Λύσεις θεμάτων στην συνέχεια

1. Σωστό – Λάθος στις πανελλήνιες:

i. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή. Μονάδα 1

ii. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)<0 και υπάρχει ξ∈(α,β) ώστε f(ξ)=0,τότε κατ' ανάγκη f(β)>0. Μονάδες 2

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∈Δ, ή είναι αρνητική για κάθε x∈Δ, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ. Μονάδες 2

iv. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μονάδες 2

v. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 2

vi. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου
Α= $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και Β= $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$. Μονάδες 2

vii. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m. Μονάδες 2

Απάντηση:

i	ii	iii	iv	v	vi	vii
Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ

2. Πανελλήνιες θετική κατ. 1980:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|(x-1)}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$.

Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση:

$$f(x)=\begin{cases} \mathbf{x-1}, & \textbf{αν } x>0 \\ -x+1, & \textbf{αν } \mathbf{x<0} \\ 1, & \textbf{αν } x=0 \end{cases}$$

• Στο (-∞,0), f(x)=-x+1 συνεχής ως πολυωνυμική.

• Στο (0,+∞), f(x)=x-1 συνεχής ως πολυωνυμική.

• Στο x_0=0.

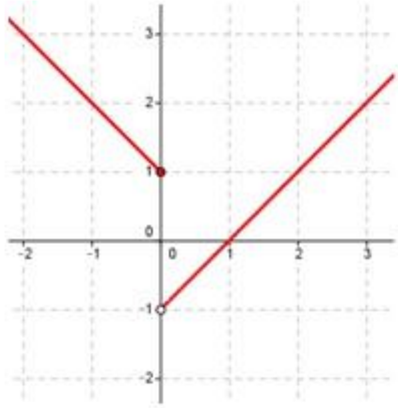
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1)=1.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Άρα δεν είναι συνεχής στο x_0=0.



3. Θέμα 2ον 1983 (Οικονομικό):

Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2-9x+2}{x-2}, & \textbf{αν } x\in R-\{2\} \\ 7 & \textbf{αν } x=2 \end{cases}$ στο x_o=2.

ii) $g(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν } x<0 \end{cases}$ στο x_o=0.

Λύση:

i) • Συνεχής στα διαστήματα (-∞,2) και (2,+∞) ως ρητή $f(x)=\dfrac{4x^2-9x+2}{x-2}$.

• Στο x_0=2.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{4x^2-9x+2}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{(4x^2-9x+2)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2}(8x-9) =7 =f(2).$$

Άρα είναι συνεχής στο x_0=2.
Επομένως είναι συνεχής στο R.

ii) • Συνεχής στα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞) ως ρητή $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και πολυωνυμική f(x)=x αντίστοιχα.

• Στο x_0=0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} =-\infty.$$

Άρα δεν είναι συνεχής στο x_0=0.
Επομένως είναι συνεχής στο R

4. Μαθηματικό Αθηνών:

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $|f(x)|\leq |x|$ για κάθε x∈R, είναι συνεχής στο x_o=0.

ii) Αν η g είναι συνεχής στο $x_o=0$ με $g(0)=0$ και $|f(x)|\le|g(x)|$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

Λύση:

i) $|f(x)|\le|x| \overset{x=0}{\Rightarrow} |f(0)|\le|0|$

$\Rightarrow f(0)=0.$

$|f(x)|\le|x| \Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x|.$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=0\\ \lim\limits_{x\to0}x=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτ.παρ.}} \lim_{x\to0}f(x)=0\Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$……..λόγω της (1).

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

ii) $|f(x)|\le|g(x)| \overset{x=0}{\Rightarrow} |f(0)|\le|\underbrace{g(0)}_{0}|$

$\Rightarrow f(0)=0$…………………(2)

$|f(x)|\le|g(x)| \Leftrightarrow -|g(x)|\le f(x)\le|g(x)|.$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}(-|g(x)|) \underset{\text{συν.στο } 0}{\overset{g(x)}{=\!=\!=}} -|g(0)|=0\\ \lim\limits_{x\to0}|g(x)| \underset{\text{συν.στο } 0}{\overset{g(x)}{=\!=\!=}} |g(0)|=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτ.παρ.}}$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$……..λόγω της (2).

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

5. Φυσικό Θες/νίκης:

Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $|\sigma\upsilon\nu x-1|\le f(x)\le|x|$ για κάθε $x\in R$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

ii) Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα εάν $e^x-1\le f(x)\le x$ για κάθε $x\in R$.

Λύση:

i) $|\sigma\upsilon\nu x-1|\le f(x)\le|x| \overset{x=0}{\Rightarrow} |\underbrace{\sigma\upsilon\nu 0-1}_{1}|\le f(0)\le|0|$

$\Rightarrow f(0)=0$………………(1)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}|\sigma\upsilon\nu x-1|=\sigma\upsilon\nu 0-1=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to0}|x|=|0|=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτ.παρ.}}$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$……..λόγω της (1).

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

ii) $e^x-1\le f(x)\le x \overset{x=0}{\Rightarrow} e^0-1\le f(0)\le0$

$\Rightarrow 0\le f(0)\le0$

$\Rightarrow f(0)=0$……………………(2)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)=e^0-1=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to0}x=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτ.παρ.}}$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$……..λόγω της (2).

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

6. Μαθηματικό Πατρών: Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+\lambda xy$ για κάθε $x,y\in R$ και $\lambda\in R$ μια σταθερά. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να δειχθεί ότι είναι συνεχής στο R.

Λύση: $f(x+y)=f(x)+f(y)+\lambda xy$

$\overset{x=y=0}{\Longleftrightarrow} f(0)=f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0)=0.$

Θέτω $x=x_0+h$
Όταν $x\to x_0$ τότε $h\to 0$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=$

$=\lim\limits_{h\to0}\left(f(x_0)+f(h)+\lambda x_0h\right)=$

$=f(x_0)+\lim\limits_{h\to0}f(h)+\lambda x_0\lim\limits_{h\to0}h=$

$=f(x_0)+\underbrace{f(0)}_{0}+0$

Γιατί f συνεχής στο 0

$=f(x_0).$

Άρα είναι συνεχής στο x_0 και επειδή x_0 τυχαίο, είναι συνεχής στο R.

7. Προτεινόμενο:

Να δείξετε ότι η εξίσωση

$x^4+(\alpha^2-2)x^2+(\alpha-1)x-\alpha^2=0,\ \alpha\in R^*,$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,2).

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση

$f(x)=x^4+(\alpha^2-2)x^2+(\alpha-1)x-\alpha^2$

στο διάστημα [0,2].

- συνεχής στο [0,2] ως πολυωνυμική,
- $$\left.\begin{array}{l}f(0)=-\alpha^2<0\\ f(2)=\ldots=3\alpha^2+2\alpha+6>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(2)<0.$$

Γιατί $\Delta=-68<0$ άρα $3\alpha^2+2\alpha+6>0$ για κάθε $\alpha\in R^*$.

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4+(\alpha^2-2)x^2+(\alpha-1)x-\alpha^2=0$ στο διάστημα (0,2).

8. Προτεινόμενο:

Έστω $p,q\in R_+^*$ και η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\ne f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{pf(\alpha)+qf(\beta)}{p+q}$.

Λύση: $f(x_o)=\dfrac{pf(\alpha)+qf(\beta)}{p+q}$

$\Leftrightarrow (p+q)f(x_o)-pf(\alpha)-qf(\beta)=0.$

Εφαρμόζουμε το Θ. **Bolzano** για την συνάρτηση

$g(x)=(p+q)f(x)-pf(\alpha)-qf(\beta)$

στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

- συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, γιατί f συνεχής,
- $$\left.\begin{array}{l}g(\alpha)=q\left(f(\alpha)-f(\beta)\right)\\ g(\beta)=-p\left(f(\alpha)-f(\beta)\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ g(\alpha)\cdot g(\beta)=-pq\left(f(\alpha)-f(\beta)\right)^2<0$ …. γιατί $p,q\in R_+^*$ και $f(\alpha)\ne f(\beta)$.

$x\eta\mu\dfrac{1}{x}\ \Leftrightarrow (p+q)f(x_o)-pf(\alpha)-qf(\beta)=0$

$\Leftrightarrow f(x_o)=\dfrac{pf(\alpha)+qf(\beta)}{p+q}.$

9. Προτεινόμενο:
Έστω f:[0,1]→[0,1], g:[0,1]→[0,1] συνεχείς συναρτήσεις στο [0,1], με g(0)=0 και g(1)=1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα [0,1].

Λύση: Βλέπε άσκηση 17 προηγούμενου φυλλαδίου, για α=0 και β=1.

10. Προτεινόμενο: Δίνεται η συνάρτηση f με f(χ)= $=\frac{\chi^3}{16}$-ημπχ+7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή $7/2$ στο διάστημα [-4,4].

Λύση: Η f είναι συνεχής στο [-4,4] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
f(-4)=-4-ημ(-4π)+7
=-4+ημ4π+7…………..γιατί ημ4π=0
=3.
f(4)=4-ημ4π+7
=4+7
=11.
Επειδή $7/2$ ∈(3,11), από το **θεώρημα ενδιαμέσων τιμών**, η συνάρτηση παίρνει την τιμή $7/2$ στο διάστημα [-4,4].

11. Προτεινόμενο: Δίνεται η συνάρτηση f με f(χ)= $=\frac{\chi^3}{4}$-ημπχ+3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή $8/3$ στο διάστημα [-2,2].

Λύση: Η f είναι συνεχής στο [-2,2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
f(-2)=-2-ημ(-2π)+3
=-2+ημ2π+3…………..γιατί ημ2π=0
=1.
f(2)=2-ημ2π+3
=2+3
=5.
Επειδή $8/3$ ∈(1,5), από το **θεώρημα ενδιαμέσων τιμών**, η συνάρτηση παίρνει την τιμή $8/3$ στο διάστημα [-2,2].

12. Προτεινόμενο:
Δίνεται η συνάρτηση f:[0,1]→Q (όπου Q το σύνολο των ρητών αριθμών), που είναι συνεχής στο [0,1],με $f(5/8)=5/8$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Λύση: Βλέπε άσκηση 37 προηγούμενου φυλλαδίου, με την διαφορά ότι το σύνολο τιμών είναι οι ρητοί αριθμοί και όχι οι ακέραιοι.

13. Θέματα πολλών εξετάσεων:
Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x} & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο R.

Λύση:
- Στα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞) είναι f(x)=xημ$\frac{1}{x}$, συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Στο x_0=0.

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq 1 \Leftrightarrow \left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq |x|$$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow -|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq |x| \\ \lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0\end{array}\right\}\overset{\kappa\rho\iota\tau.\pi\alpha\rho.}{=\!=\!=\!=\!=\!>}\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, δηλαδή είναι συνεχής στο x_0=0.

14. Πανελλήνιες θετική κατ. 1979:
α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα;
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x\neq 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x=0} \end{cases}$ είναι συνεχής στο R.

Λύση:
α) Θεωρία.
β) Στα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞) είναι f(x)=x^2ημ$\frac{1}{x}$, συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Στο x_0=0.

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq 1 \Leftrightarrow \left|x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\frac{1}{x}\leq x^2 \\ \lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0\end{array}\right\}\overset{\kappa\rho\iota\tau.\pi\alpha\rho.}{=\!=\!=\!=\!=\!>}\lim_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0\cdot$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, δηλαδή είναι συνεχής στο x_0=0.

15. Θέματα πολλών εξετάσεων:
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f για την οποία ισχύει |f(x)-f(y)|≤|x-y| για κάθε x,y∈R, είναι συνεχής στο R.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε x_0∈R, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l}|f(x)-f(y)|\leq|x-y| \overset{y=x_0}{=\!=\!>} |f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0| \\ \quad\Leftrightarrow -|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq|x-x_0| \\ \lim\limits_{x\to x_0}(-|x-x_0|)=\lim\limits_{x\to x_0}(|x-x_0|)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\overset{\kappa\rho\iota\tau.\pi\alpha\rho.}{=\!=\!=\!>}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

16. Προτεινόμενο:

Έστω f:R→R μια πολυωνυμική συνάρτηση με $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\alpha_0\alpha_\nu<0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

Λύση:

• $\alpha_\nu>0$.

Τότε $\alpha_0<0$.

$f(0)=\alpha_0<0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_\nu x^\nu\right)=+\infty$ ……γιατί $\alpha_\nu>0$

Άρα f(x)>0 κοντά στο +∞.

Επομένως υπάρχει ξ∈R, ξ>0 με f(ξ)>0.

Άρα f(0)·f(ξ)<0 και επειδή είναι συνεχής στο [0,ξ] ως πολυωνυμική, εφαρμόζεται το θ. Bolzano στο [0,ξ], επομένως η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,ξ) άρα θετική.

• $\alpha_\nu<0$.

Τότε $\alpha_0>0$.

$f(0)=\alpha_0>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_\nu x^\nu\right)=-\infty$ ……γιατί $\alpha_\nu<0$

Άρα f(x)<0 κοντά στο +∞.

Επομένως υπάρχει ξ∈R, ξ>0 με f(ξ)<0.

Άρα f(0)·f(ξ)<0 και επειδή είναι συνεχής στο [0,ξ] ως πολυωνυμική, εφαρμόζεται το θ. Bolzano στο [0,ξ], επομένως η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,ξ) άρα θετική.

17. Προτεινόμενο:

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [0,2]→R τέτοια ώστε f(0)=f(2). Να δείξετε ότι υπάρχουν x,y∈[0,2] τέτοιοι ώστε $|x-y|=1$ και f(x)=f(y).

Λύση: Βλέπε άσκηση 40 προηγούμενου φυλλαδίου.

18. Μαθηματικό Αθηνών:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g:Δ→R όπου Δ είναι ένα διάστημα και $x_o\in\Delta$. Αν $f(x_o)\neq g(x_o)$ και f(x)=g(x) για κάθε $x\in\Delta-\{x_o\}$,να δείξετε ότι δεν είναι δυνατόν οι f,g να είναι ταυτόχρονα συνεχείς στο Δ.

Λύση: f(x)=g(x) ⇒ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ …..(1)

Εάν f,g είναι ταυτόχρονα συνεχείς στο Δ, τότε η (1) ⇒ $f(x_0)=g(x_0)$, άτοπο γιατί $f(x_o)\neq g(x_o)$.

Άρα οι f,g δεν είναι ταυτόχρονα συνεχείς στο Δ.

19. END