

## ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ , με  $x \neq 0$ .

- i. Να βρείτε την παράγωγό της και να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο και να μελετήσετε την κυρτότητα της συνάρτησης και εάν έχει σημείο καμπής.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.
- iv. Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε την γραφική παράστασή της.

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii. Να υπολογίσετε την παράγωγό της, να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να δείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι

$$f''(x) = \frac{2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2}{\ln^3 x} \text{ και να μελετήσετε}$$

την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

- iv. Να εξετάσετε εάν έχει ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ ,  $x \neq 1$ .

- i. Να βρείτε την παράγωγό της και να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι

$$f''(x) = \frac{6x(2x^3 + 1)}{(x^3 - 1)^3} \text{ και να μελετήσετε την}$$

συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες.

- iv. Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα και ότι άλλο χρειάζεται, να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + \ln x - 1$ ,  $x > 0$ .

- i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x = \ln\left(\frac{e}{x}\right)^e \text{ έχει μοναδική ρίζα στο } \mathbb{R}_+.$$

- ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες.

- iv. Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα και ότι άλλο χρειάζεται, να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να υπολογίσετε την παράγωγό της και να εξετάσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο και να εξετάσετε την συνάρτηση ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιπτή,
- iv. Με την βοήθεια των προηγούμενων ερωτημάτων να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ ,  $x \neq 1$ .

- i. Να υπολογίσετε την παράγωγό της, να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iv. Να εξετάσετε εάν έχει ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 1)^2}$ ,  $x \neq 1$ .

- i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
- iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \alpha$ , για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ .

- i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. Μονάδες 8
- ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 4
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ . Μονάδες 6
- iv. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μονάδες 7

9. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=\ln x$ ,  $x>0$  και  $g(x)=\frac{x}{1-x}$ ,

$x \neq 1$ .

i. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ . Μονάδες 5

ii. Αν  $h(x)=(f \circ g)(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ,  $x \in (0,1)$ , να απο-

δείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 6

iii. Αν  $\phi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να μελετήσετε τη

συνάρτηση  $\phi$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 7

iv. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.) Μονάδες 7

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ , με

$x \neq (2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

i. Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο  $T=2\pi$ . Μονάδες 5

ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα σε διάστημα μιας περιόδου. Μονάδες 6

iii. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής σε διάστημα μιας περιόδου. Μονάδες 6

iv. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  σε διάστημα μιας περιόδου και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μονάδες 8

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & \alpha\nu \ x \in [-1,0) \\ e^{x\eta\mu x}, & \alpha\nu \ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της. Μονάδες 5

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής και να κατασκευάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση. Μονάδες 6

iv. Να λύσετε την εξίσωση

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}.$$

Μονάδες 8

12. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)=\ln\sqrt{x}$ ,  $x>0$  και

$$g(x)=\frac{1+x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

i. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $(f \circ g)(x)$  και να δείξετε ότι είναι περιπτή. Μονάδες 5

ii. Εάν  $h(x)=(f \circ g)(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ,  $x \in (-1,1)$ ,

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 6

iii. Αν  $\phi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να μελετή-

σετε τη συνάρτηση  $\phi(x)$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 7

iv. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\phi(x)$  και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.) Μονάδες 7

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f(x)$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 7

ii. Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση  $f(x)$  αντιστρέφεται και αν ναι, να βρείτε την αντίστροφή της. Μονάδες 4

iii. Αν  $\phi(x)=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}$ ,  $x \in (0,2)$ , να

μελετήσετε τη συνάρτηση  $\phi(x)$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Μονάδες 8

iv. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\phi(x)$  και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.) Μονάδες 6

14. Δγγηδη