016

Άρα $g(x)=2016e^x\sigma\upsilon\nu x$.

27. Δίνεται f: R→R με $\left(f(x)-e^x\right)\cdot\left(f'(x)-e^x\right)=0$ για κάθε x∈R και f(0)=2.

i. Να δείξετε ότι $\left(f(x)-e^x\right)^2=1$.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)-e^x διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση:

i. Θέτω $g(x)=f(x)-e^x$.

Τότε η δοθείσα σχέση γράφεται

g(x)·g΄(x)=0 ⇔ 2g(x)·g΄(x)=0

$\Leftrightarrow \left(g^2(x)\right)'=0$

⇔ $g^2(x)$=c.......................(1)

$\Leftrightarrow \left(f(x)-e^x\right)^2=c$...............(2)

$(2)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ c=1.

Άρα $\left(f(x)-e^x\right)^2=1$.

ii. Αν η g δεν διατηρούσε σταθερό πρόσημο στο R, τότε επειδή είναι συνεχής, θα έπαιρνε και την τιμή 0, δηλαδή υπάρχει ξ∈R τέτοιο ώστε g(ξ)=0, άτοπο γιατί g(ξ)=1 ή g(ξ)=-1 λόγω της (1).

iii. Από το (ii) ερώτημα, θα είναι g(x)=1 για κάθε x∈R, ή g(x)=-1 για κάθε x∈R.

Επειδή g(0)=f(0)-e^0=2-1=1>0, θα είναι g(x)=1 για κάθε x∈R.

Άρα $f(x)-e^x=1$

$\Leftrightarrow f(x)=1+e^x$.

28. Δίνεται η συνάρτηση f:[0,+∞)→R με f(1)=e και x(f΄(x)-f(x))=f(x) για κάθε x≥0.

i. Να υπολογίσετε το f(0).

ii. Να δείξετε ότι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση:

i. Η δοθείσα για x=0 δίνει f(0)=0.

ii. για x≠0 έχουμε:

xf΄(x)-xf(x)=f(x) ⇔ xf΄(x)-f(x)=xf(x)

⇔ xf΄(x)-(x)΄f(x)=xf(x)

$\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-(x)'f(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}$.

iii. $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=ce^x$

⇔ f(x)=cxe^x...............(1)

$(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}$ c=1 και επομένως f(x)=xe^x.

Άρα $f(x)=\begin{cases}xe^x, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}=xe^x$.

29. Δίνεται η συνάρτηση f:R→R με f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y∈R.

i. Να δείξετε ότι f(0)=0.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

iii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0, με f΄(0)=2, τότε:

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f΄(x)=2 για κάθε x∈R.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση:

i. Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x=y=0$ δίνει $f(0)+f(0)=f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$

ii. Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $y=-x$ δίνει
$f(x-x)=f(x)+f(-x) \Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)$
$\Leftrightarrow 0=f(x)+f(-x)$
$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

iii. **α)** $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{f(x)}+f(h)-\cancel{f(x)}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-0}{h-0}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}$

$=f'(0)=2$.

β) $f'(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=2x+c$.
$f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$
Άρα $f(x)=2x$.

30. Δίνεται $f:R\to R$ με $f'(x+y)=\dfrac{1}{2}f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Η ευθεία (ε): $y=2x+2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της $M(0,f(0))$.
i. Να βρείτε το $f(0)$.
ii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση:

i. Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την ευθεία (ε). Άρα $y=2x+2 \overset{x=0}{\Rightarrow} y=2 \Rightarrow f(0)=2$.

ii. Η σχέση $f'(x+y)=\dfrac{1}{2}f(x)\cdot f(y)$ για $y=0$ δίνει

$f'(x)=\dfrac{1}{2}f(x)\cdot f(0)$ και επειδή $f(0)=2 \Rightarrow$
$f'(x)=f(x)$.
Άρα $f(x)=ce^x$.
$f(0)=2 \Leftrightarrow c=2$
Επομένως $f(x)=2e^x$.

31. Έστω $f: R\to R$ με $f(x)\cdot f'(-x)=1$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι:
i. $f(-x)\cdot f'(x)=1$ για κάθε $x\in R$.
ii. $f(x)\cdot f(-x)=1$ για κάθε $x\in R$.
iii. $f(x)=e^x$ για κάθε $x\in R$.

Λύση:

i. Στην σχέση $f(x)\cdot f'(-x)=1$……………………(1)
θέτουμε όπου x το –x και βρίσκουμε
$f(-x)\cdot f'(x)=1$…………………………………(2)

ii. Από (1) και (2) έχουμε
$f(x)\cdot f'(-x)=f(-x)\cdot f'(x) \Leftrightarrow$
$f(-x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot f'(-x)=0 \Leftrightarrow$
$f'(x)\cdot f(-x)+f(x)\cdot\big(f(-x)\big)'=0 \Leftrightarrow$
$\big(f(x)\cdot f(-x)\big)'=0 \Leftrightarrow$
$f(x)\cdot f(-x)=c$……………………………………(3)

$(3)\overset{x=0}{\Rightarrow} \cancelto{1}{f(0)}\cdot\cancelto{1}{f(0)}=c \Leftrightarrow c=1$.
Άρα $(3) \Rightarrow f(x)\cdot f(-x)=1$……………………(4)

iii. $\dfrac{(2)}{(4)} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\cancel{f(-x)}}{f(x)\cancel{f(-x)}}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$

$\Leftrightarrow f(x)=ce^x$………………………………(5)

$(5)\overset{x=0}{\Rightarrow} c=1$.
Άρα $f(x)=e^x$.

32. Έστω f συνεχής στο R και ισχύει $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την f εάν $f(3)=7$.

Λύση: Για $x\neq 2$ έχουμε:

$f'(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2} \Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow$

2	-5	2	2
↓	4	-2	
2	-1	0	

$f'(x)=2x-1 \Leftrightarrow$

$f(x)=\begin{cases} x^2-x+c_1, & x<2 \\ x^2-x+c_2, & x>2 \end{cases}$……………………(1)

$f(3)=7 \Leftrightarrow 6+c_2=7 \Leftrightarrow c_2=1$.
Επειδή είναι παραγωγίσιμη στο R, θα είναι και συνεχής, άρα και στο x=2.Επομένως:
$\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x+c_1)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x+1) \Leftrightarrow c_1=1$.
και $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+1)=3$

$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x<2 \\ 3, & x=2 \\ x^2-x+1, & x>2 \end{cases}$ ή

$f(x)=x^2-x+1$, $x\in R$.

33. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R\to R$, με $f(x)\neq 1$ για κάθε $x\in R$ και $f'(x)=f(x)\big(1-f(x)\big)$ για κάθε $x\in R$ (1).
i. Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{f(x)}{1-f(x)}\right)'=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}$.
ii. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, εάν $f(0)=\frac{1}{2}$.

Λύση:

i. $\left(\dfrac{f(x)}{1-f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\big(1-f(x)\big)+f(x)f'(x)}{(1-f(x))^2}=$

$=\dfrac{f'(x)}{(1-f(x))^2}=$

$\overset{(1)}{=}\dfrac{f(x)\cancel{(1-f(x))}}{(1-f(x))^{\cancel{2}}}=$

$=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}$.

ii. Από το (i) ερώτημα έχουμε
$\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=ce^x$………………………………………(2)
Η σχέση (2) για x=0 δίνει c=1.
Άρα έχουμε $\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=e^x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

34. (Θέμα 4ον α ερώτημα 2005) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε x∈R και f(0)=0. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Λύση: $2f'(x)=e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)=\dfrac{e^x}{e^{f(x)}}$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=\dfrac{e^x}{2}$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(\dfrac{e^x}{2}\right)'$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^x}{2}+c$ ....(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ c=$\dfrac{1}{2}$.

Άρα (1) $\Rightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^x+1}{2}$

$\Rightarrow f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)$.

35. (Θέμα Δ 2010) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(0)=3, f(x)≠x και $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$ για κάθε x∈R.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, x∈R, είναι σταθερή. Μονάδες 6

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, x∈R.

Μονάδες 7

Λύση:

i. g΄(x)=**2f(x)f΄(x)**-2f(x)-**2xf΄(x)**

=**2f΄(x)(f(x)-x)**-2f(x)

$=2\dfrac{f(x)}{\cancel{f(x)-x}}\cancel{(f(x)-x)}-2f(x)$

$=\cancel{2f(x)-2f(x)}=0$.

Άρα g σταθερή.

ii. g(x)=c ⇔ $(f(x))^2-2xf(x)=c$..................(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ c=9

Άρα (1) ⇔ $(f(x))^2-2xf(x)=9$

⇔ $(f(x))^2-2xf(x)+x^2=x^2+9$

⇔ $(f(x)-x)^2=x^2+9$..................(2)

Επειδή η συνάρτηση h(x)=f(x)-x είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής και επειδή δεν μηδενίζεται (γιατί f(x)≠x), διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή h(0)=f(0)-0 =3>0, θα είναι h(x)>0 ⇔ f(x)-x>0 οπότε η (2) δίνει $f(x)-x=\sqrt{x^2+9}$

$\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$.

36. (Θέμα Γ 2013) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g:R→R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- (f(x)+x)(f΄(x)+1)=x για κάθε x∈R
- f(0)=1 και
- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, x∈R

Μονάδες 9

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(g(x))=1 Μονάδες 8

Λύση:

i. (f(x)+x)(f΄(x)+1)=x ⇔ (f(x)+x)(f(x)+x)΄=x

⇔ 2(f(x)+x)(f(x)+x)΄=2x

⇔ $[(f(x)+x)^2]'=(x^2)'$

⇔ $(f(x)+x)^2=x^2+c$..............................(1)

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}$ c=1

Άρα (1) ⇒ $(f(x)+x)^2=x^2+1$..................(2)

Επειδή $x^2+1\neq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow}$ f(x)+x≠0, και η συνάρτηση h(x)=f(x)+x δεν μηδενίζεται και επειδή είναι και συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού h(0)=f(0)+0=1>0 θα είναι h(x)>0 ⇔ f(x)-x>0 και η (2) δίνει $f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

ii. Επειδή $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$

$=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα άρα «1-1».

f(g(x))=1 ⇔ f(g(x))=f(0)

$\overset{f\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$ g(x)=0

$\Leftrightarrow x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1=0$

⇔ $2x^3+3x^2-2=0$..................(3)

Θέτω $h(x)=2x^3+3x^2-2$.

$h΄(x)=6x^2+6x$.

- h΄(x)=0 ⇔ $6x^2+6x=0$

⇔ x=-1 ή x=0.

x	$-\infty$		**-1**		**0**		$+\infty$
h΄(x)		+	0	-	0	+	
h(x)		↗		↘		↗	

Άρα h ↗ στο $A_1=(-\infty,-1]$, ↘ στο $A_2=[-1,0]$

και ↗ στο $A_3=[0,+\infty)$.

Επειδή h συνεχής ως πολυωνυμική, έχουμε:

☛ $h(A_1)\overset{h\uparrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\, f(-1)\right]$

$=(-\infty,-1]$.

Επειδή $0\notin(-\infty,-1]$, η εξίσωση h(x)=0 δεν έχει ρίζα στο A_1.

☛ $h(A_2) \overset{h\downarrow}{=} [f(0), f(1)]$
$= [-2,-1]$.

Επειδή $0 \notin [-2,-1]$, η εξίσωση h(x)=0 δεν έχει ρίζα στο A_2.

☛ $h(A_3) \overset{h\uparrow}{=} \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$
$= [-2,+\infty)$.

Επειδή $0 \in [-2,+\infty)$, η εξίσωση h(x)=0
$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0$
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

37. (Θέμα Δ1 2015) Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- f(0)=0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Μονάδες 5

....

Λύση:

Δ1: $f'(x)\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)=2$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$ ....(1)

$(1) \overset{x=0}{\Leftrightarrow} e^{f(0)}-e^{-f(0)}=c$

$\Leftrightarrow e^0-e^0=c$

$\Leftrightarrow$ 1-1=c

$\Leftrightarrow$ c=0.

Άρα η (1) $\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}-\dfrac{1}{e^{f(x)}}=2x$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}=1$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=1+x^2$

$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=1+x^2$ ....(2)

Επειδή $x^2+1\neq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} e^{f(x)}-x\neq 0$, και η συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}-x$ δεν μηδενίζεται και επειδή είναι και συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού $h(0)=e^{f(0)}=$ $=e^0=1>0$ θα είναι $h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0$ και η (2) δίνει $e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2}$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2}$.

$\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

38. END