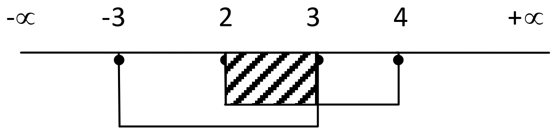
ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Εάν f(x)=2x-1, x∈[-3,3] και g(x)=5-2x, x∈[3,7], να βρείτε τις gof και fog.

Λύση: $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=$

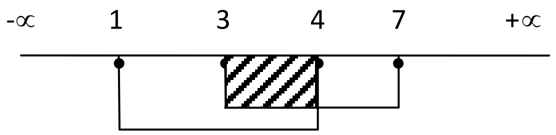
={x∈[-3,3] / 2x-1∈[3,7]}
={x∈[-3,3] / 3≤2x-1≤7}
={x∈[-3,3] / 4≤2x≤8}
={x∈[-3,3] / 2≤x≤4}
=[2,3].



g(f(x))=g(2x-1)=5-2(2x-1)
=-4x+7.

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x∈[3,7] / 5-2x∈[-3,3]}
={x∈[-3,3] / -3≤5-2x≤3}
={x∈[-3,3] / -8≤-2x≤-2}
={x∈[-3,3] / 4≥x≥1}
=[3,4].



f(g(x))=f(5-2x)=2(5-2x)-1
=-4x+9.

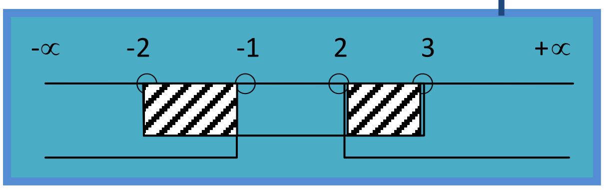
2. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού (3,7), να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog, όπου g(x)=x^2-x+1.

Λύση: $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x∈R / x^2-x+1∈[3,7]}
={x∈R / x^2-x+1≤7 και x^2-x+1≥3}
={x∈R / x^2-x-2≥0 και x^2-x-6≤0}
={x∈R / (x<-1 ή x>2) και (-2<x<3)}
=(-2,-1)U(2,3).

x	-∞		-1		2		+∞
x^2-x-2		+	○	-	○	+	

x	-∞		-2		3		+∞
x^2-x-6		+	○	-	○	+	



3. Βρείτε την fog, όταν $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ και g(x)= =x^2-x+2.

Λύση: $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x∈R / x^2-x+2≠4}
={x∈R / x^2-x-2≠0}
=R-{-1,2}
=(-∞,-1)U(-1,2)U(2,+∞) και

(fog)(x)=f(g(x))
=f(x^2-x+2)

$=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}$.

4. Βρείτε τις gof και fog, όταν $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ και $g(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Λύση:

● $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=$

={x≠1 / $\dfrac{1+x}{1-x}\neq -1$}
={x≠1 /1+x ≠ -1+x}
=R-{1}
=(-∞,1)U(1,+∞) και

(fog)(x)=f(g(x))

$=f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$=\dfrac{1-\dfrac{1+x}{1-x}}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}$

$=\dfrac{1-x-1-x}{1-x+1+x}$

$=\dfrac{-2x}{2}$=-x.

● $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=$

={x≠ -1 / $\dfrac{1-x}{1+x}\neq 1$}
={x≠ -1 /1-x ≠ 1+x}
={x≠ -1 / x ≠ 0}
=R-{-1,0}
=(-∞,-1)U(-1,0)U(0,+∞) και

(gof)(x)=g(f(x))

$=g\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$=\dfrac{1+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}$

$=\dfrac{1+x+1-x}{1+x-1+x}$

$=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$.

5. Έστω f:R→R με (fof)(x)=4-x ……………(1) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(2)=2.

Λύση: $(1) \overset{x=2}{\Rightarrow}$ f(f(2))=2……………………(2)

$(1) \overset{x=f(2)}{\Rightarrow}$ f(f(f(2)))=4-f(2) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ f(2)=4-f(2)

⇒2f(2)=4

⇒f(2)=2.

6. Έστω f:R→R με (fof)(x)=xf(x)……………(1) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι f(0)=0.

Λύση: $(1) \overset{x=0}{\Rightarrow}$ f(f(0))=0……………………(2)

$(1) \overset{x=f(0)}{\Rightarrow}$ f(f(f(0)))=f(0)f(f(0)) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ f(0)=0.

7. Αν f(x)=2x+3 και g(x)=4x+9, να δείξετε ότι gof=fog.

Λύση: Επειδή $A_f = A_g = R$

$\Rightarrow A_{f\circ g} = A_{g\circ f} = R$.

(f∘g)(x)=f(g(x))
=f(4x+9)
=2(4x+9)+3
=8x+21.

(g∘f)(x)=g(f(x))
=g(2x+3)
=4(2x+3)+9
=8x+21.

Άρα f∘g=g∘f.

8. Εάν f(x)=(ημx+συνx)^2-ημ2x-1 και g(0)=1, βρείτε το (g∘f)(2016).

Λύση:
Είναι f(x)=ημ^{2}x+συν^{2}x+2~~ημxσυνx~~-2~~ημxσυνx~~-1=
=1-1=0, και
(g∘f)(2016)=g(f(2016))=g(0)=1.

9. Εάν $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, να δείξετε ότι (fof)(x)=x, για κάθε x∈A$_f$.

Λύση: $A_{f\circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_f\}$

$=\{x \neq -1 \,/\, \dfrac{1-x}{1+x} \neq -1\}$

$=\{x \neq -1 \,/\, 1-x \neq -1-x\}$

$=R-\{-1\}= A_f$.

(f∘f)(x)=f(f(x))

$$=\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}$$

$$=\frac{1+x-1+x}{1+x+1-x}$$

$$=\frac{2x}{2}=x.$$

10. Βρείτε τις gof και fog, όταν $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ και $g(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

Λύση: Μετά από πράξεις (?) βρίσκουμε:

$A_{g\circ f} = ...R-\{3,8\}$

(g∘f)(x)=g(f(x))
=……..

$=\dfrac{4x-7}{8-x}$ και

$A_{f\circ g} = ...R-\{2, 9/2\}$

(f∘g)(x)=f(g(x))
=…….

$=\dfrac{3x-1}{9-2x}$.

11. Εάν f(x)=x^2-2x+3, x∈[-3,1] και g(x)=x+2, x∈[-2,3], να βρείτε τις gof και fog.

Λύση:

● $A_{g\circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} =$

={x∈[-3,1] / x^2-2x+3∈[-2,3]}

={x∈[-3,1] / -2≤ x^2-2x+3 ≤3}

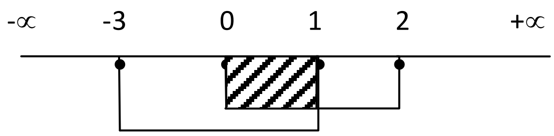
={x∈[-3,1] / x^2-2x+5 ≥0 και x^2-2x ≤0}

(1) (2)

Η ανίσωση (1) επειδή έχει Δ=-16<0, είναι αληθής για κάθε x∈R.

Η ανίσωση (2) έχει λύση x∈[0,2] ….(?). Άρα $A_{g\circ f}$ ={x∈[-3,1] / x∈[0,2]}

=[0,1].



(g∘f)(x)=g(f(x))
=g(x^2-2x+3)
= x^2-2x+5.

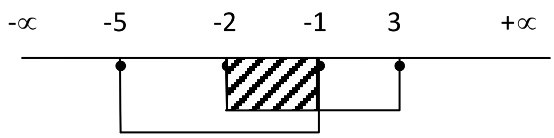
● $A_{f\circ g} = \{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\} =$

={x∈[-2,3] / x+2∈[-3,1]}

={x∈[-2,3] / -3≤x+2≤1}

={x∈[-2,3] / -5≤x≤-1}

=[-2,-1].



(f∘g)(x)=f(g(x))
=f(x+2)
= (x+2)^2-2(x+2)+3
=…….
= x^2+2x+3.

12. Βρείτε την gof , όταν $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ και $g(x)=\frac{x-3}{x-2}$.

● $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=$

$=\{x\neq -2 \,/\, \frac{x+1}{x+2}\neq 2\}$
$=\{x\neq -2 \,/\, x+1\neq 2x+4\}$
$=\{x\neq -2 \,/\, x\neq -3\}$
$=R-\{-2,-3\}$
$=(-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,+\infty)$ και
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=g\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\frac{x+1}{x+2}-3}{\frac{x+1}{x+2}-2}=\frac{x+1-3x-6}{x+1-2x-4}=\frac{-2x-5}{-x-3}=\frac{2x+5}{x+3}.$$

13. Εάν $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και g(x)=-x, να δείξετε ότι fog=-f.

Λύση:
Επειδή $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x\Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, είναι $A_f=A_g=R$. Άρα και $A_{f\circ g}=R=A_f$.…….(1)

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(-x)$

$$=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\ln\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

= -f(x)…………………………….………(2)
Από (1) και (2) $\Rightarrow f\circ g=-f$.

14. Έστω f,g:R→R τέτοιες ώστε g(x)=x-2 και $(f\circ g)(x)=x^2+x+1$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση: $(f\circ g)(x)=x^2+x+1\Rightarrow$
$f(g(x))=x^2+x+1\Rightarrow$
$f(x-2)=x^2+x+1$………………………(1)

$(1)\ \underset{x=y+2}{\overset{x-2=y}{\Longrightarrow}}\ f(y)=(y+2)^2+(y+2)+1$
$=y^2+5y+7$.

15. Ομοίως εάν f(x)=x+3 και $(f\circ g)(x)=e^{x+1}+3$, να βρείτε τον τύπο της g.

Λύση: $(f\circ g)(x)=e^{x+1}+3\Rightarrow$
$f(g(x))=e^{x+1}+3\Rightarrow$
$g(x)+3=e^{x+1}+3\Rightarrow$
$g(x)=e^{x+1}$.

16. Έστω f,g:R→R. Να δείξετε ότι:
i) Αν f άρτια και g περιττή, τότε gof και fog είναι άρτιες,
ii) Αν f και g περιττές, τότε gof και fog είναι περιττές.

Λύση:
i) (fog)(-x)=f(g(-x))
=f(-g(x)) γιατί g περιττή
=f(g(x)) γιατί f άρτια
=(fog)(x).
Άρα fog άρτια.
(gof)(-x)=g(f(-x))
=g(f(x)) γιατί f άρτια
=(gof)(x).
Άρα gof άρτια.
ii) (fog)(-x)=f(g(-x))
=f(-g(x)) γιατί g περιττή
=-f(g(x)) γιατί f περιττή
=-(fog)(x).
Άρα fog περιττή.
(gof)(-x)=g(f(-x))
=g(-f(x)) γιατί f περιττή
=-g(f(x)) γιατί g περιττή
=-(gof)(x).
Άρα gof περιττή.

17. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού το [7,27], να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x)=f(x^3+x-3)$.

Λύση: Πρέπει $x^3+x-3\in[7,27]$
$\Leftrightarrow 7\leq x^3+x-3\leq 27$
$\Leftrightarrow x^3+x-3\geq 7$ και $x^3+x-3\leq 27$
$\Leftrightarrow x^3+x-10\geq 0$ και $x^3+x-30\leq 0$.
(1) (2)

1	**0**	**1**	**-10**	**2**
↓	2	4	10	
1	2	5	0	

$(1)\ \overset{Horner}{\Leftrightarrow}\ (x-2)(x^2+2x+5)\geq 0$
$\Leftrightarrow x-2\geq 0$
$\Leftrightarrow x\geq 2$……………………………………(3)
γιατί $x^2+2x+5>0$ για κάθε πραγμα-τικό αριθμό x, αφού Δ= -16<0.

1	**0**	**1**	**-30**	**3**
↓	3	9	30	
1	3	10	0	

$(2)\ \overset{Horner}{\Leftrightarrow}\ (x-3)(x^2+3x+10)\leq 0$
$\Leftrightarrow x-3\leq 0$
$\Leftrightarrow x\leq 3$……………………………………(4)
γιατί $x^2+3x+10>0$ για κάθε πραγ-ματικό αριθμό x, αφού Δ= -31<0.
Από (3) και (4) $\Rightarrow 2\leq x\leq 3\Rightarrow A_g=[2,3]$.