49. ***23199-4:*** Έστω $f:(1,+\infty)\to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$να ισχύει:

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}\ \ldots(1) \text{ και } f(e)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1.$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Για κάθε x > 1είναι:

$g'(x) = (f^2(x) – \ln x)' = 2f(x)f'(x) - \frac{1}{x}$

$= 1 – 1$

$= 0$………………λόγω της (1).

οπότε η g είναι σταθερή.

Ισχύει $g(x) = c \Leftrightarrow f^2(x)-\ln x=c$

$\Leftrightarrow f^2(x)=\ln x+c$………………………………………………………………………(2)

$(2) \overset{x=e}{\Longleftrightarrow} c = 0.$

$(2) \overset{c=1}{\Longleftrightarrow} f^2(x)=\ln x$…………………………………………………………………………(3)

$f(x) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0 = \frac{1}{2}$ αδύνατη.

Άρα η, από εξίσωση f(x) = 0 είναι αδύνατη και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(e)=1>0$, είναι f(x) > 0, για κάθε x > 1.

$(3) \overset{f(x)>0}{\Longleftrightarrow} f(x)=\sqrt{\ln x}$, x > 1.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο B, διέρχεται από το A.

H f είναι παραγωγίσιμη μ $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ε, x > 1 και $f'(e)=\frac{1}{2e}$, οπότε η εφαπτομένη της στο B έχει εξίσωση $y-f(e)=f'(e)(x-e)$, δηλαδή $y-1=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$.

Με x = -e έχουμε $y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ = 0, οπότε η εφαπτομένη της στο B διέρχεται πραγματικά από το A.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε x > 1 ισχύει $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

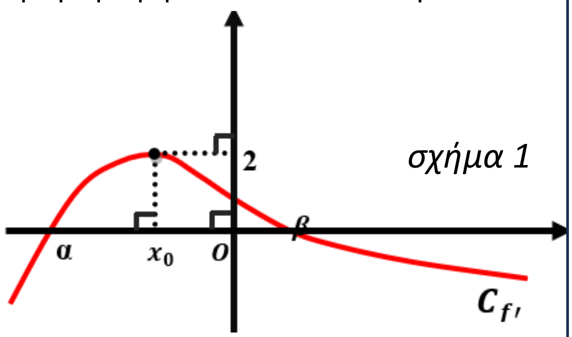
Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)=lnx, x > 1 η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε διάστημα της μορφής [x,x+1], x > 1. Επομένως, υπάρχει ξ ∊ [x,x+1], ώστε $\frac{1}{\xi}=\frac{h(x+1)-h(x)}{x+1-x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) – \ln x$………………(4)

Είναι $1 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{x+1} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$, που είναι το ζητούμενο.

50. ***23210-4:*** Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα 1 δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$. Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$
- τα α,β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha)<0,\ \text{και}\ f(\beta)>0.$



σχήμα 1

- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Καθώς η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και έχει μόνο δύο ρίζες, τους αριθμούς α και β, από άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Bolzano, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\alpha)$, (α,β), $(\beta,+\infty)$. Με χρήση της γραφικής παράστασης της $f'(x)$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	-∞		α		β		+∞
f΄(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘		↗		↘	

Τ.Ε. Τ.Μ.

στον οποίο διακρίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα τοπικά ακρότατα, με την τιμή $f(\alpha)$ να είναι τοπικό ελάχιστο και την τιμή $f(\beta)$ να είναι τοπικό μέγιστο.

β) Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\alpha)$, (α,β), $(\beta,+\infty)$, μπορούμε να βρούμε τα επιμέρους σύνολα τιμών.

- $f((-\infty,\alpha]) \overset{f\downarrow}{=\!=} \left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = [\,f(\alpha),+\infty)$, στο οποίο διάστημα ανήκει ο αριθμός μηδέν, αφού $f(\alpha)<0$.

Άρα, υπάρχει μοναδικός, λόγω μονοτονίας, αριθμός $\rho_1 \in(-\infty,\alpha)$ ώστε $f(\rho_1)=0$.

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)<0$, από την εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, $\rho_2 \in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\rho_2)=0$.

- $f([\beta,+\infty)) \overset{f\downarrow}{=\!=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \ f(\beta)\right] = (-\infty,\ f(\beta)]$, στο οποίο διάστημα ανήκει ο αριθμός μηδέν, αφού $f(\beta)>0$. Άρα, υπάρχει μοναδικός, λόγω μονοτονίας, αριθμός $\rho_3 \in(\beta,+\infty)$ ώστε $f(\rho_3)=0$.

Έτσι, υπάρχουν τρεις ακριβώς ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x,x+1]$ για κάθε $x\in$ IR, θα υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x)$……………..(1)

Αλλά $f'(\xi)\leq f'(x_0)=2$, αφού η $f'(x)$ έχει ολικό μέγιστο στη θέση x_0.

Ώστε $f(x+1)-f(x) \leq 2$, για κάθε $x \in$ IR, λόγω της (1).

51. 23311-4: Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\ m/sec$. (Μονάδες 5)

Λύση:

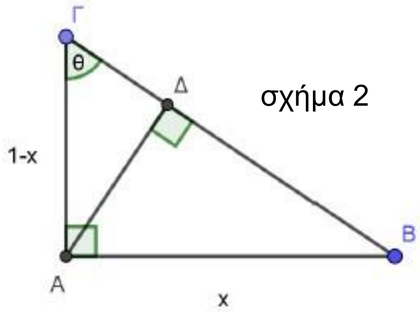
α) Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{A}=90^0$ και $ΑΒ = x$, $ΑΓ = 1 - x$.

Τότε $E(x) = (ΑΒΓ) = \frac{(ΑΒ)\cdot(ΑΓ)}{2} = \frac{x\cdot(1-x)}{2} = \frac{x-x^2}{2}$, $0 < x < 1$.

Έχουμε: $E΄(x) = \frac{1-2x}{2}$, οπότε η $E΄(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = \frac{1}{2}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της E στο (0,1) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Ε΄(x)	+	0	-
E(x)	↗	Ο.Μ.	↘



σχήμα 2

Επομένως το μέγιστο εμβαδόν παρουσιάζεται όταν $x = \frac{1}{2}$ και είναι ίσο με $E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$, ενώ δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

β) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:
$(ΒΓ) = \sqrt{(AB)^2 + (AΓ)^2} = \sqrt{x^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$, 0 < x < 1.
Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $0 < x < 1$.
Έχουμε: $f΄(x) = 4x - 2$, οπότε η $f΄(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = \frac{1}{2}$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της f στο (0,1) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘	Ο.Ε.	↗

Επομένως παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$ και είναι ίσο με $f(\frac{1}{2})$ = **…** = $\frac{1}{2}$, ενώ δεν παρουσιάζει μέγιστο.

Άρα η ελάχιστη τιμή του $(ΒΓ)$ είναι ίση με (ΒΓ)= $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, για $x = \frac{1}{2}$.

γ) Έστω $ΑΔ = υ$ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου (σχήμα 2).
Ισχύει $E = \frac{(ΒΓ)\cdot υ}{2} \Leftrightarrow υ = \frac{2E}{(ΒΓ)}$.

Έχουμε: $0 < E \leq \frac{1}{8}$, $με\ την\ ισότητα\ να\ ισχύει\ όταν\ x\ =\ \frac{1}{2}$

$0 <$ (ΒΓ) $\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(ΒΓ)} \leq 2\sqrt{2}$, με την ισότητα να ισχύει όταν $x = \frac{1}{2}$

$\overset{(x)}{\Rightarrow} \frac{2E}{(ΒΓ)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow υ \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$, με την ισότητα να ισχύει όταν $x = \frac{1}{2}$

δ) Επειδή $εφθ = \frac{(AB)}{(AΓ)} = \frac{x}{1-x}$, $0 < x < 1$ και το μήκος x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε:

$εφθ(t) = \frac{x(t)}{1-x(t)}$……………………………………………………………………….(1)

$(εφθ(t))΄ = \left(\frac{x(t)}{1-x(t)}\right)' = \frac{x'(t)(1-x(t)) - x(t)(1-x(t))'}{(1-x(t))^2} \Leftrightarrow \frac{θ'(t)}{συν^2θ(t)} = \frac{x'(t)}{(1-x(t))^2}$ …….(2)

Η σχέση (1) για $t = t_0$, δίνει $εφθ(t_0) = \frac{x(t_0)}{1-x(t_0)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Άρα $θ(t_0) = π/4$ και $συν^2θ(t_0) = ½$.

<u>Εναλλακτικά</u>: Για $t = t_0$, $x(t_0) = ½$ και $1 - x(t_0) = 1 - ½ = ½$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Επομένως $θ(t_0) = π/4$ και $συν^2θ(t_0) = ½$.

Οπότε η σχέση (2) δίνει $\frac{θ'(t_0)}{συν^2θ(t_0)} = \frac{x'(t_0)}{(1-x(t_0))^2} \Leftrightarrow … \Leftrightarrow θ΄(t_0) = 0{,}2\ rad$/sec.

52.*23376-4:* *Δίνονται οι συναρτήσεις:*

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in$ *IR και*
- $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in$ IR, τότε:

α) *Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση* $h = g \circ f$. *(Μονάδες 7)*

β) *Να αποδείξετε ότι:*

i. *η συνάρτηση* h *είναι περιττή.* *(Μονάδες 4)*

ii. *η συνάρτηση* h *είναι “1-1”.* *(Μονάδες 6)*

γ) *Να λυθεί η εξίσωση* $h(x-1) + h\left(ln\frac{1}{x}\right) = 0, x > 0$. *(Μονάδες 8)*

Λύση:

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x για κάθε $x \in$ IR, είναι f(x) > 0 για κάθε x ∈ IR.

$D_{gof} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in IR \;\; / f(x) > 0\}$ = IR.

h(x) = g(f(x)) = g($\sqrt{x^2+1} - x$)

= $ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$, για κάθε x ∈ IR.

β) i. h(-x) = $ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - (-x)\right)$

= $ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$

= $ln\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}$

= $ln\frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$

= $ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$

= $ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

= $ln1 - ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

= $-ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

= $-h(x)$.

D_h = IR, συμμετρικό ως προς το 0.
Άρα για κάθε x ∈ IR, είναι και -x ∈ IR.

Επομένως η συνάρτηση h είναι περιττή.

ii. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = \left(ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right)'$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{\sqrt{x^2+1}-x}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}-x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

οπότε είναι γνησίως φθίνουσα, άρα είναι και "1-1”.

γ) $h(x-1) + h\left(ln\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow h(x-1) + h(-lnx) = 0$

$\Leftrightarrow h(x-1) = -h(-lnx)$

$\overset{h\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{\Leftrightarrow} h(x-1) = h(lnx)$

$\overset{h\ "1-1"}{\Leftrightarrow} x-1=lnx$

$\Leftrightarrow x-1-lnx=0.$

$\Leftrightarrow x=1$…………εφαρμογή 2 σελίδα 148 σχ. Βιβλίου.

53.23375-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in$ IR.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in$ IR είναι $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 6)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το IR. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x,\ \ x\in$ IR. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x ∊ IR με $f\,'(x)=\left(ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)'$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{1}{\cancel{\sqrt{x^2+1}-x}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}-x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αφού είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}<0$ για κάθε $x\in$ IR. Επομένως είναι «1-1» και άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών f(IR) της f.

$D_{f^{-1}}=$ f(IR) $\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$ = (-∞, +∞), γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$=\lim\limits_{u\to0^+}lnu$

= -∞

και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$=\lim\limits_{w\to+\infty}lnw$

= +∞

Άρα f(IR) = IR.

Θέτω u=$\sqrt{x^2+1}-x$ *.*

$\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$\overset{+\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}$ *0,*

με u=$\sqrt{x^2+1}-x>0$

Θέτω w=$\sqrt{x^2+1}-x$ *.*

$\lim\limits_{x\to-\infty}w=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$=+\infty.$

γ) $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}\left(x+f(x)\right)\right)<f(x)$

$\Leftrightarrow x+\cancel{f(x)}\cancel{<f(x)}$

$\Leftrightarrow$ *x < 0.*

54.24579-4: *Δίνεται συνάρτηση* $f:(0,+\infty)\to$ IR *με τύπο* $f(x)=2\,ln\,x-x.$

α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa,\ \ \kappa \in$ IR. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) στο (0, +∞).

i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=(2\ln x-x)'=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$.

x	0	2	+∞
f΄(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Ο.Ε. f(1)= -1

Η f είναι συνεχής στο διάστημα (0,2], με f '(x) > 0 για κάθε x∈(0,2]. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,2].

Η f είναι συνεχής στο διάστημα [2, +∞), με f ΄(x) < 0 για κάθε x∈[2, +∞). Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [2, +∞).

ii. • $f\big((0,2]\big) \overset{\substack{f\uparrow \\ \sigma\tau o\ (0,2]}}{=} \left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\ ,\ f(2)\right]$

$= \left(\lim_{x\to 0^+}(2\ln x - x)\ ,\ 2(\ln 2-1)\right]$

$= (-\infty\ ,\ 2(\ln 2-1)]$.

• $f\big([2,+\infty)\big) \overset{\substack{f\downarrow \\ \sigma\tau o\ [2,+\infty)}}{=} \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(2)\right]$

$= (-\infty\ ,\ 2(\ln 2-1)]$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2\ln x - x) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\frac{\ln x}{x}-1\right)\right]$

$= +\infty\cdot(-1)$

$= -\infty$,

γιατί $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) \overset{\substack{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \\ DLH}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$

$= 0$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f\big((0,2]\big) \cup f\big([2,+\infty)\big) = (-\infty\ ,\ 2(\ln 2-1)]$.

iii. Από το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο το f(2)=2(ln2-1). Η θέση του μέγιστου είναι το $x_0=2$.

β) Για να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=κ, κ ∈IR, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

• Αν κ > 2(ln2-1), η εξίσωση είναι αδύνατη, διότι το κ δεν είναι τιμή της συνάρτησης.

• Αν κ = 2(ln2-1), η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα, την x=2, η οποία είναι η θέση του ολικού μέγιστου της f.

• Αν κ < 2(ln2-1), η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1∈(0,2), x_2∈(2,+∞), διότι η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα και το κ ανήκει στο $f\big((0,2]\big)$ και στο $f\big([2,+\infty)\big)$.

55.24587-4: *Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - \ln x_0|$.*

α) *Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,(x_0 - \ln x_0)$.* *(Μονάδες 5)*

β)

i. *Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε.* *(Μονάδες 12)*

ii. *Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.* *(Μονάδες 3)*

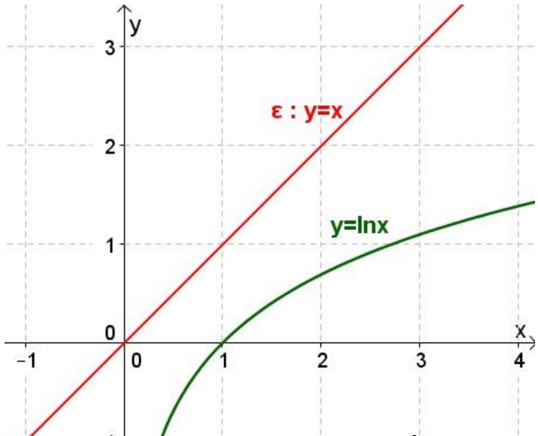
γ) *Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.* *(Μονάδες 5)*

Λύση:

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι x – lnx >0 ή lnx < x.

1ος τρόπος:

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=x βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x)=lnx (σχήμα 1). Άρα lnx < x.



σχήμα 1

2ος τρόπος:

Ως γνωστόν ισχύει ότι lnx ≤ x – 1 (εφαρμογή 2 σελ. 148).
Άρα lnx ≤ x – 1 < x.

3ος τρόπος:

Έστω h(x)=x-lnx, για κάθε x > 0.

h΄(x) = $1-\frac{1}{x}$ = $\frac{x-1}{x}$, της οποίας τον πίνακα μεταβολών βλέπετε στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	+∞
h΄(x)	-	0	+
h(x)	↘		↗

Ο.Ε. h(1)=1

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 1 για x=1.
Άρα h(x) ≥ h(1)

⇔ x – lnx ≥ 1 > 0

⇒ x – lnx > 0

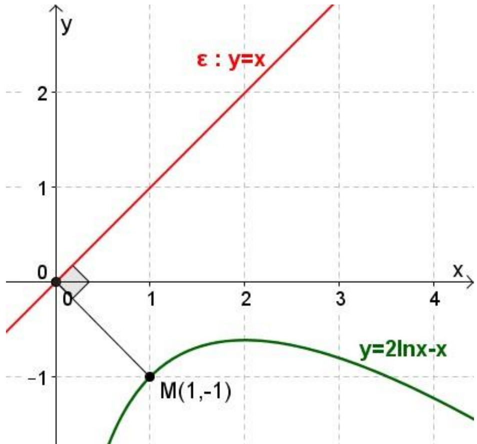
⇒ x > lnx, για κάθε x > 0.

β)

i. d(x) = $\sqrt{2}(x-lnx)$, x > 0.

d΄(x) = $\sqrt{2}(x-lnx)'$ = $\sqrt{2}\cdot\frac{x-1}{x}$, η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1.

f(1)= -1. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(1, -1) (σχήμα 2).



σχήμα 2

ii. Η ελάχιστη απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε, είναι η d(1) = $\sqrt{2}$.

γ) Είναι f΄(x) = $\frac{2}{x}-1$, x > 0.

Έστω $x_1 \in (0, +\infty)$ η τετμημένη σημείου της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη με την ευθεία y=x.

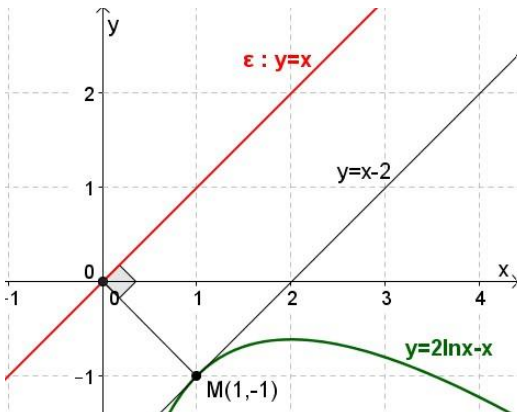
Τότε f΄(x_1) = λ_ε ⇔ $\frac{2}{x_1}-1=1$

⇔ x_1=1.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της (1, -1) είναι η ευθεία:
y-f(1)=f(1)(x-1) ⇔ y+1=x-1

⇔ y=x-2.

Το σημείο επαφής (1, -1), είναι το ίδιο σημείο Μ του ερωτήματος (βi) (σχήμα 3).



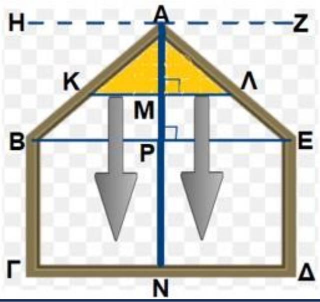
σχήμα 3

56.25257-4: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $ΒΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΕ$. Είναι $ΑΡ = 0{,}8$m, $ΒΕ = 1{,}6$m, $ΑΜ = x$ m, $ΒΓ = 1$m. Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση $ΗΖ$, με σταθερό ρυθμό, ώστε το M να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AN (με $AM \neq 0$). Αν $E = E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

1) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E, ισχύει $E(x)=\begin{cases} x^2 & ,\ \text{αν } x \in \left(0,\frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x-\frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right] \end{cases}$, σε m^2. (Μονάδες 8)

2) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x, όταν $x = \frac{4}{5}$ m, είναι ίσος με $E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$ m^2/m. (Μονάδες 9)

3) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5}$ m, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0{,}08$ m/s για κάθε $t \geq 0$. (Μονάδες 8)



Λύση:

α) Επειδή το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΝ με ΑΜ ≠ 0, ισχύει 0 < (ΑΜ) < (ΑΝ)

$\Leftrightarrow 0 < x < 0{,}8 + 1$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1{,}8$

$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{9}{5}$

$\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{9}{5}\right]$.

• Όταν το Μ κινείται εσωτερικά του ΑΡ, είναι $x \in \left(0, \frac{4}{5}\right]$ και Ε = (ΑΚΛ).

Τα όμοια τρίγωνα ΑΜΛ και ΑΡΕ, έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{(AM)}{(AP)} = \frac{x}{0{,}8} = \frac{5x}{4}$.

Οπότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{(AM\Lambda)}{(APE)} = \lambda^2$

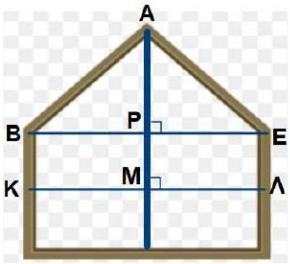
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{E}{2}}{\frac{(AP)\cdot(PE)}{2}} = \left(\frac{5x}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{0{,}8\cdot 0{,}8} = \frac{25x^2}{16}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow E = x^2 m^2.$$

<u>Εναλλακτικά</u> για τον υπολογισμό του εμβαδού Ε = (ΑΚΛ), από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΜΛ και ΑΡΕ και επειδή το ΑΡΕ είναι ισοσκελές (ΑΡ = ΡΕ = 0,8), θα είναι και το ΑΜΛ ισοσκελές, οπότε (ΜΛ)= = (ΑΜ) = x, (ΚΛ) = 2x και $E = \frac{(AP)\cdot(BE)}{2} = \frac{x\cdot 2x}{2} = x^2 m^2$.

• Όταν το Μ κινείται από το Ρ ως το Ν, είναι $x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right]$ και Ε = (ΑΒΕ)+(ΒΚΛΕ).



Είναι $(ABE) = \frac{1{,}6\cdot 0{,}8}{2} = \frac{16}{25}$ m^2 και (ΒΚ) = (ΡΜ) = x – 0,8 = $x - \frac{4}{5}$.

Άρα $(BK\Lambda E) = (BE)(BK) = 1{,}6\left(x - \frac{4}{5}\right)$

$= \frac{8}{5}\left(x - \frac{4}{5}\right)$

$= \frac{8}{5}x - \frac{32}{25}$.

Οπότε το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα σε m^2 είναι:

$E = \frac{16}{25} + \frac{8}{5}x - \frac{32}{25} = \left(\frac{8}{5}x - \frac{16}{25}\right)$ m^2.

Άρα $E(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}$, σε m^2.

β) Είναι $E\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{16}{25} = \frac{32}{25} - \frac{16}{25} = \frac{16}{25}$ m^2.

• $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-} \frac{E(x)-E\left(\frac{4}{5}\right)}{x-\frac{4}{5}} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-} \frac{x^2-\frac{16}{25}}{x-\frac{4}{5}} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-} \frac{\cancel{\left(x-\frac{4}{5}\right)}\left(x+\frac{4}{5}\right)}{\cancel{x-\frac{4}{5}}} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\left(x+\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$.

• $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+} \frac{E(x)-E\left(\frac{4}{5}\right)}{x-\frac{4}{5}} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+} \frac{\frac{8}{5}x-\frac{16}{25}-\frac{16}{25}}{x-\frac{4}{5}} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+} \frac{\frac{8}{5}x-\frac{32}{25}}{x-\frac{4}{5}} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+} \frac{\frac{8}{5}\cancel{\left(x-\frac{4}{5}\right)}}{\cancel{x-\frac{4}{5}}} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+}\frac{8}{5} = \frac{8}{5}$

$\Leftrightarrow E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$ m^2/m.

γ) Αν είναι t_0 η ζητούμενη χρονική στιγμή τότε ισχύουν:

• $x'(t_0) = 0{,}08$ m/s $= \frac{8}{100}$ m/s $= \frac{2}{25}$ m/s,

• $x(t_0) = \frac{4}{5}$ m,

• $x'(t_0) = 0{,}08$ m/s $= \frac{8}{100}$ m/s $= \frac{2}{25}$ m/s,

• $E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$ E(x(t))m²/m.

$\big(E(x(t))\big)' = E'(x(t))\cdot x'(t) \overset{t=t_0}{\Longrightarrow} \big(E(x(t_0))\big)' = E'(x(t_0))\cdot x'(t_0)$

$\Leftrightarrow \big((Eox)(t_0)\big)' = E'\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{25}$

$= \frac{8}{5}\cdot\frac{2}{25}$

$= \frac{16}{125}$ m/s².

57.25761-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1, \quad x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x) = \ln x - 1 + x\frac{1}{x}$

= lnx – 1 + 1

= lnx.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ x = 1

• $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ x > 1

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ 0 < x < 1.

x	0	1	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

O.E. f(1)=0

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1,+∞).
Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το f(1)=0.

β) xlnx + 1 = x $\Leftrightarrow$ xlnx – x + 1 = 0

$\Leftrightarrow$ x(lnx – 1) + 1 = 0

$\Leftrightarrow$ f(x) = 0

$\Leftrightarrow$ f(x) = f(1)

$\Leftrightarrow$ x = 1,

αφού από το ερώτημα (α) έχουμε f(x) ≥ f(1) (ολικό ελάχιστο), με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 1.

58.25764-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), x \geq 0 \\ x^3, x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Η συνάρτηση είναι συνεχής για x < 0 ως πολυωνυμική. Επίσης είναι συνεχής για x > 0 ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Απομένει η συνέχεια στο $x_o = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^3) = 0$

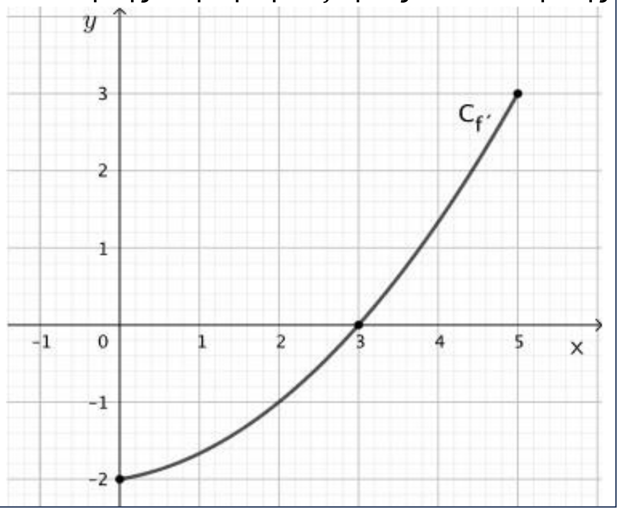
και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x+1)$ = ln1 = 0.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Άρα υπάρχει $\tau o \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $\kappa\alpha\iota\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ = f(0) και η f είναι συνεχής και στο $x_o = 0$. Επομένως η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της που είναι το IR.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα (-∞,0) και (0, +∞) με f ’(x)=3x² > 0, για x < 0 και f ’(x) = $\frac{1}{x+1}$ > 0, για x > 0.

Επομένως η f έχει θετική παράγωγο σε καθένα από τα διαστήματα (-∞,0) και (0, +∞) και είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

59. 26707-2: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.



α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$; (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f' τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στο $x = 3$. Επομένως, ο αριθμός $x = 3$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

β) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [0,3)$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (3,5]$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

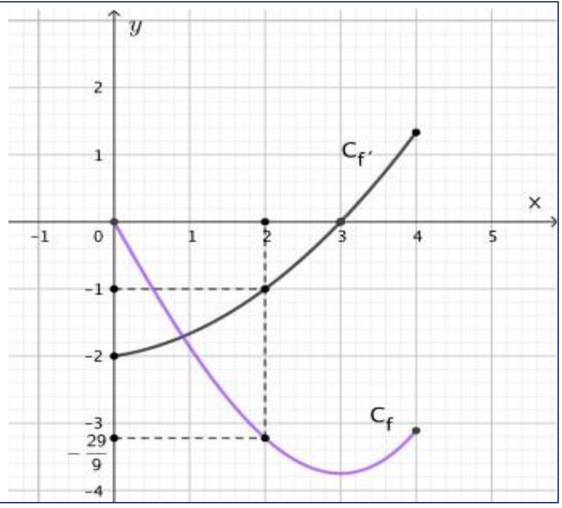
x	0	3	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Ο.Ε. f(3)

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,3] και γνησίως αύξουσα στο [3,5], αφού είναι συνεχής στο [0,5] ως πολυωνυμική.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3 με $f'(x) < 0$ στο [0,3) και $f'(x) > 0$ στο (3,5]. Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 3$ για κάθε $x \in [0,5]$, το οποίο ισούται με $f(3)$.

60. 26712-2: Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f'.



α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_o = 2$. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_o = 2$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)

Λύση:

α) Η κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$ ισούται με $f'(2) = -1$, όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f'.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$ είναι:

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ (1)

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκουμε ότι $f(2) = -29/9$, οπότε η (1) δίνει 9x+9y-11=0.

γ) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, τότε εφω $= f'(2) = -1 = -$εφ$45^0 =$ εφ$(180^0 - 45^0) =$ εφ135^0. Άρα, ω $= 135^0$.

61. 27082-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 - 3x, \quad x \in$ IR.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x) = ((x-1)^3 - 3x)'$
$= 3(x-1)^2 - 3$
$= 3x^2 - 6x + 3 - 3$
$= 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			T.M. f(0)=-1		T.E. f(2)=-5		

Άρα, η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.
- γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0,2)$.
- γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(2,+\infty)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[2,+\infty)$, οπότε $f([2,+\infty)) \overset{f\uparrow}{=} \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$
$= [-5,+\infty)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $0 \in f([2,+\infty))$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό.

62.27319-4: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^x + (x-1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2). (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8)

(Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x'x στο σημείο x_0 του (α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) Η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο κλειστό διάστημα [1,2] ως αθροίσματα γινομένων πολυωνυμικής με εκθετική και λογαριθμική.

- $f(1) = (1-2)e+(1-1)\ln 1 = -e < 0$.
- $f(2) = (2-2)e^2+(2-1)\ln 2 = \ln 2 > \ln 1 = 0$.

Άρα $f(1)f(2) < 0$, επομένως από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1,2)$ δηλαδή η γραφική παράσταση της τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, ως αθροίσματα γινομένων πολυωνυμικής με εκθετική και λογαριθμική, με $f'(x) = e^x+(x-2)e^x+\ln x+\frac{x-1}{x}$
$= (1+x-2)e^x+\ln x+\frac{x-1}{x}$
$= (x-1)e^x+\ln x+\frac{x-1}{x}$
$= (x-1)\left(e^x+\frac{1}{x}\right)+\ln x.$

- Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ το $x = 1$.

• Για 0 < x < 1 είναι x-1 < 0, $e^x + \frac{1}{x} > 0$ και lnx < ln1 = 0, οπότε f ‘(x) < 0 και η εξίσωση f ’(x) =0 είναι αδύνατη για 0 < x < 1.

• Για x > 1 είναι x-1 > 0, $e^x + \frac{1}{x} > 0$ και lnx > ln1 = 0, οπότε f ‘(x) > 0 και η εξίσωση f ’(x) =0 είναι αδύνατη για x > 1.

Άρα η εξίσωση f ’(x) =0 έχει μοναδική ρίζα x = 1, άρα υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f το (1,f(1)) στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία θα είναι οριζόντια, δηλαδή παράλληλη στον άξονα xx΄.

γ) Κάνοντας τον πίνακα προσήμου της f ' έχουμε:

x	0	1	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Ο.Ε. f(1) = -e

• f((0,1]) $\overset{f\downarrow}{=}$ $\left[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$ = [-e,+∞), αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ = $\lim_{x\to 0^+}((x-2)e^x + (x-1)lnx)$
= 0 - 1(-∞)
= +∞΄

Επειδή 0∈f((0,1]), η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα μοναδικό.

• f([1,+∞)) $\overset{f\uparrow}{=}$ $\left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)$ = [-e,+∞).

Επειδή 0∈f([1,+∞)), η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,+∞) και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα μοναδικό (είναι το x_0 του (α) ερωτήματος).

Επομένως η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς δυο ρίζες, δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει πράγματι τον άξονα xx΄σε δύο ακριβώς σημεία.

63. 27455-4: Δίνονται οι συναρτήσεις f : IR → IR με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και g : IR - {2} → IR με $g(x)$ = $= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in$ IR.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$.» Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

Λύση:

α) i. *Συνέχεια*: Η f ορίζεται στο IR, είναι συνεχής για x < 2 ως σταθερή και για x > 2 ως πράξεις συνεχών. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής στο x_0 =2.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-1) = -1. \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(e^{x-2} - 2) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2} f(x) = -1. \\ f(2) = e^0 - 2 = -1. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = -1.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0 =2 και επομένως είναι συνεχής στο IR.

Παράγωγος: Η f είναι παραγωγίσιμη για x < 2 με f '(x) = 0, ως σταθερή και για x > 2 ως πράξεις παραγωγίσιμων με f '(x) = e^{x-2}(x - 2)' = e^{x-2} > 0, για κάθε x > 2.

Άρα η f είναι σταθερή με f(x) = -1 στο (-∞, 2] και γνησίως αύξουσα στο [2, +∞) αφού είναι συνεχής στο 2. Οπότε για x > 2 ⇔ f (x) > f (2) ⇔ f (x) > -1. Άρα f (x) ≥ -1 για κάθε $x \in$ IR.

ii. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο IR - {2} ως πολυωνυμική με g '(x) = $-\frac{1}{2}2x + 2$ = -x + 2, για κάθε $x \in$ IR - {2}.

g '(x) = 0 ⇔ x = 2 απορρίπτεται γιατί 2 ∉ IR - {2}.

g '(x) > 0 ⇔ x < 2 και η g είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,2) ενώ g '(x) < 0 ⇔ x > 2 άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (2,+∞).

x	-∞ 2	+∞
g΄(x)	+	-
g(x)	↗	↘

<u>*Σύνολο τιμών*</u>: g((-∞, 2)) $\overset{g\uparrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),\ \lim\limits_{x\to2^-} g(x)\right)$ = (-∞,-1).
g((2,+∞)) $\overset{g\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x),\lim\limits_{x\to2^+} g(x)\right)$ = (-∞,-1).
⇔ g(IR - {2}) = (-∞,-1)U(-∞,-1) = (-∞,-1).

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}(+\infty)$ = -∞,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}(+\infty)$ = -∞,

$\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to2^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-3\right)$ = - 2 + 4 – 3 = -1

και $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to2^+}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-3\right)$ = - 2 + 4 – 3 = -1

β) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g στο κοινό πεδίο ορισμού τους το IR - {2}, αφού f(x) > 1 και g(x) < 1, άρα g(x) < f(x) για κάθε x ∈ IR - {2}.

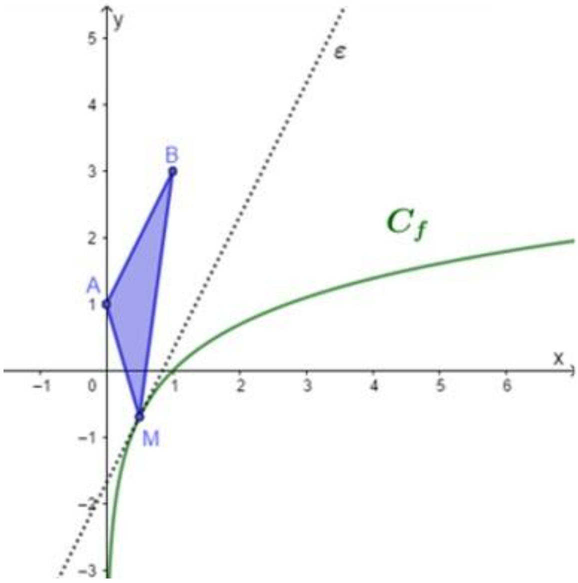
γ) Παρατηρούμε ότι για τις συναρτήσεις του ερωτήματος (α) και για x_0 =2, ισχύει ότι f (x) > g(x) κοντά στο 2, ενώ $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} g(x)$ = -1. Άρα ο ισχυρισμός είναι τελικά Ψευδής.

64. 27650-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α)

i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)



β) Έστω E(x) $E(x) = \frac{1}{2}(2x+1-lnx), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A. (Μονάδες 07)

<u>Λύση</u>:

α) Έστω σημείο $M_0(x_0,lnx_0)$ με x_0 > 0 της C_f. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με f '(x) = $\frac{1}{x}$, x > 0.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M_0 είναι η (ε): y – lnx_0 = $\frac{1}{x_0}$ (x – x_0) …………(1)

ε//AB ⇔ $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB}$ ⇔ $\frac{1}{x_0} = \frac{3-1}{1-0}$ ⇔ $x_0 = \frac{1}{2}$.

f(x_0) = lnx_0 = ln$\frac{1}{2}$ = ln1 – ln2 = -ln2.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το $M_0\left(\frac{1}{2}, -ln2\right)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης, η οποία προκύπτει από την (1), είναι η ε : y = 2x – 1 – ln2.

β) Έχουμε ότι E(x) = $\frac{1}{2}(2x+1-lnx), x > 0$.

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη με E΄(x) = 1 - $\frac{1}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$, x > 0.

• $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ και $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$,
$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Επομένως, η συνάρτηση E είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (0,1/2)$ και γνησίως αύξουσα για $x \in (1/2,+\infty)$.

Επομένως, για x = -ln2 παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$, δηλαδή το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο, όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του (α) ερωτήματος.

γ) Το τρίγωνο ABM_1 είναι ορθογώνιο στην κορυφή A αν και μόνο αν $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{AM_1} = -1$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{x} = -1$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x + 2\ln x - 2 = 0$.....(2)

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = x + 2\ln x - 2$, $1 \le x \le 2$.

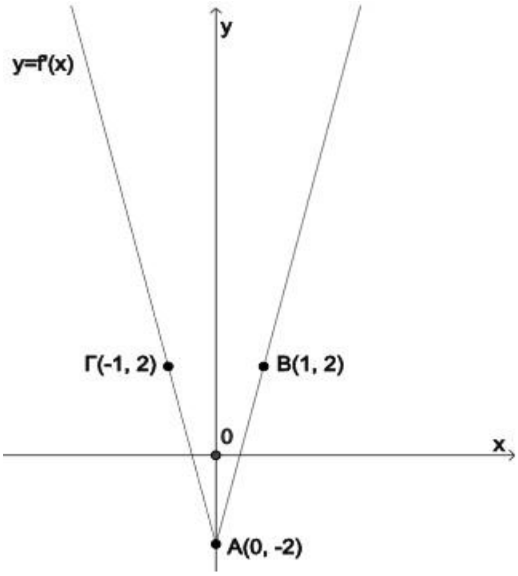
• Η h είναι συνεχής, ως άθροισμα λογαριθμικής και πολυωνυμικής συνάρτησης, στο κλειστό [1,2].

• $h(1) = -1 < 0$ και $h(2) = 2\ln 2 > 0$. Άρα $h(1) \cdot h(2) < 0$.Επομένως, σύμφωνα με το <u>*θεώρημα του Bolzano*</u> υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$, οπότε $x_1 + 2\ln x_1 - 2 = 0$.

Για τη μοναδικότητα της ρίζας, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα [1,2]. Πράγματι, η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0$ για κάθε $x \in [1,2]$.

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [1,2]$ και ως εκ τούτου η ρίζα x_1 είναι μοναδική.

65. 28337-4: Έστω f : IR→ IR μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f', είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1,2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1,2)$.



α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f. (Μονάδες 6)

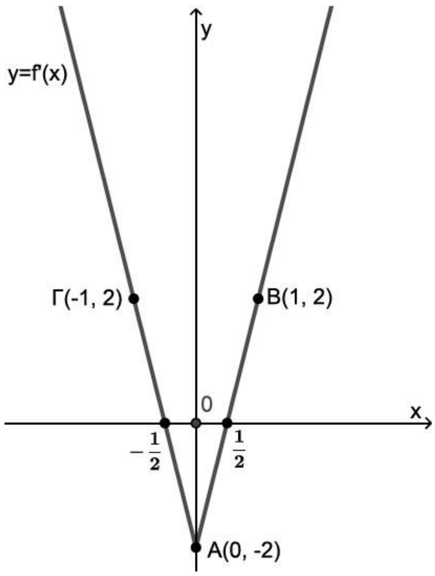
δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Delta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 7)

<u>Λύση</u>:

α) Η ημιευθεία AB έχει εξίσωση $y - (-2) = \frac{-2-2}{0-1}(x - 0)$

$\Leftrightarrow AB: y = 4x - 2,\ x \ge 0$.

Η ευθεία AB για y = 0 δίνει $x = \frac{1}{2}$. Άρα η ημιευθεία AB τέμνει τον άξονα xx΄στο σημείο $\left(\frac{1}{2},0\right)$.......... (διπλανό σχήμα).



Η ημιευθεία ΑΓ έχει εξίσωση $y - (-2) = \frac{-2-2}{0+1}(x - 0)$

$\Leftrightarrow AB: y = -4x - 2,\ x \le 0$.

Η ευθεία ΑΓ για y = 0 δίνει $x = -\frac{1}{2}$. Άρα η ημιευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα xx΄στο σημείο $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

β) Από τη γραφική παράσταση της παραγώγου f ' έχουμε:

Οι ρίζες της f ' είναι οι $x_1 = -\frac{1}{2}$ και $x_2 = \frac{1}{2}$. Επίσης είναι $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ και $f'(x) < 0$ στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Οι ρίζες και το πρόσημο της f ' καθώς και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f΄(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

T.M. T.E.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, άρα θα είναι και συνεχής στο IR. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ $και$ $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

γ) Η f παρουσιάζει στο $x_1 = -\frac{1}{2}$ τοπικό μέγιστο και στο $x_2 = \frac{1}{2}$ τοπικό ελάχιστο.

δ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,0), οπότε f(1) = 0 .
Η γραφική παράσταση της παραγώγου f ' διέρχεται από το σημείο Β(1,2) οπότε f '(1) = 2 .
Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Δ(1,0) είναι (ε) : y - f(1) = f '(1) (x – 1)
⇔ y = 2x – 2.
Η ε διέρχεται από το σημείο Α(0, -2) αφού -2 = 2·0 – 2, άρα η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f σημείο Δ(1,0).

66. **28338-4:** Έστω f : IR⟶ IR μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου $f\,'$ τέμνονται στο σημείο $A(-2\,,0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

i. $x_1 = 2$, (Μονάδες 5)

ii. $x_2 = -2$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η $f\,'$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2[ου] βαθμού και η γραφική παράσταση της $f\,'$ διέρχεται από το σημείο $B(0\,,-12)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f\,'(x) = 3x^2 - 12$, (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = x^3 - 12x - 16$, (Μονάδες 5)

iii. η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_1 = 2, οπότε από το θεώρημα του Fermat θα είναι f '(2) = 0. Δίνεται επίσης ότι f(2) = -32. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη x_1 = 2, είναι η y – f(2) = f '(2) (x – 2)
⇔ y = -32.

ii. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της f ' τέμνονται στο σημείο Α(-2,0), άρα f '(-2) = f(-2) = 0. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη x_2 = - 2, είναι η y – f(-2) = f '(-2) (x+2)
⇔ y = 0.

β) i. Στο (α) ερώτημα βρήκαμε f '(2) = f '(-2) = 0 και επειδή η f ' είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2[ου] βαθμού, θα έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις x_1 = 2 και x_2 = - 2. Επομένως είναι f '(x) = α(x-x_1)(x-x_2)
= α(x-2)(x+2)
= α(x^2-4)
= αx^2-4α, με α ≠ 0.
Η γραφική παράσταση της f ' διέρχεται από το σημείο Β(0,-12), άρα είναι f '(0) = -12
⇔ - 4α = -12
⇔ α = 3.
Επομένως είναι f '(x) = 3x^2-12 ⇔ f(x) = x^3-6x^2+c……..(1)

ii. Για κάθε x∈IR είναι f '(x) = 3x^2-12 ⇔ f(x) = x^3-6x^2+c……..(1)
Όμως f(-2)=0 $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $(-2)^3$-6$(-2)^2$+c = 0
⇔ - 8 + 24 + c = 0
⇔ c = - 16.
Επομένως θα είναι f(x) = x^3-6x^2-16.

iii. Οι ρίζες της f ' είναι οι $x_1 = 2$ και $x_2 = -2$ και το πρόσημο της f ' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 Τ.Μ.	$\searrow$	-32 Τ.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-12x-16) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = (-\infty)^3 = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-12x-16) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = (+\infty)^3 = +\infty$.

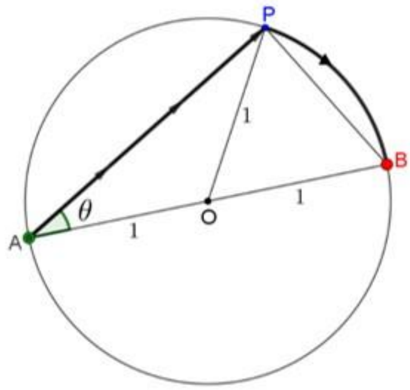
Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $Δ_1 = (-\infty, -2]$, $Δ_2 = [-2,2]$, $Δ_3 = [2,+\infty)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στα $Δ_1$, $Δ_3$ και γνησίως φθίνουσα στο $Δ_2$, θα είναι:

- $f(Δ_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-2)\right] = (-\infty,0]$.
- $f(Δ_2) = [f(2),f(-2)] = [-32,0]$.
- $f(Δ_3) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-32,+\infty)$.

Το -20 ανήκει στα διαστήματα $f(Δ_1)$, $f(Δ_2)$ και $f(Δ_3)$, άρα η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $Δ_1$, $Δ_2$ και $Δ_3$. Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στα $Δ_1$, $Δ_2$ και $Δ_3$, άρα υπάρχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $Δ_1$, $Δ_2$ και $Δ_3$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει ακριβώς τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

67. 28532-4: Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο A μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο B της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα $3\ Km/h$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα $6\ Km/h$. Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι $\theta\ rad$.



α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2συνθ$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το A στο B είναι $f(\theta) = \frac{1}{3}\cdot(2συνθ + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$. (Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\ rad$ σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S = x\cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

Λύση:

α) Αρχικά, παρατηρούμε ότι η γωνία $A\hat{P}B$ είναι ορθή, αφού είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο και $B\hat{O}P = 2\theta$ ως εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο AOP (ή η εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει το ίδιο με αυτή αντίστοιχο τόξο).

Οπότε $συνθ = \frac{(AP)}{(AB)} = \frac{1}{2}(AP)$. Άρα $(AP)=2συνθ$.

Επίσης, για το μήκος του τόξου PB, έχουμε $S=2\theta\cdot1=2\theta$

Έστω t_1, t_2 (σε ώρες) οι χρόνοι μετάβασης από το A στο P και από το P στο B αντίστοιχα.

Τότε $(AP)=3\cdot t_1 \Leftrightarrow 2συνθ = 3\cdot t_1$

$\Leftrightarrow t_1 = \frac{2}{3}συνθ$.

Επίσης για το μήκος S του τόξου PB, έχουμε $S = 6\cdot t_2 \Leftrightarrow 2\theta = 6\cdot t_2$

$\Leftrightarrow t_2 = \frac{1}{3}\theta$.

Τελικά, $f(\theta) = t_1 + t_2 = \frac{2}{3}συνθ + \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{3}\cdot(2συνθ + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

β) $f'(\theta) = \frac{1}{3}(-2ημθ+1)$.

- $f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow ημθ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημθ = ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$.

- $f'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\theta < \eta\mu\,\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{6}$, αφού η συνάρτηση y=$\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,π/2). Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

θ	0	π/6	π/2
$f'(\theta)$	+	0	−
$f(\theta)$	↗		↘

Ο.Μ. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}$

Ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος για θ = π/6.

γ) • $f\left(\left(0,\frac{\pi}{6}\right]\right) \overset{f\uparrow}{=} \left(\lim\limits_{\theta\to 0^+} f(\theta)\,,f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\left(\lim\limits_{\theta\to 0^+}\left(\frac{1}{3}\cdot(2\sigma\upsilon\nu\theta+\theta)\right),\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$=

= $\left(\frac{1}{3}\cdot(2\cancelto{1}{\sigma\upsilon\nu 0^0}+0),\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$

= $\left(\frac{2}{3},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

• $f\left(\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\right) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} f(\theta)\,,f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

= $\left(\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{3}\cdot(2\sigma\upsilon\nu\theta+\theta)\right),\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right)$

= $\left(\frac{1}{3}\cdot\left(2\cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\right),\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$

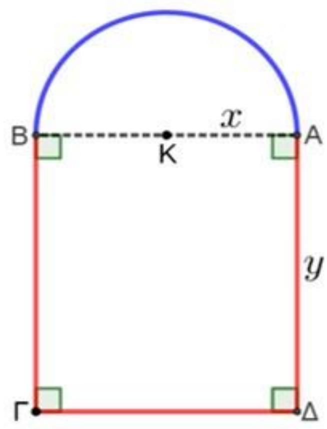
= $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

Άρα $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right) = f\left(\left(0,\frac{\pi}{6}\right]\right) \cup f\left(\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\right)$

= $\left(\frac{2}{3},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right] \cup \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$

= $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$, γιατί $\frac{\pi}{6} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2 \Leftrightarrow$ π < 4 αληθής.

68. **28534-4:** Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\,m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\,m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta) = y\,m$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0,\frac{4}{\pi+2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) Αφού η περίμετρος του παραθύρου είναι $4m$, θα έχουμε $\pi\cdot x$+$2x$+$2y$=4 ⇔ **…** ⇔ $y = -\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2$.

y > 0 ⇔ $-\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2 > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ x < $\frac{4}{\pi+2}$. Άρα x∈$\left(0,\frac{4}{\pi+2}\right)$.

$E(x) = \frac{\pi x^2}{2} + 2xy = \frac{\pi x^2}{2} + 2x\left(-\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2\right)$

$= \frac{\pi x^2}{2} - (\pi+2)x^2 + 4x$

$= \frac{(\pi-2\pi-4)x^2}{2} + 4x$

$= -\frac{\pi+4}{2}x^2 + 4x$, $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

β) Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $E'(x) = -(\pi+4)x+4$.

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -(\pi+4)x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\pi+4}$.
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -(\pi+4)x+4 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{\pi+4}$.

x	0	$\frac{4}{\pi+4}$	$\frac{4}{\pi+2}$
$E'(x)$	$+$	0	$-$
$E(x)$	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

$$E\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = \ldots = \frac{8}{\pi+4} \text{ τ.μ.}$$

Από τον πίνακα μεταβολών βλέπουμε ότι για $x = \frac{4}{\pi+4}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και το μέγιστο εμβαδόν είναι $E\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = -\frac{\pi+4}{2}\left(\frac{4}{\pi+4}\right)^2 + 4\frac{4}{\pi+4} =$

$= -\frac{\pi+4}{2}\frac{16}{(\pi+4)^2} + \frac{16}{\pi+4}$

$= -\frac{8}{\pi+4} + \frac{16}{\pi+4}$

$= \frac{8}{\pi+4}$ τ.μ.

γ) Το όριο είναι της μορφής $\frac{\alpha}{0}$ επομένως είναι $\pm\infty$.

- $\lim_{x\to x_0} \ln(E(x)) = \ln E(x_0) = \ln E\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = \ln\frac{8}{\pi+4} > \ln 1 = 0$
- Αφού για $x_0 = \frac{4}{\pi+4}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, $E(x) \le E(x_0) \Leftrightarrow E(x) - E(x_0) \le 0$.

Άρα $\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)} = -\infty$.

69. 28685-4:

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$. (Μονάδες 8)

β) Ένα κινητό M ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \ge 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$ (διπλανό σχήμα).

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAM, όπου $O(0,0), A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \ge 0$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 cm^2/sec$. (Μονάδες 10)

Λύση:

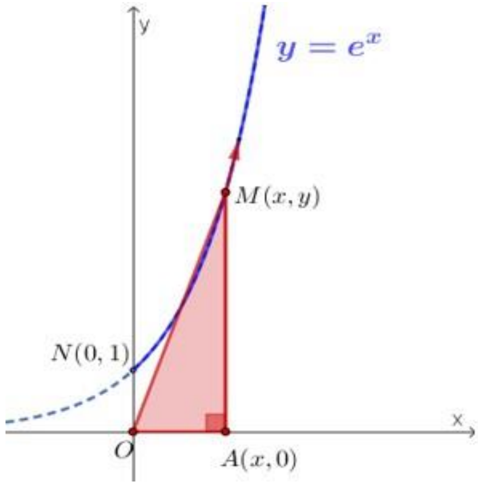
α) Η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, έχει προφανή ρίζα την x = 2, διότι $e^2 + 2e^2 = 3e^2$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x + xe^x - 3e^2$, x > 0.
Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^x + (x)'e^x + x(e^x)'$

$= e^x + e^x + xe^x$

$= 2e^x + xe^x > 0$ για x > 0,

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και ως εκ τούτου η εξίσωση έχει μοναδική λύση την x = 2.

β) i. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ορθογώνιο στο Α, με κάθετες πλευρές ΟΑ και ΑΜ, που έχουν μήκη (ΟΑ) = |x| = x και (ΑΒ) = |y| = $|e^x|$ = e^x. Επομένως το εμβαδόν του είναι $E(x) = \frac{1}{2}$(ΟΑ)(ΑΜ) $= \frac{1}{2}xe^x$, x ≥ 0.



ii. Η θέση του κινητού όμως εξαρτάται από τον χρόνο. Δηλαδή είναι $x = x(t)$, $t \geq 0$. Επομένως $E(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{x(t)}$, $t \geq 0$ ………(1).

$E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)e^{x(t)} + \frac{1}{2}x(t)e^{x(t)}x'(t)$

$= \frac{1}{2}x'(t)\left(e^{x(t)} + x(t)e^{x(t)}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\left(e^{x(t)} + x(t)e^{x(t)}\right)$………….. γιατί $x'(t) = 2cm/sec$

$= e^{x(t)} + x(t)e^{x(t)}$.

Για $t = t_0$, γίνεται $E'(t_0) = e^{x(t_0)} + x(t_0)e^{x(t_0)}$

$\Leftrightarrow 3e^2 = e^{x(t_0)} + x(t_0)e^{x(t_0)}$

$\overset{(a)}{\Leftrightarrow} x(t_0) = 2cm$.

Επομένως το κινητό, τη ζητούμενη χρονική στιγμή , βρίσκεται στο σημείο $M(2,e^2)$.

70. 29150-4: Η συνάρτηση $x(t) = (t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

1) **i.** Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 4)

2) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διάνυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)

3) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 6)

Λύση:

1) **i.** $u(t) = x'(t)$

$= (t-2)'(t-1)^2 + (t-2)[(t-1)^2]'$

$= (t-1)^2 + 2(t-2)(t-1)(t-1)'$

$= (t-1)^2 + 2(t-2)(t-1)$

$= (t-1)[(t-1) + 2(t-2)]$

$= (t-1)(3t-5)$.

$u(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-5) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$sec ή $t = 5/3$ sec.

t(sec)	0	1		5/3		3
u(t) (m)	+	0	-	0	+	

ii. $\begin{Bmatrix} t \in (0,3) \\ u(t) > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t \in (0,3) \\ (t-1)(3t-5) > 0 \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow 0 < t < 1$ ή $5/3 < t < 3$ κινήθηκε προς τα δεξιά και για $1 < t < 5/3$ κινήθηκε προς τα αριστερά.

β) **i.** • Από το χρονική στιγμή 0sec ως τη χρονική στιγμή 1sec, το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και διάνυσε διάστημα $S_1 = |x(1) - x(0)|$

$= |0 - (0-2)(0-1)^2|$

$= 1$m.

• Από το χρονική στιγμή 1sec ως τη χρονική στιγμή $5/3$ sec, το κινητό Α κινήθηκε προς τα αριστερά και διάνυσε διάστημα $S_2 = |x(5/3) - x(1)|$

$= |(5/3 - 2)(5/3 - 1)^2 - 0|$

$= \ldots = 4/27$ m.

• Από το χρονική στιγμή $5/3$ sec ως τη χρονική στιγμή 3sec, το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και διάνυσε διάστημα $S_3 = |x(3) - x(5/3)|$

$= |(3-2)(3-1)^2 - (5/3 - 2)(5/3 - 1)^2|$

$= \ldots = 112/27$ m.

Άρα το συνολικό διάστημα που διένυσε το κινητό Α από το χρονική στιγμή 0sec έως τη χρονική στιγμή 3sec είναι $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$= 1 + \frac{4}{27} + \frac{112}{27}$$

$$= \dots = \frac{170}{27} \text{ m}.$$

γ) Η μέση ταχύτητα $\bar{u}_\mu$ στο διάστημα [1, $^5/_3$] είναι $\bar{u}_\mu = \dfrac{x\left(\frac{5}{3}\right)-x(1)}{\frac{5}{3}-1}$.

Η συνάρτηση x(t) είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο διάστημα [1, $^5/_3$] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (1, $^5/_3$) οπότε η συνάρτηση x(t) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα [1,$^5/_3$], επομένως υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (1, {}^5/_3)$, τέτοιο, ώστε $x΄(t_0) = \dfrac{x\left(\frac{5}{3}\right)-x(1)}{\frac{5}{3}-1}$

$$\Leftrightarrow u(t_0) = \bar{u}_\mu,$$

που είναι το ζητούμενο.

71. 29644-4: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α και Β. Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3,2]$.

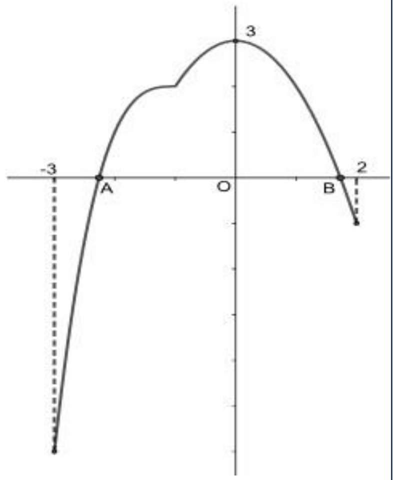
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$

. (Μονάδες 10)



Λύση:

α) i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [-3,2] ως άθροισμα της συνεχούς συνάρτησης f στο [-3,2] με την πολυωνυμική x.

ii. Η C_f τέμνει τον άξονα xx΄ στα σημεία Α και Β τα οποία είναι εκατέρωθεν του Ο. Έστω $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$ με $x_1 < 0 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Στο διάστημα $[x_1,x_2] \subseteq [-3,2]$ η συνάρτηση g είναι συνεχής και

$$\left.\begin{aligned} g(x_1) &= \cancelto{0}{f(x_1)} + x_1 = x_1 \\ g(x_2) &= \cancelto{0}{f(x_2)} + x_2 = x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow g(x_1)\, g(x_2) = x_1 x_2 < 0$, γιατί $x_1 < 0 < x_2$.

Επομένως από το Θεώρημα *Bolzano* η εξίσωση g(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1,x_2). Δηλαδή η εξίσωση g(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2) με παράγωγο $g'(x) = f'(x) + 1$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το f(0) = 3 και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, από θεώρημα *Fermat* θα ισχύει ότι $f'(0) = 0$.

$g(0) = f(0)+0 = 3$ και $g'(0) = f'(0) + 1 = 1$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο με τετμημένη x = 0, είναι $y – g(0) = g'(0)(x – 0)$

$$\Leftrightarrow y – 3 = x$$

$$\Leftrightarrow y = x + 3.$$

72. 31643-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

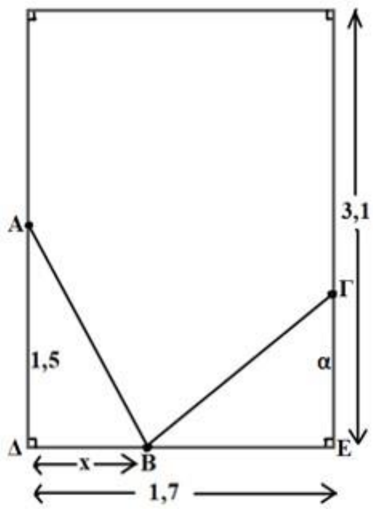
(Μονάδες 13)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [1,2], διότι
- είναι συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική.
- είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ και
- $f(1) = f(2) = 6$.

β) Αφού, λοιπόν, για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα $4\xi^3 - 9\xi^2 - 2\xi + 9 = 0$. Επομένως, το $\xi \in (1,2)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$.

73. 31680-4: Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $ΔB = x$, $ΔE = 1{,}7$, $AΔ = 1{,}5$, $ΓE = \alpha$ και $L = AB + BΓ$ που εκφράζονται σε μέτρα.



α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2{,}25} + \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$. (Μονάδες 07)

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει 1,02 μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+2{,}25}} - \sqrt{\frac{(1{,}7-x)^2}{(1{,}7-x)^2+\alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι α=1. (Μονάδες 10)

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1{,}02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει. (Μονάδες 08)

Λύση:

α) Είναι L=(AB)+(BΓ).

Από την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι $(AB)^2 = (ΔB)^2+(ΔA)^2 = x^2+1{,}5^2 = x^2+2{,}25$.

Άρα $(AB) = \sqrt{x^2 + 2{,}25}$.

Επίσης από την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι $(BΓ)^2 = (EB)^2+(EΓ)^2 = (1{,}7 - x)^2 + \alpha^2$.

Άρα $(BΓ) = \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}$.

Επομένως $L(x) = (AB)+(BΓ) = \sqrt{x^2 + 2{,}25} + \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$.

β) i. Είναι $L'(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+2{,}25}} - \sqrt{\frac{(1{,}7-x)^2}{(1{,}7-x)^2+\alpha^2}}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$.

Επειδή στο $1{,}02 \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ παρουσιάζει ελάχιστο και η συνάρτηση L είναι παραγωγίσιμη στο 1,02, από το θεώρημα Fermat είναι $L'(1{,}02) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1{,}02^2}{1{,}02^2+2{,}25}} - \sqrt{\frac{(1{,}7-1{,}02)^2}{(1{,}7-1{,}02)^2+\alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = 1$.

ii. Επειδή $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, η συνάρτηση L' είναι γνησίως αύξουσα.

- $\lim\limits_{x \to 1{,}02^-} \frac{1}{L'(x)} \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} -\infty$, γιατί όταν $x < 1{,}02 \underset{L'\uparrow}{\overset{L''>0}{\Leftrightarrow}} L'(x) < L'(1{,}02) \Leftrightarrow L'(x) < 0$.
- $\lim\limits_{x \to 1{,}02^+} \frac{1}{L'(x)} \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} +\infty$, γιατί όταν $x > 1{,}02 \underset{L'\uparrow}{\overset{L''>0}{\Leftrightarrow}} L'(x) > L'(1{,}02) \Leftrightarrow L'(x) > 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 1{,}02^-} \frac{1}{L'(x)} \neq \lim\limits_{x \to 1{,}02^+} \frac{1}{L'(x)}$, έπεται ότι το όριο $\lim\limits_{x \to 1{,}02} \frac{1}{L'(x)}$ δεν υπάρχει.

74. 32390-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης στο διάστημα $[0,2]$, είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος στα οποία η δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.
Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, με $f'(x) = (x^4 - 4x + 2)' = 4x^3 - 4$, για κάθε $x \in [0,2]$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Επομένως, η έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο, το $x = 1$.
β) Γνωρίζουμε ότι αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και του ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της .
- Υπολογίζουμε τις τιμές της στα σημεία αυτά και στα άκρα του διαστήματος.
- Από αυτές τις τιμές, η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της .

Οι τιμές της στο κρίσιμο σημείο της και στα άκρα του διαστήματος είναι $f(0) = 2$, $f(1) = -1$ και $f(2) = 10$.
Άρα, η μέγιστη τιμή της στο διάστημα $[0,2]$ είναι ίση με 10 στη θέση $x = 2$ και η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα $[0,2]$ είναι ίση με -1 στη θέση $x = 1$.

75. 32524-4: Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to IR$ με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1 - x) = x \ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 1$. (Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$, ισχύει $g'(x) = \left(\frac{e}{x} - \ln x\right)' = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$. Επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Η g είναι συνάρτηση «1-1» ως γνησίως μονότονη.

$$
\begin{aligned}
e(1-x) = x\ln x &\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{e(1-x)}{x} = \ln x \\
&\Leftrightarrow \frac{e}{x} - e = \ln x \\
&\Leftrightarrow \frac{e}{x} - \ln x = e \\
&\Leftrightarrow g(x) = e \\
&\Leftrightarrow g(x) = g(1) \\
&\overset{g\ "1-1"}{\Longleftrightarrow} x = 1.
\end{aligned}
$$

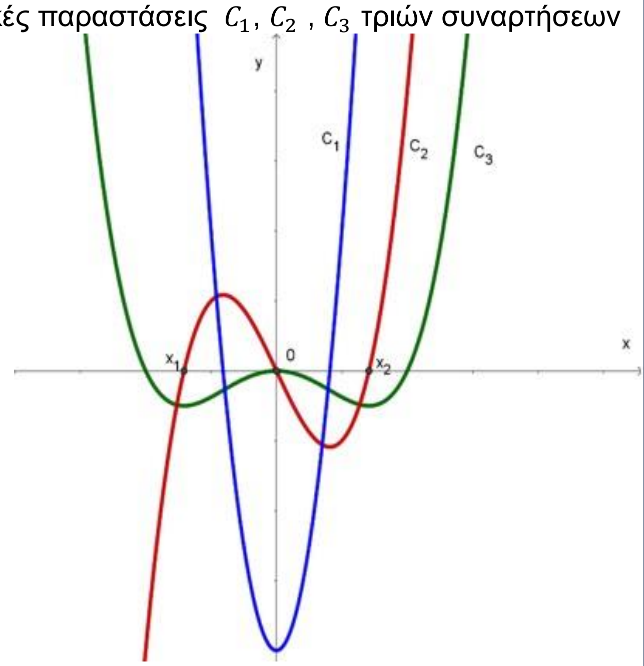
γ) i. Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για εκείνους τους πραγματικούς x που είναι τέτοιοι ώστε $x > 0$ και
$e - x\ln x - ex \neq 0 \Leftrightarrow e(1 - x) \neq x\ln x \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} x \neq 1$.
Άρα $A_f = (0,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Όταν $x \to 1^+$, $x > 1 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{e}{x} - \ln x < e \\
&\Leftrightarrow e - x\ln x - ex < 0 \text{..........(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{e-x\ln x-ex} \\
&\overset{\left(\frac{2}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1^+}(x^2+x)\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{e-x\ln x-ex} \\
&\overset{(1)}{=} 2\cdot(-\infty) \\
&= -\infty.
\end{aligned}
$$

76. 32694-2: Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο IR.
Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2.



α) i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					

(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F. (Μονάδες 8)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F. (Μονάδες 7)

Λύση:

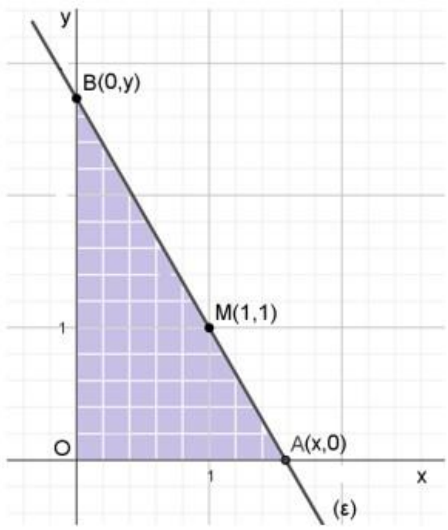
α) i. Από την γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι οι ρίζες της είναι οι x_1, 0, x_2. Με την βοήθεια των ριζών και του προσήμου της f, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της F.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$F' = f$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

ii. Η F έχει τρία τοπικά ακρότατα. Συγκεκριμένα παρουσιάζει στα x_1 και x_2 τοπικό ελάχιστο ενώ στο 0 τοπικό μέγιστο.

β) Από το σχήμα και τον πίνακα μεταβολών του ερωτήματος (α), παρατηρούμε ότι η καμπύλη C_3 παρουσιάζει την μονοτονία και τα ακρότατα της F, επομένως η C_3 είναι η γραφική παράσταση της F και η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f ‘.

77. 34440-4: Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $\mathrm{M}(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το M τέμνει τους θετικούς ημιάξονες $\mathrm{O}x$ και $\mathrm{O}y$ στα σημεία $\mathrm{A}(x,0)$, $x>0$ και $\mathrm{B}(0,y)$, $y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



α) Για $x \in (1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E}(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x = 2$ το εμβαδό του τριγώνου OAB παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3, \mathrm{E}(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $\mathrm{K}(x, y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) $\lambda_{AM} = \lambda_{MB} \Leftrightarrow \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B}$

$\Leftrightarrow \frac{1-0}{1-x} = \frac{y-1}{0-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 1 - y$

$\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{1-x}$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$ ……….(1)

E = $\frac{1}{2}$ · (ΟΑ) · (ΟΒ) = $\frac{1}{2}$ xy = $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x-1}$ · x = $\frac{x^2}{2(x-1)}$.

Άρα E(x) = $\frac{x^2}{2(x-1)}$, x∈(1,+∞), γιατί x > 0, y > 0, οπότε από την (1) ⇔ x – 1 > 0 ⇔ x > 1..

β) Για x > 1 η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με E ‘(x) = $\left(\frac{x^2}{2(x-1)}\right)'$

$= \frac{4x(x-1)-2x^2}{4(x-1)^2}$

$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	1	2	+∞
E΄(x)	-	0	+
E(x)	↘		↗

Ο.Ε.

Στο διάστημα (1,2] η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, στο διάστημα [2,+∞) η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και για x = 2 το εμβαδό του τριγώνου παίρνει την ελάχιστη τιμή που είναι ίση με E(2) = $\frac{4}{2}$ = 2 τ.μ.

γ) Η εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E(x), στο σημείο (3, E(3)) είναι:

(ζ) : y − E(3) = E'(3)(x − 3) ⇔ y – $\frac{9}{4} = \frac{3}{8}$ (x – 3)

⇔ y = $\frac{3}{8}$ x – $\frac{9}{8} + \frac{9}{4}$

⇔ y = $\frac{3}{8}$ x + $\frac{9}{8}$.

Από την (ζ) για y = 0 το x = −3 άρα Γ(−3,0) και για x = 0 το y = $\frac{9}{8}$, άρα Δ$\left(0,\frac{9}{8}\right)$.

δ) Έστω K(x(t), y(t)) με y '(t) = 3 μονάδες/sec.

Το σημείο Κ ανήκει στην ευθεία (ζ) οπότε θα ισχύει y(t) = $\frac{3}{8}$ x(t) + $\frac{9}{8}$.

y ‘(t) = $\frac{3}{8}$ x ’(t) ⇔ 3 = $\frac{3}{8}$ x ’(t) ⇔ x ’(t) = 8 μονάδες/sec.

78. End