

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΣΤΙΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ.

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=2(\sin^4x-\eta\mu^4x)+\eta\mu^2x-3\sin^2x+4$ είναι σταθερή και να βρείτε την f.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8\sin^3x(\sin x)' - 8\eta\mu^3x(\eta\mu x)' + 2\eta\mu x(\eta\mu x)' - 6\sin x(\sin x)' \\ &= -8\sin^3x\eta\mu x - 8\eta\mu^3x\sin x + 2\eta\mu x\sin x + 6\sin x\eta\mu x \\ &= -8\sin x\eta\mu x(\sin^2x + \eta\mu^2x) + 8\sin x\eta\mu x \\ &= -8\sin x\eta\mu x + 8\sin x\eta\mu x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι σταθερή και επειδή $f(0)=2(\sin^4 0 - \eta\mu^4 0) + \eta\mu^2 0 - 3\sin^2 0 + 4 = \dots = 3$, θα είναι $f(x)=3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sin^6x + \eta\mu^6x + \lambda(\eta\mu^4x + \sin^4x)$ να είναι σταθερή και να βρείτε την f.

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση } f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 6\sin^5x(\sin x)' + 6\eta\mu^5x(\eta\mu x)' + 4\lambda\eta\mu^3x(\eta\mu x)' + 4\lambda\sin^3x(\sin x)' = 0 \Leftrightarrow \\ &-6\sin^5x\eta\mu x + 6\eta\mu^5x\sin x + 4\lambda\eta\mu^3x\sin x - 4\lambda\sin^3x\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \\ &6\sin x\eta\mu x(\eta\mu^4x - \sin^4x) + 4\lambda\eta\mu x\sin x(\eta\mu^2x - \sin^2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &6\sin x\eta\mu x(\eta\mu^2x + \sin^2x)(\eta\mu^2x - \sin^2x) + 4\lambda\eta\mu x\sin x(\eta\mu^2x - \sin^2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &6\sin x\eta\mu x(\eta\mu^2x - \sin^2x) + 4\lambda\eta\mu x\sin x(\eta\mu^2x - \sin^2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &2\sin x\eta\mu x(\eta\mu^2x - \sin^2x)(3 + 2\lambda) = 0 \end{aligned}$$

η οποία για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $3 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3/2$.

$$f(x) = f(0) = \sin^6 0 + \eta\mu^6 0 - 3/2(\eta\mu^4 0 + \sin^4 0) = \dots = -\frac{1}{2}$$

3. Εάν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f'(x)=g^2(x)$, $g'(x)=f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^3(x)-g^3(x)$ είναι σταθερή.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} [f^3(x)-g^3(x)]' &= 3f^2(x)f'(x) - 3g^2(x)g'(x) \\ &= 3f^2(x)g^2(x) - 3g^2(x)f^2(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα $f^3(x)-g^3(x)$ = σταθερή.

4. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{3}{2}f^2(x) - \frac{3}{2}[f'(x)]^2$ είναι σταθερή.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{3}{2}f^2(x) - \frac{3}{2}[f'(x)]^2 \right)' \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2f(x)f'(x) - \frac{3}{2} \cdot 2f'(x)f''(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3f(x)f'(x) - 3f'(x)f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

5. Να βρεθεί συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $xf'(x)=2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(1)=2016$.

Λύση: $xf'(x)=2f(x) \Leftrightarrow x^2f'(x)=2xf(x) \Leftrightarrow x^2f'(x)-2xf(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=0$.

Άρα $\frac{f(x)}{x^2} = c \Leftrightarrow f(x) = cx^2 \dots \dots \dots (1)$

$x=1 \Rightarrow c=2016$.

Επομένως $f(x)=2016x^2$.

6. Αν $f'(x)+e^x=2\sin 2x + \frac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=0$.

Λύση:

$$\begin{aligned} f'(x)+e^x &= 2\sin 2x + \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow (f(x)+e^x)' = \left(\eta\mu 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right)' \Leftrightarrow \\ f(x)+e^x &= \eta\mu 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$x=0 \Rightarrow c=1$.

Άρα $f(x) = \eta\mu 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1 - e^x$.

7. Έστω f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f(x) αν $f(0)=1$.

Λύση: $f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=0 \Leftrightarrow (e^xf(x))'=0$

Άρα $e^xf(x)=c \dots \dots \dots (1)$
 $x=0 \Rightarrow c=1$.

Επομένως $e^xf(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}$.

8. Να προσδιοριστεί συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x)=e^x(\eta\mu x - \sin x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\pi/2)=1$.

Λύση:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(\eta\mu x - \sin x) \Leftrightarrow f'(x) = e^x\eta\mu x - e^x\sin x \\ &\Leftrightarrow f'(x) = -e^x(\sin x)' - (e^x)'\sin x \\ &\Leftrightarrow f'(x) = -(e^x\sin x)' \end{aligned}$$

Άρα $f(x) = -e^x\sin x + c \dots \dots \dots (1)$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c=1$

Επομένως $f(x) = 1 - e^x\sin x$.

9. Να βρείτε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\ln 3) = 3$.

Λύση: $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + e^x \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (x + e^x)'$.

Άρα $\ln f(x) = x + e^x + c$(1)

$$(1) \xrightarrow{x=\ln 3} \ln f(\ln 3) = \ln 3 + e^{\ln 3} + c$$

$$\Leftrightarrow \ln 3 = \ln 3 + 3 + c$$

$$\Leftrightarrow c = -3.$$

Επομένως $\ln f(x) = x + e^x - 3$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^{x+e^x-3}$$

10. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $f''(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$.

Λύση: $f''(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = x + c_1$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 \dots \dots \dots (1)$$

$$(1) \xrightarrow{x=0} c_2 = 1$$

$$(1) \xrightarrow{x=1} c_1 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$

11. Να βρείτε συνάρτηση f με
 i. $f''(x) = e^x + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
 ii. η γραφική παράσταση αυτής τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία με τετμημένες $x_0 = 1$ και $x_1 = 0$.

Λύση: $f''(x) = e^x + 2x \Leftrightarrow f'(x) = e^x + x^2 + c_1$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^x + \frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2 \dots (1)$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = -1$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow e + \frac{1}{3} + c_1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{2}{3} - e$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^x + \frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{2}{3} - e\right)x - 1.$$

12. Η συνάρτηση $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Να δείξετε ότι $f(x) = k \sin x$, k σταθερά.

Λύση:

1ος Τρόπος: Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{f(x)}{\sin x} = k$.

$$\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)' = \frac{f'(x)\sin x + f(x)\eta\mu x}{\sin^2 x} \dots \dots \dots (1)$$

Έστω $g(x) = f'(x)\sin x + f(x)\eta\mu x$.

$$g'(x) = f''(x)\sin x - f'(x)\eta\mu x + f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = -f(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$$

Άρα $g(x) = \text{σταθερή}$

$$f''(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = -f(x)$$

$$g(x) = g(0) = f'(0)\sigma\upsilon\nu 0 + f(0)\eta\mu 0 = 0$$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)' = 0$$

Προσθαφαιρούμε $f'(x)\eta\mu x$

Άρα $\frac{f(x)}{\sin x} = k$, $k = \text{σταθερά}$

$$\Leftrightarrow f(x) = k \sin x.$$

2ος Τρόπος: $f''(x) + f(x) = 0 \dots \dots$ (πολ/ζουμε με $\sin x$)

$$\Leftrightarrow f''(x)\sin x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow f''(x)\sin x - f'(x)\eta\mu x + f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow (f'(x)\sin x)' + (f(x)\eta\mu x)' = 0$$

$$\Leftrightarrow (f'(x)\sin x)' = -(f(x)\eta\mu x)'$$

$$\text{Άρα } f'(x)\sin x = -f(x)\eta\mu x + c \dots \dots \dots (2)$$

$$(2) \xrightarrow{x=0} f'(0)\sigma\upsilon\nu 0 = -f(0)\eta\mu 0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως $f'(x)\sin x = -f(x)\eta\mu x$

$$\Leftrightarrow f'(x)\sin x + f(x)\eta\mu x = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\sin x - f(x)(\sin x)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\sin x - f(x)(\sin x)'}{\sin^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)' = 0.$$

Άρα $\frac{f(x)}{\sin x} = k \Leftrightarrow f(x) = k \sin x.$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot e^{-x^2}$ είναι σταθερή.
 ii. Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(1) = -1$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{i. } g'(x) &= f'(x) \cdot e^{-x^2} + f(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= f'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xf(x) \cdot e^{-x^2} \\ &= 2xf(x) \cdot e^{-x^2} - 2xf(x) \cdot e^{-x^2} = 0. \end{aligned}$$

Άρα g σταθερή.

ii. Από το (i) ερώτημα $g(x) = c$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x^2} = c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ce^{x^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$(1) \xrightarrow{x=1} c = e^{-1}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^{x^2-1}.$$

14. Δίνεται $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x}$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(\ln 2) = -\frac{2}{3}$.

$$\text{Λύση: } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(e^{-x} - e^x) = f(x)(e^{-x} + e^x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(e^{-x} - e^x) - f(x)(e^{-x} + e^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(e^{-x} - e^x) + f(x)(e^{-x} - e^x)' = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)(e^{-x} - e^x)]' = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)(e^{-x} - e^x) = c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{e^{-x} - e^x} \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \xrightarrow{x=\ln 2} f(\ln 2) = \frac{c}{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} = \frac{c}{\frac{1}{e^{\ln 2}} - e^{\ln 2}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} = \frac{c}{\frac{1}{2} - 2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} = \frac{c}{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1.$$

Άρα $f(x) = \frac{1}{e^{-x} - e^x}.$

15. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(\ln 2) = 2$.

Λύση: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$

$$\Leftrightarrow (\ln f(x))' = 1 + \frac{1}{e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow (\ln f(x))' = 1 + e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \xrightarrow{x=\ln 2} \ln f(\ln 2) = \ln 2 - \frac{1}{2}e^{-2\ln 2} + c$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2(e^{\ln 2})^2} + c$$

~~$$\Leftrightarrow \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2(e^{\ln 2})^2} + c$$~~

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8}.$$

$$(1) \Rightarrow \ln f(x) = x - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^{x - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{8}}.$$

16. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(-1) = f'(1) = 0$. Να δείξετε ότι $f(-1/2) = f(1/2)$.

Λύση: $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα f' ↗ στο \mathbb{R} . Επομένως στο διάστημα $[-1, 1]$ έχουμε:

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f'(-1) \leq f'(x) \leq f'(1)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f'(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0.$$

Επομένως η f είναι σταθερή στο $[-1, 1]$ και συνεπώς $f(-1/2) = f(1/2)$.

17. Έστω f, g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , τέτοιες ώστε $f(0) = g(0)$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) - g(x) = cx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- αν ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < 0 < \rho_2$ ρίζες της $g(x)$ τότε η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

Λύση:

- $f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + c$
 $\Leftrightarrow f(x) = g(x) + cx + c_1 \dots\dots\dots(1)$

$$(1) \xrightarrow{x=0} c_1 = 0 \text{ οπότε η (1) γίνεται } f(x) - g(x) = cx.$$

- Εφαρμόζουμε το **θ. Bolzano** για την f στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

- f συνεχής γιατί είναι παραγωγίσιμη,
- $f(\rho_1) = g(\rho_1) - c\rho_1 = -c\rho_1$
 $f(\rho_2) = g(\rho_2) - c\rho_2 = -c\rho_2$

γιατί ρ_1, ρ_2 ρίζες της $g(x) = 0$

$$\Rightarrow f(\rho_1)f(\rho_2) = c^2\rho_1\rho_2 \leq 0 \dots \text{γιατί } \rho_1 < 0 < \rho_2.$$

$$\Rightarrow f(\rho_1)f(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_1) = 0 \text{ ή } f(\rho_2) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$\Rightarrow f(\rho_1)f(\rho_2) < 0$. Τότε από **θ. Bolzano** η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\rho_1, \rho_2) \dots\dots\dots(3)$

Από (2) και (3) προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

18. Εάν $f'''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f εάν $f(1) = 0$, $f(3) = 2$ και $f(-1) = 6$.

Λύση: $f'''(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = c_1$
 $\Leftrightarrow f'(x) = c_1x + c_2$
 $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3 \dots\dots\dots(1)$

$$(1) \xrightarrow{x=1} 0 = \frac{1}{2}c_1 + c_2 + c_3 \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) \xrightarrow{x=-1} 6 = \frac{1}{2}c_1 - c_2 + c_3 \dots\dots\dots(3)$$

$$(1) \xrightarrow{x=3} 2 = \frac{9}{2}c_1 + 3c_2 + c_3 \dots\dots\dots(4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) και (4) βρίσκουμε $c_1 = 2$, $c_2 = -3$ και $c_3 = 2$.

Άρα $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

19. Εάν $f'''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την f εάν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, και η εφαπτομένη στο σημείο της $M(1,2)$ σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των x γωνία $\pi/4$.

Λύση: $f'''(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)=c_1$
 $\Leftrightarrow f'(x)=c_1x+c_2$
 $\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2x+c_3 \dots \dots (1)$

$f(0)=0 \Leftrightarrow c_3=0$

$f(1)=2 \Leftrightarrow 2=\frac{1}{2}c_1+c_2 \dots \dots \dots (2)$

$f'(1)=\epsilon\varphi^{\pi/4}=1 \Leftrightarrow 1=c_1+c_2 \dots \dots \dots (3)$
 Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε $c_2=3$ και $c_1=-2$.
 Άρα $f(x)=-x^2+3x$.

20. (ΕΜΕ) Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)=9$.

Λύση: $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$
 $\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{f(x)})' = (x^2)'$
 $\Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + c \dots \dots \dots (1)$
 $\Leftrightarrow f(x) = (x^2 + c)^2$

Για $x=1$ βρίσκουμε $c=-4$ ή $c=2$.

Αν $c=-4$, τότε η (1) $\Rightarrow \sqrt{f(0)} = -4$ άτοπο.
 Άρα $c=2$ και $f(x)=(x^2+2)^2$.

21. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και την $F(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εάν $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση. Ποιος είναι ο τύπος της f εάν $f(0) = f'(0) = 0$;

Λύση: $F'(x) = [f^2(x) + (f'(x))^2]'$
 $= 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)$
 $= 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f(x)$
 $= 0$.

Άρα F σταθερή.

$F(x) = F(0) = f^2(0) + (f'(0))^2 = 0 \Rightarrow$
 $f^2(x) + (f'(x))^2 = 0 \Rightarrow$
 $f(x) = f'(x) = 0$.

γιατί $f''(x) + f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f''(x) = -f(x)$

22. (ΕΜΕ) Έστω f, g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , τέτοιες ώστε $f''(x)g(x) = f(x)g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(0)g(0) = f(0)g'(0)$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) = \lambda g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ ή $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$.

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \dots \dots \dots (1)$

Θέτω $h(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$.

$h'(x) = f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) - f'(x)g'(x) - f(x)g''(x)$
 $= f''(x)g(x) - f(x)g''(x)$
 $= 0$.

Άρα $h = \text{σταθερή}$.

$h(x) = h(0) = f'(0)g(0) - f(0)g'(0) = 0$.

Άρα (1) $\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$.

23. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f'(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(4) - f(2) < 6$.

Λύση: $f'(x) < x \Leftrightarrow f'(x) < \left(\frac{x^2}{2}\right)'$
 $\Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right)' < 0$.

Άρα η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

$2 < 4 \xrightarrow{g \downarrow} g(2) > g(4)$
 $\Leftrightarrow f(2) - \frac{2^2}{2} > f(4) - \frac{4^2}{2}$
 $\Leftrightarrow f(4) - f(2) < 6$.

24. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{e^{3x}}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f ,
b) Εάν $f(x)$ είναι η λύση του (α) ερωτήματος, για την οποία $f(0) = 3$, να λυθεί στο \mathbb{R} η εξίσωση $f^2(x) - 4f(x) - 5 = 0$.

Λύση:

a) $\left(\frac{f(x)}{e^{3x}}\right)' = \frac{f'(x)e^{3x} - 3f(x)e^{3x}}{(e^{3x})^2}$
 $= \frac{3f(x)e^{3x} - 3f(x)e^{3x}}{(e^{3x})^2} = 0$.

Άρα $\frac{f(x)}{e^{3x}} = \text{σταθερή}$.

b) Από (α) ερώτημα $\frac{f(x)}{e^{3x}} = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{3x}$.

$f(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3$

και συνεπώς $f(x) = 3e^{3x}$.

$f^2(x) - 4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x) = -1$ ή $f(x) = 5$.

Η $f(x) = -1$ είναι αδύνατη γιατί $f(x) = 3e^{3x} > 0$

Άρα $f(x) = 5 \Leftrightarrow 3e^{3x} = 5$

$\Leftrightarrow e^{3x} = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 3x = \ln \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{3}$.

25. Να βρείτε τον τύπο της η συνάρτησης $f:(1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $\frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0$ για κάθε $x>1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο της $M(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ): $x-y=2016$.

Λύση: $\frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0$
 $\Leftrightarrow f(x) + f'(x)x \ln x = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x} f(x) + f'(x) \ln x = 0$
 $\Leftrightarrow (\ln x)' f(x) + f'(x) \ln x = 0$
 $\Leftrightarrow (f(x) \ln x)' = 0$
 $\Leftrightarrow f(x) \ln x = c$
 $f(x) = \frac{c}{\ln x} \dots\dots\dots(1)$
 $\lambda_\epsilon = 1 \Leftrightarrow f'(e) = -1 \dots(?)$
 $f'(x) = -\frac{c}{x \ln^2 x} \xrightarrow{x=e} -1 = -\frac{c}{e} \Leftrightarrow c = e.$
 Άρα $f(x) = \frac{e}{\ln x}.$

26. Δίνεται η συνάρτηση $g:(-\pi/2, \pi/2)\rightarrow\mathbb{R}$ με $g'(x) \sin x + g(x) \eta \mu x = g(x) \sin x$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

i. Να δείξετε ότι $\left(\frac{g(x)}{\sin x}\right)' = \frac{g(x)}{\sin x}$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της g , αν $g(0)=2016$.

Λύση:

i. $g'(x) \sin x + g(x) \eta \mu x = g(x) \sin x$
 $\Leftrightarrow g'(x) \sin x - g(x) (\sin x)' = g(x) \sin x$
 $\Leftrightarrow \frac{g'(x) \sin x - g(x) (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{g(x)}{\sin x}$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{\sin x}\right)' = \frac{g(x)}{\sin x}.$

ii. $\left(\frac{g(x)}{\sin x}\right)' = \frac{g(x)}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{g(x)}{\sin x} = ce^x$
 $\Leftrightarrow g(x) = ce^x \sin x \dots\dots\dots(1)$
 $\xrightarrow{x=0} (1) \Rightarrow c=2016$
 Άρα $g(x) = 2016e^x \sin x.$

27. Δίνεται $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $(f(x)-e^x) \cdot (f'(x)-e^x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=2$.

i. Να δείξετε ότι $(f(x)-e^x)^2 = 1$.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} .

iii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση:

i. Θέτω $g(x) = f(x) - e^x$.
 Τότε η δοθείσα σχέση γράφεται $g(x) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2g(x) \cdot g'(x) = 0$
 $\Leftrightarrow (g^2(x))' = 0$
 $\Leftrightarrow g^2(x) = c \dots\dots\dots(1)$
 $\Leftrightarrow (f(x) - e^x)^2 = c \dots\dots\dots(2)$
 $\xrightarrow{x=0} (2) \Rightarrow c=1.$
 Άρα $(f(x) - e^x)^2 = 1$.

ii. Αν η g δεν διατηρούσε σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} , τότε επειδή είναι συνεχής, θα έπαιρνε και την τιμή 0, δηλαδή υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, άτοπο γιατί $g(\xi) = 1$ ή $g(\xi) = -1$ λόγω της (1).

iii. Από το (ii) ερώτημα, θα είναι $g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ή $g(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Επειδή $g(0) = f(0) - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0$, θα είναι $g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Άρα $f(x) - e^x = 1$
 $\Leftrightarrow f(x) = 1 + e^x.$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(1)=e$ και $x(f'(x)-f(x))=f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

ii. Να δείξετε ότι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση:

i. Η δοθείσα για $x=0$ δίνει $f(0)=0$.

ii. για $x \neq 0$ έχουμε:
 $xf'(x) - xf(x) = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = xf(x)$
 $\Leftrightarrow xf'(x) - (x)'f(x) = xf(x)$
 $\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x}$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}.$

iii. $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = ce^x$
 $\Leftrightarrow f(x) = cxe^x \dots\dots\dots(1)$
 $\xrightarrow{x=1} (1) \Rightarrow c=1$ και επομένως $f(x) = xe^x$.
 Άρα $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = xe^x.$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

iii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $f'(0)=2$, τότε:

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x)=2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση:

- i. Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $x=y=0$ δίνει $f(0)+f(0)=f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$
- ii. Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για $y=-x$ δίνει $f(x-x)=f(x)+f(-x) \Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x) \Leftrightarrow 0=f(x)+f(-x) \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

iii. α) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - f(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 0}{h - 0}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0}$
 $= f'(0) = 2.$

β) $f'(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=2x+c$
 $f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$
 Άρα $f(x)=2x$.

30. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x+y) = \frac{1}{2} f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $(\epsilon): y=2x+2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της $M(0, f(0))$.

- i. Να βρείτε το $f(0)$.
- ii. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση:

- i. Οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την ευθεία (ϵ) . Άρα $y=2x+2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow f(0)=2$.
- ii. Η σχέση $f'(x+y) = \frac{1}{2} f(x) \cdot f(y)$ για $y=0$ δίνει $f'(x) = \frac{1}{2} f(x) \cdot f(0)$ και επειδή $f(0)=2 \Rightarrow f'(x)=f(x)$.
 Άρα $f(x)=ce^x$.
 $f(0)=2 \Leftrightarrow c=2$
 Επομένως $f(x)=2e^x$.

31. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \cdot f'(-x)=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι:

- i. $f(-x) \cdot f'(x)=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f(x) \cdot f(-x)=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii. $f(x)=e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

- i. Στην σχέση $f(x) \cdot f'(-x)=1$(1) θέτουμε όπου x το $-x$ και βρίσκουμε $f(-x) \cdot f'(x)=1$(2)
- ii. Από (1) και (2) έχουμε $f(x) \cdot f'(-x)=f(-x) \cdot f'(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(-x) - f(-x) \cdot f'(x)=0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(-x) + f(-x) \cdot (f(x))')=0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot f(-x))'=0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x)=c$(3)

$(3) \Rightarrow f(0) \cdot f'(0)=c \Leftrightarrow c=1.$

Άρα $(3) \Rightarrow f(x) \cdot f(-x)=1.$

iii. (2) $\Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot f(-x)}{f(x) \cdot f'(-x)} = 1$
 $\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$
 $\Leftrightarrow f(x)=ce^x$(4)

$(4) \Rightarrow c=1.$
 Άρα $f(x)=e^x$.

32. Έστω f συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f εάν $f(3)=7$.

Λύση: Για $x \neq 2$ έχουμε:

$f'(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow f'(x) = 2x-1$

2	-5	2	2
↓	4	-2	
2	-1	0	

$f'(x)=2x-1 \Leftrightarrow f(x)=x^2-x+c$(1)

$(1) \Rightarrow c=1$
 Άρα $f(x)=x^2-x+1$.

Επομένως $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

33. (Θέμα 4^{ov} α ερώτημα 2005) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια ώστε $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.
 Μονάδες 6

Λύση: $2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c$(1)

$(1) \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.

Άρα $(1) \Rightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

34. (Θέμα Δ 2010) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0)=3$, $f(x) \neq x$ και $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή. Μονάδες 6

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7

Λύση:

i. $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x)$
 $= 2f'(x)(f(x)-x) - 2f(x)$
 $= 2 \frac{f(x)}{f(x)-x} (f(x)-x) - 2f(x)$
 $= 2f(x) - 2f(x) = 0.$

Άρα g σταθερή.

ii. $g(x) = c \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) = c \dots \dots \dots (1)$
 $x=0$
 $(1) \Rightarrow c=9$

Άρα $(1) \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) = 9$
 $\Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9$
 $\Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = x^2 + 9 \dots \dots \dots (2)$

Επειδή η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής και επειδή δεν μηδενίζεται (γιατί $f(x) \neq x$), διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} και επειδή $h(0)=f(0)-0=3>0$, θα είναι $h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0$ οπότε η

(2) δίνει $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9}$
 $\Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}.$

35. (Θέμα Γ 2013) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0)=1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1.$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 9

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(g(x))=1$ Μονάδες 8

Λύση:

i. $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \Leftrightarrow (f(x)+x)(f(x)+x)' = x$
 $\Leftrightarrow 2(f(x)+x)(f(x)+x)' = 2x$
 $\Leftrightarrow [(f(x)+x)^2]' = (x^2)'$

$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + c \dots \dots \dots (1)$
 $x=0$
 $(1) \Rightarrow c=1$

Άρα $(1) \Rightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + 1 \dots \dots \dots (2)$

Επειδή $x^2+1 \neq 0 \Rightarrow f(x)+x \neq 0$, και η συνάρτηση $h(x)=f(x)+x$ δεν μηδενίζεται και επειδή είναι και συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} και αφού $h(0)=f(0)+0=1>0$ θα είναι $h(x)>0 \Leftrightarrow f(x)+x>0$ και η (2) δίνει

$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$

ii. Επειδή $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$
 $= \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα άρα «1-1».

$f(g(x))=1 \Leftrightarrow f(g(x))=f(0)$

$\Leftrightarrow g(x)=0$
 $\Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \dots \dots \dots (3)$

Θέτω $h(x)=2x^3+3x^2-2.$

$h'(x)=6x^2+6x.$

• $h'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+6x=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=0.$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	○	-	+
$h(x)$	↗		↘	↗

Άρα h ↗ στο $A_1=(-\infty, -1]$, ↘ στο $A_2=[-1, 0]$

και ↗ στο $A_3=[0, +\infty).$

Επειδή h συνεχής ως πολυωνυμική, έχουμε:

• $h(A_1) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right]$
 $= (-\infty, -1].$

Επειδή $0 \notin (-\infty, -1]$, η εξίσωση $h(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $A_1.$

• $h(A_2) = [f(0), f(1)]$
 $= [-2, -1].$

Επειδή $0 \notin [-2, -1]$, η εξίσωση $h(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $A_2.$

• $h(A_3) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$
 $= [-2, +\infty).$

Επειδή $0 \in [-2, +\infty)$, η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

36. (Θέμα Δ1 2015) Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(0)=0.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}.$ Μονάδες 5

Λύση:

Δ1: $f'(x)(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = 2$
 $\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \stackrel{x=0}{\Leftrightarrow} e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c$$

$$\Leftrightarrow e^0 - e^0 = c$$

$$\Leftrightarrow 1-1=c$$

$$\Leftrightarrow c=0.$$

$$\text{Άρα η (1)} \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = 1 + x^2 \dots\dots\dots(2)$$

Επειδή $x^2+1 \neq 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} e^{f(x)} - x \neq 0$, και η συνάρτηση $h(x) = e^{f(x)} - x$ δεν μηδενίζεται και επειδή είναι και συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} και αφού $h(0) = e^{f(0)} = e^0 = 1 > 0$ θα είναι $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x > 0$ και η

$$(2) \text{ δίνει } e^{f(x)} - x = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1+x^2}.$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), x \in \mathbb{R}.$$

37. σδαδα