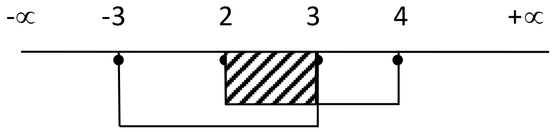
ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Εάν f(x)=2x-1, x∈[-3,3] και g(x)=5-2x, x∈[3,7], να βρείτε τις gof και fog.

Λύση: $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=$

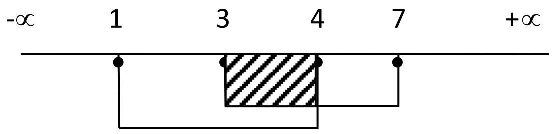
={x∈[-3,3] / 2x-1∈[3,7]}
={x∈[-3,3] / 3≤2x-1≤7}
={x∈[-3,3] / 4≤2x≤8}
={x∈[-3,3] / 2≤x≤4}
=[2,3].



g(f(x))=g(2x-1)=5-2(2x-1)
=-4x+7.

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x∈[3,7] / 5-2x∈[-3,3]}
={x∈[-3,3] / -3≤5-2x≤3}
={x∈[-3,3] / -8≤-2x≤-2}
={x∈[-3,3] / 4≥x≥1}
=[3,4].



f(g(x))=f(5-2x)=2(5-2x)-1
=-4x+9.

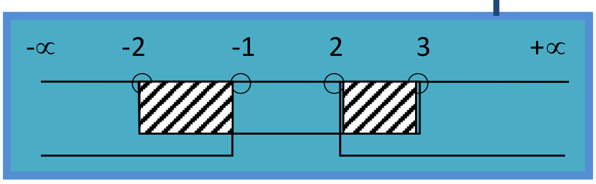
2. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού (3,7), να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog, όπου g(x)=x^2-x+1.

Λύση: $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x∈R / x^2-x+1∈[3,7]}
={x∈R / x^2-x+1≤7 και x^2-x+1≥3}
={x∈R / x^2-x-2≥0 και x^2-x-6≤0}
={x∈R / (x<-1 ή x>2) και (-2<x<3)}
=(-2,-1)U(2,3).

x	-∞	-1		2	+∞
x^2-x-2	+	0	-	0	+

x	-∞	-2		3	+∞
x^2-x-6	+	0	-	0	+



3. Βρείτε την fog, όταν $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ και g(x)= =x^2-x+2.

Λύση: $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x∈R / x^2-x+2≠4}
={x∈R / x^2-x-2≠0}
=R-{-1,2}
=(-∞,-1)U(-1,2)U(2,+∞) και

(f∘g)(x)=f(g(x))
=f(x^2-x+2)

$=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}$.

4. Βρείτε τις gof και fog, όταν $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ και $g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Λύση:

● $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x≠1 / $\dfrac{1+x}{1-x}\neq -1$}
={x≠1 /1+x ≠ -1+x}
=R-{1}
=(-∞,1)U(1,+∞) και

(f∘g)(x)=f(g(x))

$=f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$=\dfrac{1-\dfrac{1+x}{1-x}}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}$

$=\dfrac{1-x-1-x}{1-x+1+x}$

$=\dfrac{-2x}{2}$=-x.

● $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=$

={x≠ -1 / $\dfrac{1-x}{1+x}\neq 1$}
={x≠ -1 /1-x ≠ 1+x}
={x≠ -1 / x ≠ 0}
=R-{-1,0}
=(-∞,-1)U(-1,0)U(0,+∞) και

(g∘f)(x)=g(f(x))

$=g\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$=\dfrac{1+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}$

$=\dfrac{1+x+1-x}{1+x-1+x}$

$=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$.

5. Έστω f:R→R με (fof)(x)=4-x ……………(1) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(2)=2.

Λύση: $(1) \overset{x=2}{\Rightarrow}$ f(f(2))=2……………………(2)

$(1) \overset{x=f(2)}{\Rightarrow}$ f(f(f(2)))=4-f(2) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ f(2)=4-f(2)

⇒2f(2)=4

⇒f(2)=2.

6. Έστω f:R→R με (fof)(x)=xf(x)……………(1) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(0)=0.

Λύση: $(1) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ f(f(0))=0……………………(2)

$(1) \overset{x=f(0)}{\Rightarrow}$ f(f(f(0)))=f(0)f(f(0)) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ f(0)=0.

7. Αν f(x)=2x+3 και g(x)=4x+9, να δείξετε ότι gof=fog.

Λύση: Επειδή $A_f = A_g = R$

$\Rightarrow A_{f\circ g} = A_{g\circ f} = R.$

(f∘g)(x)=f(g(x))
=f(4x+9)
=2(4x+9)+3
=8x+21.

(g∘f)(x)=g(f(x))
=g(2x+3)
=4(2x+3)+9
=8x+21.

Άρα f∘g=g∘f.

8. Εάν f(x)=(ημx+συνx)²-ημ2x-1 και g(0)=1, βρείτε το (g∘f)(2016).

Λύση:
Είναι f(x)=ημ²x+συν²x+~~2ημxσυνx~~-~~2ημxσυνx~~-1=
=1-1=0, και
(g∘f)(2016)=g(f(2016))=g(0)=1.

9. Εάν $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, να δείξετε ότι (fof)(x)=x, για κάθε x∈A_f.

Λύση: $A_{f\circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_f\}$

$=\{x \neq -1 \,/\, \frac{1-x}{1+x} \neq -1\}$

$=\{x \neq -1 \,/\, 1-x \neq -1-x\}$

$=R-\{-1\}= A_f$.

(f∘f)(x)=f(f(x))

$= \dfrac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}$

$= \dfrac{1+x-1+x}{1+x+1-x}$

$= \dfrac{2x}{2} = x.$

10. Βρείτε τις gof και fog, όταν $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ και $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

Λύση: Μετά από πράξεις (?) βρίσκουμε:

$A_{g\circ f} = ...R-\{3,8\}$

(g∘f)(x)=g(f(x))
=……..
$= \frac{4x-7}{8-x}$ και

$A_{f\circ g} = ...R-\{2, 9/2\}$

(f∘g)(x)=f(g(x))
=…….
$= \frac{3x-1}{9-2x}$.

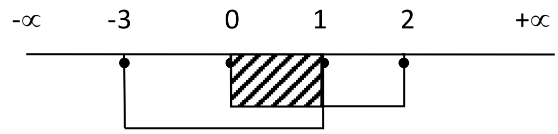
11. Εάν f(x)=x²-2x+3, x∈[-3,1] και g(x)=x+2, x∈[-2,3], να βρείτε τις gof και fog.

Λύση:

● $A_{g\circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\}$ =

={x∈[-3,1] / x²-2x+3∈[-2,3]}
={x∈[-3,1] / -2≤ x²-2x+3 ≤3}
={x∈[-3,1] / x²-2x+5 ≥0 και x²-2x ≤0}
(1) (2)

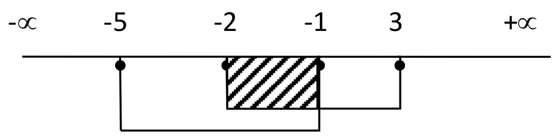
Η ανίσωση (1) επειδή έχει Δ=-16<0, είναι αληθής για κάθε x∈R.
Η ανίσωση (2) έχει λύση x∈[0,2] ….(?). Άρα
$A_{g\circ f}$ ={x∈[-3,1] / x∈[0,2]}
=[0,1].



(g∘f)(x)=g(f(x))
=g(x²-2x+3)
= x²-2x+5.

● $A_{f\circ g} = \{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\}$ =

={x∈[-2,3] / x+2∈[-3,1]}
={x∈[-2,3] / -3≤x+2≤1}
={x∈[-2,3] / -5≤x≤-1}
=[-2,-1].



(f∘g)(x)=f(g(x))
=f(x+2)
= (x+2)²-2(x+2)+3
=…….
= x²+2x+3.

12. Βρείτε την gof , όταν $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$.

● $A_{g\circ f}=\{x\in A_f\,/\,f(x)\in A_g\}=$

$=\{x\neq -2\ /\ \dfrac{x+1}{x+2}\neq 2\}$

$=\{x\neq -2\ /x+1\neq 2x+4\}$

$=\{x\neq -2\ /\ x\neq -3\}$

$=R-\{-2,-3\}$

$=(-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,+\infty)$ και

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{x+1}{x+2}-3}{\dfrac{x+1}{x+2}-2}$

$=\dfrac{x+1-3x-6}{x+1-2x-4}$

$=\dfrac{-2x-5}{-x-3}=\dfrac{2x+5}{x+3}.$

13. Εάν $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και g(x)=-x, να δείξετε ότι fog=-f.

Λύση:

Επειδή $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, είναι $A_f=A_g=R$. Άρα και $A_{f\circ g}=R=A_f$……..(1)

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(-x)$

$=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$=\ln\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$

$=\ln\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$

$=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

= -f(x)……………………………..……….(2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ $f\circ g=-f$.

14. Έστω f,g:R→R τέτοιες ώστε g(x)=x-2 και $(f\circ g)(x)=x^2+x+1$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση: $(f\circ g)(x)=x^2+x+1\Rightarrow$

$f(g(x))=x^2+x+1\Rightarrow$

$f(x-2)=x^2+x+1$……………………….(1)

$(1)\overset{x-2=y}{\underset{x=y+2}{\Rightarrow}}$ $f(y)=(y+2)^2+(y+2)+1$

$=y^2+5y+7$.

15. Ομοίως εάν f(x)=x+3 και $(f\circ g)(x)=e^{x+1}+3$, να βρείτε τον τύπο της g.

Λύση: $(f\circ g)(x)=e^{x+1}+3\Rightarrow$

$f(g(x))=e^{x+1}+3\Rightarrow$

$g(x)+3=e^{x+1}+3\Rightarrow$

$g(x)=e^{x+1}$.

16. Έστω f,g:R→R. Να δείξετε ότι:

i) Αν f άρτια και g περιττή, τότε gof και fog είναι άρτιες,

ii) Αν f και g περιττές, τότε gof και fog είναι περιττές.

Λύση:

i) (fog)(-x)=f(g(-x))

=f(-g(x)) γιατί g περιττή

=f(g(x)) γιατί f άρτια

=(fog)(x).

Άρα fog άρτια.

(gof)(-x)=g(f(-x))

=g(f(x)) γιατί f άρτια

=(gof)(x).

Άρα gof άρτια.

ii) (fog)(-x)=f(g(-x))

=f(-g(x)) γιατί g περιττή

=-f(g(x)) γιατί f περιττή

=-(fog)(x).

Άρα fog περιττή.

(gof)(-x)=g(f(-x))

=g(-f(x)) γιατί f περιττή

=-g(f(x)) γιατί g περιττή

=-(gof)(x).

Άρα gof περιττή.

17. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού το [7,27], να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x)=f(x^3+x-3)$.

Λύση: Πρέπει $x^3+x-3\in[7,27]$

$\Leftrightarrow 7\leq x^3+x-3\leq 27$

$\Leftrightarrow x^3+x-3\geq 7$ και $x^3+x-3\leq 27$

$\Leftrightarrow x^3+x-10\geq 0$ και $x^3+x-30\leq 0$.

(1) (2)

1	**0**	**1**	**-10**	**2**
↓	2	4	10	
1	2	5	0	

Horner

(1) $\Leftrightarrow$ $(x-2)(x^2+2x+5)\geq 0$

$\Leftrightarrow x-2\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq 2$…………………………………….(3)

γιατί $x^2+2x+5>0$ για κάθε πραγμα-τικό αριθμό x, αφού Δ= -16<0.

1	**0**	**1**	**-30**	**3**
↓	3	9	30	
1	3	10	0	

Horner

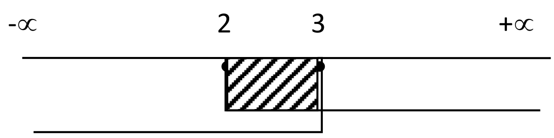
(2) $\Leftrightarrow$ $(x-3)(x^2+3x+10)\leq 0$

$\Leftrightarrow x-3\leq 0$

$\Leftrightarrow x\leq 3$…………………………………….(4)

γιατί $x^2+3x+10>0$ για κάθε πραγ-ματικό αριθμό x, αφού Δ= -31<0.

Από (3) και (4) $\Rightarrow 2\leq x\leq 3\Rightarrow$ $A_g=[2,3]$.

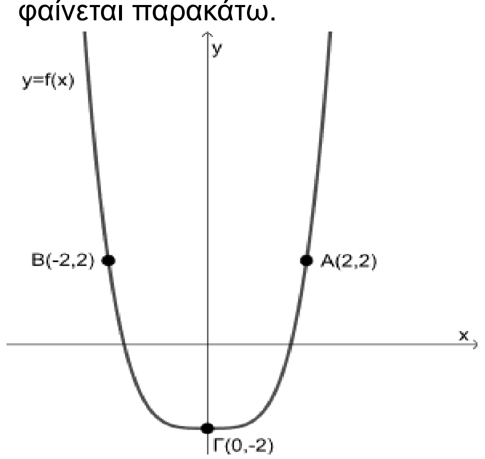


18. 28304-2: Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(0,-2)$.
Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $(g o f)(2)$, $(g o f)(-2)$ και $(g o f)(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω.



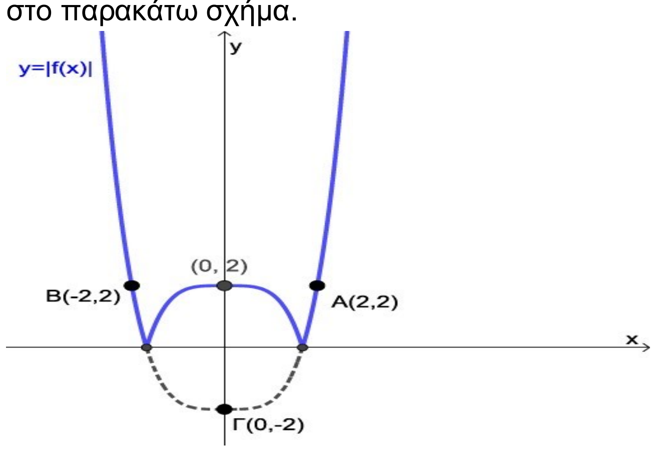
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης gof. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(2,2), Β(-2,2) και Γ(0,-2) είναι f(2)=2, f(-2)=2 και f(0) = -2.

β) Είναι (gof)(2)=g(f(2))=g(2)=|2|=2,
(gof)(-2)=g(f(-2))=g(2)=|2|=2,
(gof)(0)=g(f(0))=g(-2)=|-2|=2.

γ) Είναι (gof)(x) = g(f(x)) = |f(x)|, x∈IR.
Η γραφική παράσταση της αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης C_f της f ,που βρίσκονται πάνω από τον άξονα xx΄, πάνω στον άξονα xx΄ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα xx΄, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον xx΄.
Επομένως η γραφική παράσταση της gof φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



19. 29832-2: Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το IR* και της g το διάστημα (-1, 1). (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) • $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow e^x \neq e^0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
Άρα $A_f = \mathbb{R}^*$.

• $\left\{\begin{matrix} \frac{1-x}{1+x} > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0$
$\Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) > 0$
$\Leftrightarrow -1 < x < 1$.
Άρα $A_g = (-1,1)$.

β) $A_{fog} = \{x \in A_g \ / \ g(x) \in A_f\}$
$= \{x \in (-1,1) \ / \ ln\frac{1-x}{1+x} \in \mathbb{R}^*\}$
$= \{x \in (-1,1) \ / \ ln\frac{1-x}{1+x} \neq 0\}$
$= \{x \in (-1,1) \ / \ ln\frac{1-x}{1+x} \neq \ln 1\}$
$= \{x \in (-1,1) \ / \ \frac{1-x}{1+x} \neq 1\}$
$= \{x \in (-1,1) \ / \ 1-x \neq 1+x\}$
$= \{x \in (-1,1) \ / \ x \neq 0\}$
$=(-1,0) \cup (0,1)$.

γ) $(f \circ g)(x) = f(g(x) = f\left(ln\frac{1-x}{1+x}\right)$

$$= \frac{e^{ln\frac{1-x}{1+x}}+1}{e^{ln\frac{1-x}{1+x}}-1} = \frac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1} = \frac{1-x+1+x}{1-x-1-x} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}.$$

20. 35168-2: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h ώστε $f(x) = \ln(1+e^x)$, $g(x) = 2\ln x$ και $h(x) = \ln(1+x^2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g είναι αντίστοιχα :
D_f = IR, αφού 1+e^x > 0 για κάθε x∈ IR.
D_g = (0, +∞), γιατί x > 0.
β) $D_{f\circ g}$ = {x∈D_g και g(x)∈D_f}
= {x ϵ (0,+∞) και 2lnx∈ IR} = (0, +∞).
(f ∘ g) (x) = f(g(x))
= f(2lnx)
= ln(1+ $e^{2\ln x}$)
= ln(1+ $e^{\ln x^2}$)
= ln(1 + x^2).
γ) Η συνάρτηση h ορίζεται για 1 + x^2 > 0
⇔ x ∈ IR.
με h(x) = ln(1 + x^2).
Η συνάρτηση f∘g ορίζεται για x∈(0,+∞) με (f∘g)(x)= = ln(1+x^2).
Οι δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού, άρα δεν είναι ίσες.

21. 29831 ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται η συνάρτηση f: IR*→ IR και η συνάρτηση $g(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα (-1, 1). Μονάδες 7

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$. Μονάδες 8

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f\circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in$ IR*. Μονάδες 10

Λύση:

α) Για τη συνάρτηση g είναι:

$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)\cdot(1+x) > 0$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$, οπότε $D_g = (-1,1)$.

β) Έχουμε $D_f = \mathbb{R}^* = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και λόγω του ερωτήματος (α) το $D_g = (-1,1)$.

Για την $f\circ g$ το πεδίο ορισμού είναι το:

$$A_1 = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$
$$= \{x \in (-1,1) : g(x) \in \mathbb{R}^*\}$$
$$= \left\{x \in (-1,1) : ln\frac{1-x}{1+x} \neq 0\right\}$$
$$= \left\{x \in (-1,1) : \frac{1-x}{1+x} \neq 1\right\}$$
$$= \{x \in (-1,1) : 1-x \neq 1+x\}$$
$$= \{x \in (-1,1) : x \neq 0\}$$
$$= (-1,0)\cup(0,1).$$

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), για $x \in (-1,0)\cup(0,1)$ είναι:

$$(f\circ g)(x) = (f(g(x))$$
$$= \frac{e^{g(x)}+1}{e^{g(x)}-1} = \frac{e^{ln\frac{1-x}{1+x}}+1}{e^{ln\frac{1-x}{1+x}}-1}$$
$$= \frac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1}$$
$$= \frac{\frac{1-x+1+x}{1+x}}{\frac{1-x-1-x}{1+x}}$$
$$= \frac{2}{-2x}$$
$$= -\frac{1}{x}.$$

Άρα $(f\circ g)(x) = -\frac{1}{x}$ με $x \in (-1,0)\cup(0,1)$.

Εναλλακτικά: $(f\circ g)(x) = -\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow f(g(x)) = -\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow f\left(ln\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{x}$..................(1)

Θέτω w=$ln\frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow e^w = \frac{1-x}{1+x}$

⇔ $e^w + xe^w = 1-x$

⇔ $x + xe^w = 1 - e^w$

⇔ $x(1 + e^w) = 1 - e^w$

⇔ $x = \frac{1-e^w}{1+e^w}$, αφού $1+e^w \neq 0$.

Οπότε (1) ⇔ $f(w) = -\frac{1}{\frac{1-e^w}{1+e^w}}$

$\Leftrightarrow f(w) = \frac{e^w+1}{e^w-1}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in$ IR*.

22. END.