ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ & «1-1» ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. *Σταθερή* λέγεται η συνάρτηση για την οποία για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$. Υπάρχει $c \in R$, τέτοιο ώστε $f(x)=c$, για κάθε $x \in A_f$.

2. *Ορισμοί*: Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα (↗)** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- **γνησίως φθίνουσα (↘)** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.
- **αύξουσα** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1)\leq f(x_2)$.
- **φθίνουσα** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1)\geq f(x_2)$.

3. Η μονοτονία είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται σε κάποιο διάστημα, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Όταν επομένως λέμε ότι μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα, θα πρέπει να λέμε και το διάστημα στο οποίο συμβαίνει.

4. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι μονότονες σε κανένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους. Πχ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; x = \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma \\ 1, & \alpha\nu \;\; x = \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$, δεν είναι μονότονη πουθενά.

5. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει διαφορετικά είδη μονοτονίας σε διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της. Πχ η $f(x)=x^2$, είναι ↘ στο $(-\infty,0)$ και ↗ στο $(0,+\infty)$.

6. Εάν f ↗ (↘) στο διάστημα Δ, τότε f ↗(↘) στο Δ. Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

7. Εάν η f είναι ↗ και ↘ στο Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

8. Εάν η f είναι μονότονη σε διάστημα Δ, τότε είναι μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας σε κάθε υποσύνολο του Δ.

9. Η f είναι ↗ (↗) στο διάστημα Δ, αν και μόνο αν η $g(x)=-f(x)$ είναι ↘(↘) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

10. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (μονότονη) με το ίδιο είδος μονοτονίας στα διαστήματα A_1 και A_2, τότε δεν ισχύει η μονοτονία πάντα και στην ένωση $A_1 \cup A_2$. Πχ η $f(x)=1/x$, είναι ↘ στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δεν είναι όμως ↘ στην ένωση $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, γιατί $-2<2$ ενώ $f(-2)<f(2)$.

11. Εάν δυο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας σε διάστημα Δ, τότε και η f+g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας. (Με απόδειξη)

12. Εάν η f είναι ↗ (↗, ↘, ↘) στο διάστημα Δ, τότε και η $g(x)=af(x)$, $a>0$ είναι ↗ (↗, ↘, ↘) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

13. Εάν η f είναι ↗ (↗, ↘, ↘) στο διάστημα Δ, τότε και η $g(x)=af(x)$, $a<0$ είναι ↘ (↘, ↗, ↗) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

14. Ένας τρόπος εύρεσης της μονοτονίας μιας συνάρτησης είναι ο υπολογισμός του λόγου μεταβολής $\lambda = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, όπου x_1, x_2 είναι τυχαία στοιχεία του Δ.

- ***i)*** Εάν $\lambda>0$ ($\lambda\geq 0$), τότε η f είναι ↗ (↗) στο Δ.
- ***ii)*** Εάν $\lambda<0$ ($\lambda\leq 0$), τότε η f είναι ↘ (↘) στο Δ.
- ***iii)*** Εάν $\lambda=0$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ. (Με απόδειξη)

15. Άλλος τρόπος εύρεσης της μονοτονίας μιας συνάρτησης, είναι ο πίνακας μεταβολών της πρώτης παραγώγου (μεθεπόμενο κεφάλαιο).

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

16. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού *A* θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** το $f(x_0)$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

17. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f: A → R λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

18. Μια συνάρτηση f: A → R είναι συνάρτηση 1–1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $x_1=x_2$.

19. Μια συνάρτηση f: A → R είναι 1–1, αν και μόνο αν:

- ☛ Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
- ☛ Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
- ☛ Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

20. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1–1".

21. Ο ισχυρισμός «*Εάν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη*» είναι εσφαλμένος. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, είναι 1-1, αλλά δεν είναι μονότονη στο R, αφού είναι ↗ στο διάστημα $(-\infty,0)$ και ↘ στο $[0,+\infty)$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΣΤΗΣΗ

22. *Ορισμός*: Έστω μια συνάρτηση f: A → R η οποία είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών f(A), της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της *A* για το οποίο ισχύει f(x)=y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση που συμβολίζεται με f^{-1}: f(A)→A με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει f(x)=y.

Άρα $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$.

Η συνάρτηση f^{-1} ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f.

23. $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x \in A$

24. $f(f^{-1}(y))=y$ για κάθε $y \in f(A)$.

25. Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.

26. Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης, θέτουμε f(x)=y, και προσπαθούμε να βρούμε το διάστημα ή τα διαστήματα που βρίσκεται το y (σύνολο τιμών), ή μια ανίσωση που περιέχει το y.

27. Εάν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq A_f$, τότε ο περιορισμός της f στο (α,β) δεν έχει ακρότατα (*Άσκηση* 2i,ii).

28. Εάν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα $[\alpha,\beta] \subseteq A_f$, τότε ο περιορισμός της f στο [α,β] έχει ακρότατα στα α και β, τα f(α) και f(β) (*Άσκηση* 2iv).

29. Εάν η f έχει στο πεδίο ορισμού της ένα διάστημα (α,β) και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$ η f να είναι γνησίως μονότονη με διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε ο περιορισμός της f στο (α,β) έχει ακρότατο στο x_0 (*Άσκηση* 2v).

30. Μπορεί μια συνάρτηση να έχει μόνο ελάχιστο, να έχει μόνο μέγιστο, να έχει και τα δυο, ή να μην έχει καθόλου ακρότατα. Εάν υπάρχουν, είναι μοναδικά.

31. Το ακρότατο μια συνάρτηση, μπορεί να το παρουσιάζει σε περισσότερες από μια τιμή του x. Πχ η f(x)=ημx έχει μέγιστο το 1, όταν x=2κπ+(π/2), $\kappa \in Z$.

32. Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης, ακολουθούμε τα εξής:

i) Θέτουμε f(x)=y,
ii) λύνουμε την εξίσωση ως προς x,
iii) θέτουμε $x=f^{-1}(y)$,
iv) αλλάζουμε την μεταβλητή από y σε x. Το βήμα αυτό είναι προαιρετικό.

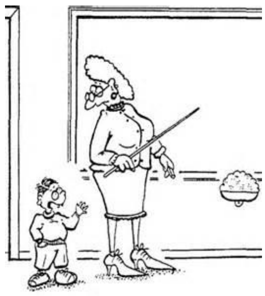
33. Εάν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε και η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(f^{-1})^{-1}=f$.

34. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο $1^{ης}$ – $3^{ης}$ γωνίας y=x. *Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} είναι πάνω στην διχοτόμο y=x*. Σχετικά ισχύουν τα εξής:

i) **Εάν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε $f(f(x_0))=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.**

Απόδειξη: Το *Αντίστροφο* (⇐)είναι προφανές. *Ευθύ* (⇒): Έστω $f(f(x_0))=x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_0)=x_0$.

- Εάν $f(x_0)<x_0$ τότε $f(f(x_0))<f(x_0)$ γιατί f $\nearrow$ στο R, ή $x_0< f(x_0)$, άτοπο γιατί $f(x_0)<x_0$.
- Εάν $f(x_0)>x_0$ τότε $f(f(x_0))>f(x_0)$ γιατί f $\nearrow$ στο R, ή $x_0> f(x_0)$, άτοπο γιατί $x_0<f(x_0)$.
- Άρα $f(x_0)=x_0$.

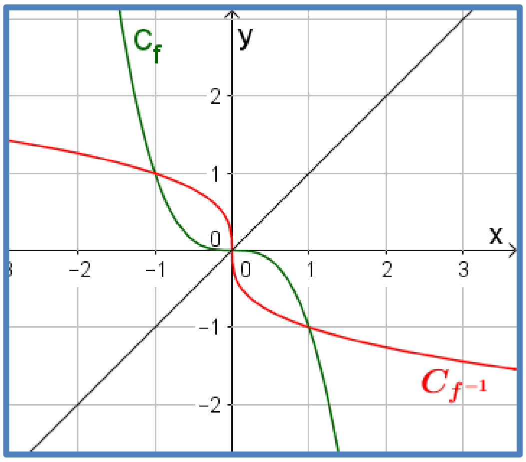


ii) **Εάν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε $f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=x$.**

<u>Απόδειξη</u>: $f^{-1}(x)=f(x) \overset{f\ "1\text{–}1"}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(f(x)) \Leftrightarrow x=f(f(x)) \underset{(i)}{\overset{f\ \text{νησ.αύξ.}}{\Leftrightarrow}} f(x)=x.$$

Έτσι αν η συνάρτηση f είναι $\searrow$ στο A_f, τότε οι σχέσεις $f^{-1}(x)=f(x)$ και $f(x)=x$ δεν είναι ισοδύναμες. Πχ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-x^3$ και $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & αν\ x<0 \\ -\sqrt[3]{x}, & αν\ x\geq 0 \end{cases}$, (διπλανό σχήμα), τέμνονται εκτός του σημείου Ο(0,0) της διχοτόμου y=x, και σε σημεία εκτός της διχοτόμου, τα σημεία Α(-1,1) και Β(1,-1). Παρατηρούμε ότι f και f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσες.



35. Εάν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο A_f, τότε είναι «1-1». Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ η f(x)=1/x είναι «1-1» και δεν είναι μονότονη στο R*.

36. Εάν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο A_f, τότε αντιστρέφεται και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

37. Εάν μια συνάρτηση είναι «1-1» στα διαστήματα A_1 και A_2, τότε δεν είναι πάντα «1-1» και στην ένωση $A_1 \cup A_2$. Πχ η $f(x)=x^2$, είναι «1-1» στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δεν είναι όμως «1-1» στην ένωση $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, αφού -2<2 ενώ f(-2)=f(2).

38. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι «1-1», αρκεί να βρούμε δυο στοιχεία του A_f τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ ενώ $f(x_1)=f(x_2)$. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με απλή παρατήρηση είτε με διερεύνηση. Πχ εάν $f(x)=x^2-6x+3$ τότε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2-6x_1+3=x_2^2-6x_2+3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1+x_2=6$.

Εάν διαλέξουμε δυο στοιχεία του R με $x_1+x_2=6$, π.χ. $x_1=2$ και $x_2=4$, τότε $f(x_1)=f(x_2)=1$.

39. Μια συνάρτηση με κλάδους αντιστρέφεται, μόνο αν κάθε κλάδος είναι «1-1» και τα σύνολα τιμών των κλάδων είναι ανά δυο ξένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ, ΄΄1-1΄΄ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:
- **i)** f(x)=-x
- **ii)** f(x)=2x-3
- **iii)** f(x)=|x|
- **iv)** $f(x)=5x^3-2$
- **v)** $f(x)=x^2-8x+15$ στα διαστήματα (-∞,4] και [4,+∞)
- **vi)** $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ στα διαστήματα (-∞,-1) και (-1,+∞)
- **vii)** f(x)=2|x|+3|x-2|+x.
- **viii)** f(x)=2lnx-3

2) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:
- **i)** f(x)=2x-1.
- **ii)** f(x)=2x-1, x∈(-1,1).
- **iii)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1).
- **iv)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1].
- **v)** $f(x)=x^2-5x+6$.
- **vi)** $f(x)=x^2$.
- **vii)** $f(x)=-3x^2+1$.
- **viii)** f(x)=3συνx-1.
- **ix)** $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$.
- **x)** $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.
- **xi)** $f(x)=-x^2+6x-3$.
- **xii)** $f(x)=\frac{x+2}{x^2+x+3}$.
- **xiii)** $f(x)=5-2ημ\left(\frac{x}{2}\right)$.

3) Να δείξετε ότι αν f, g γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) σε διάστημα Δ και ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, να δείξετε ότι και αυτές είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) στα πεδία ορισμού τους.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+2x+1$.
- **i)** Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο R.
- **ii)** Να λύσετε την εξίσωση $x^5+x^3+2x-4=0$

5) Να λυθούν οι ανισώσεις:

a) $5^{x^2-x}<5^{2x-2}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x}<\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2}$

c) $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6$

6) Έστω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, x∈R.

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R,
b) να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$,
c) να λυθεί η ανίσωση $3^x+4^x>5^x$.

7) Έστω $f(x)=α^x+(α^2-α)x-α^2$, με 0<α≠1 και x∈R.

a) Να δείξετε ότι αν α>1 (**0<α<1**) η f είναι γνησίως αύξουσα (**φθίνουσα**) στο R,
b) να λυθεί η εξίσωση $α^x+(α^2-α)x=α^2$, 0<α≠1.

8) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να λύσετε την ανίσωση $(f\circ g)(x^2-2x)\geq(f\circ g)(x+4)$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.
- **i)** Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,+∞).
- **ii)** Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1$.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}-e^{x+2}>\ln\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

10) Έστω g:(0,+∞)→R μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,-2), Β(2,-3) και η συνάρτηση f(x)=lnx-g(x), x>0.
- **i)** Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
- **ii)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x<2+g(x^2)$.

11) Μια συνάρτηση f:R→R έχει την ιδιότητα f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y∈R. Αν f(x)>0 για κάθε x∈R, να αποδείξετε ότι:
- **i)** f(0)=0.
- **ii)** η f είναι περιττή.
- **iii)** η f είναι γνησίως αύξουσα.

12) Μια συνάρτηση f:R→R έχει την ιδιότητα $f(x)+x\leq x^2+1\leq f(x+1)-x$ για κάθε x∈R.
- **i)** Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-x+1$.
- **ii)** Να βρείτε τα ακρότατα της f.

13) Εάν f συνάρτηση ΄΄1-1΄΄, να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+4x)=f(x+4)$.

14) Να βρεθούν οι αντίστροφες των συναρτήσεων (εφόσον υπάρχουν):

a) f(x)=x^2+4, x≥0,

b) f(x)=$\sqrt{2x-1}$,

c) f(x)=$3e^{x-2}-5$,

d) f(x)=$\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

f) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

g) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

h) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

15) Αν η συνάρτηση f:R→R είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση $(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4)$.

16) Μια συνάρτηση f:R→R έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=f(x)+ax$ για κάθε x∈R, όπου α≠0. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι 1-1 **ii)** f(0)=0.

17) Εάν f(x)=lnx-$\dfrac{e}{x}$+x, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

18) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f:R*→R αν γνωρίζουμε ότι είναι 1-1 και για κάθε x≠0 ικανοποιεί την σχέση $(f\circ f)(x)\cdot f(x)=\alpha$, όπου α≠0.

19) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f: *R*→*R* διέρχεται από τα σημεία A(4,2) και B(6,1).

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα,

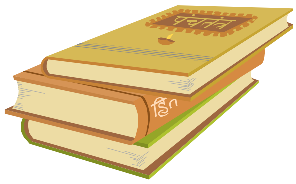
b) να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(1)$,

c) να λύσετε την εξίσωση $f(2+f^{-1}(x^2-x))=1$, x∈R,

d) να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2)-2)<2$, x∈R.

20) Αν η συνάρτηση f:R→R είναι γνησίως μονότονη και f(x+f(y))=f(x+y)+2, για κάθε x,y∈R, να αποδείξετε ότι f(x)=x+2.

21) Μια συνάρτηση f:R*→R έχει την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$, για κάθε x,y∈R*. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα:



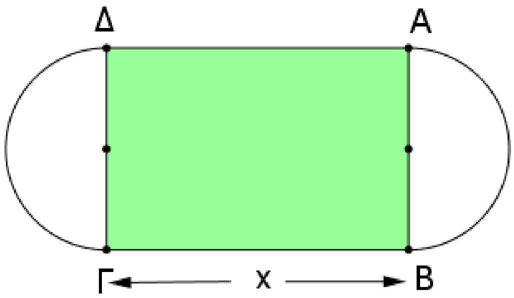
i) Να αποδείξετε ότι f(1)=0.

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$.

iv) Αν επιπλέον είναι f(x)>0, για κάθε x>1, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

22) Θέλουμε να κατασκευάσουμε στάδιο ολυμπιακών διαστάσεων, με περίμετρο 400m, όπως φαίνεται στο σχήμα.



i. Εάν ο αγωνιστικός χώρος (σκούρα περιοχή) έχει μήκος xm, να αποδείξετε ότι το πλάτος AB δίνεται από τη συνάρτηση AB(x)=$\dfrac{400-2x}{\pi}$, με 0<x<200.

ii. Να δείξετε ότι ο αγωνιστικός χώρος έχει εμβαδόν E(x)=$\dfrac{2}{\pi}(200x-x^2)$, με 0<x<200.

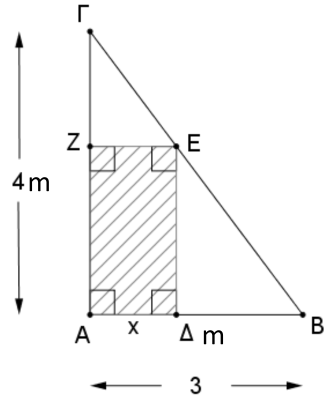
iii. Να δείξετε ότι ο αγωνιστικός χώρος έχει μέγιστο εμβαδόν, όταν x=100m.

23) Δίνεται η παραβολή $y=x^2$ και η ευθεία (ε): y=-x-1.

i. Εάν M(x,y) τυχαίο σημείο της παραβολής, να βρείτε την απόσταση d του σημείου M από την ευθεία (ε), ως συνάρτηση της τετμημένης x του σημείου M.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, για x=-1/2 και ότι η ελάχιστη απόσταση ισούται με $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

24) Στην πλευρά ΑΒ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90^0, ΑΒ=3m, ΑΓ=4m), κινείται σημείο Δ. Στο τρίγωνο εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΔΕΖ όπως φαίνεται στο σχήμα.



- **i.** Εάν ΑΔ=x, να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ δίνεται από την συνάρτηση Ε(x) = $4x-\frac{4}{3}x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- **ii.** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ γίνεται μέγιστο, όταν τα Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα αντίστοιχα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

25) Δυο θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν άθροισμα 50.

- **i.** Εάν ο ένας από τους δυο αριθμούς είναι x, να υπολογίσετε το γινόμενο των αριθμών, ως συνάρτηση του x.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι το γινόμενο γίνεται μέγιστο, όταν οι αριθμοί είναι ίσοι με το μισό του αθροίσματός τους.

26) Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κατοικία, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εμβαδού $100m^2$ και ύψους 2,5m.

- **i.** Να αποδείξετε ότι η ολική επιφάνεια της κατοικίας (τοίχων και πλάκας) δίνεται από την συνάρτηση $E_{ολ}(x)=\frac{5x^2+100x+500}{x}$, όπου x είναι η μια πλευρά της βάσης της κατοικίας.
- **ii.** Βάσει των απαιτήσεών μας προς τον μηχανικό, πρέπει να έχουμε την μικρότερη εκπομπή θερμότητας από την κατοικία προς το περιβάλλον. Να αποδείξετε ότι αυτή η συνθήκη πληρούται, όταν η βάση της κατοικίας είναι τετράγωνο.

27) Ένας κτηνοτρόφος θέλει να περιφράξει μια έκταση 10 στρεμμάτων σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου για βοσκή (1στρέμμα=1.000m^2). Να τον βοηθήσετε ώστε να διαλέξει τις διαστάσεις της έκτασης με τέτοιο τρόπο, ώστε η περίφραξη να του στοιχίσει όσο το δυνατόν φθηνότερα.

28) Δίνεται η ευθεία (ε): x-2y+2=0.

- **i.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση της αρχής Ο(0,0) του συστήματος συντεταγμένων από τυχαίο σημείο Μ(x,y) της ευθείας, δίνεται από τη συνάρτηση $d(x)=\frac{1}{2}\sqrt{5x^2+4x+4}$, $x\in R$.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, όταν $x=-\frac{2}{5}$ και ότι τότε ΟΜ $\perp$ (ε).

29) END.