ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΣΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ & «1-1»

1. *Σταθερή* λέγεται η συνάρτηση για την οποία για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$. Υπάρχει $c \in R$, τέτοιο ώστε $f(x)=c$, για κάθε $x \in A_f$.

2. Η μονοτονία είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται σε κάποιο διάστημα, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Όταν επομένως λέμε ότι μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα, θα πρέπει να λέμε και το διάστημα στο οποίο συμβαίνει.

3. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι μονότονες σε κανένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους. Πχ η συνάρτηση $f(x)= \begin{cases} 0, & \text{αν } x = \text{άρρητος} \\ 1, & \text{αν } x = \text{ρητός} \end{cases}$, δεν είναι μονότονη πουθενά.

4. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει διαφορετικά είδη μονοτονίας σε διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της. Πχ η $f(x)=x^2$, είναι ⬊ στο $(-\infty,0)$ και ⬈ στο $(0,+\infty)$.

5. Εάν f ⬈ (⬊) στο διάστημα Δ, τότε f ↗(↘) στο Δ. Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

6. Εάν η f είναι ↗ και ↘ στο Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

7. Εάν η f είναι μονότονη σε διάστημα Δ, τότε είναι μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας σε κάθε υποσύνολο του Δ.

8. Η f είναι ⬈ (↗) στο διάστημα Δ, αν και μόνο αν η $g(x)=-f(x)$ είναι ⬊(↘) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

9. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (μονότονη) με το ίδιο είδος μονοτονίας στα διαστήματα A_1 και A_2, τότε δεν ισχύει η μονοτονία πάντα και στην ένωση $A_1 U A_2$. Πχ η $f(x)=1/x$, είναι ⬊ στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δεν είναι όμως ⬊ στην ένωση $(-\infty,0)U(0,+\infty)$, γιατί $-2<2$ ενώ $f(-2)<f(2)$.

10. Εάν δυο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας σε διάστημα Δ, τότε και η f+g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας. (Με απόδειξη)

11. Εάν η f είναι ⬈ (↗, ⬊, ↘) στο διάστημα Δ, τότε και η $g(x)=af(x)$, $a>0$ είναι ⬈ (↗, ⬊, ↘) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

12. Εάν η f είναι ⬈ (↗, ⬊, ↘) στο διάστημα Δ, τότε και η $g(x)=af(x)$, $a<0$ είναι ⬊ (↘, ⬈, ↗) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

13. Ένας τρόπος εύρεσης της μονοτονίας μιας συνάρτησης είναι ο υπολογισμός του λόγου μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$, όπου x_1, x_2 είναι τυχαία στοιχεία του Δ.

i) Εάν $\lambda>0$ ($\lambda \geq 0$), τότε η f είναι ⬈ (↗) στο Δ.

ii) Εάν $\lambda<0$ ($\lambda \leq 0$), τότε η f είναι ⬊ (↘) στο Δ.

iii) Εάν $\lambda=0$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ. (Με απόδειξη)

14. Άλλος τρόπος εύρεσης της μονοτονίας μιας συνάρτησης, είναι ο πίνακας μεταβολών της πρώτης παραγώγου (μεθεπόμενο κεφάλαιο).

15. Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης, θέτουμε $f(x)=y$, και προσπαθούμε να βρούμε το διάστημα ή τα διαστήματα που βρίσκεται το y (σύνολο τιμών), ή μια ανίσωση που περιέχει το y.

16. Εάν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq A_f$, τότε ο περιορισμός της f στο (α,β) δεν έχει ακρότατα (*Άσκηση* 2i,ii).

17. Εάν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα $[\alpha,\beta] \subseteq A_f$, τότε ο περιορισμός της f στο $[\alpha,\beta]$ έχει ακρότατα στα α και β, τα f(α) και f(β) (*Άσκηση* 2iv).

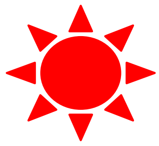
18. Εάν η f έχει στο πεδίο ορισμού της ένα διάστημα (α,β) και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$ η f να είναι γνησίως μονότονη με διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε ο περιορισμός της f στο (α,β) έχει ακρότατο στο x_0 (*Άσκηση* 2v).

19. Μπορεί μια συνάρτηση να έχει μόνο ελάχιστο, να έχει μόνο μέγιστο, να έχει και τα δυο, ή να μην έχει καθόλου ακρότατα. Εάν υπάρχουν, είναι μοναδικά.

20. Το ακρότατο μια συνάρτηση, μπορεί να το παρουσιάζει σε περισσότερες από μια τιμή του x. Πχ η f(x)=ημx έχει μέγιστο το 1, όταν x=2κπ+(π/2), κ∈Z.

21. Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης, ακολουθούμε τα εξής:

i) Θέτουμε f(x)=y,
ii) λύνουμε την εξίσωση ως προς x,
iii) θέτουμε $x=f^{-1}(y)$,
iv) αλλάζουμε την μεταβλητή από y σε x. Το βήμα αυτό είναι προαιρετικό.



22. Εάν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε και η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(f^{-1})^{-1}=f$.

23. $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x\in A_f$.

24. $f(f^{-1}(y))=y$, για κάθε $y\in f(A_f)$.

25. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο 1ης – 3ης γωνίας y=x. *Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} είναι πάνω στην διχοτόμο y=x*. Σχετικά ισχύουν τα εξής:

***i)* Εάν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε $f(f(x_0))=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.**

Απόδειξη: Το *Αντίστροφο* (⇐)είναι προφανές. *Ευθύ* (⇒): Έστω $f(f(x_0))=x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_0)=x_0$.

• Εάν $f(x_0)<x_0$ τότε $f(f(x_0))<f(x_0)$ γιατί f ↗ στο R, ή $x_0< f(x_0)$, άτοπο γιατί $f(x_0)<x_0$.

• Εάν $f(x_0)>x_0$ τότε $f(f(x_0))>f(x_0)$ γιατί f ↗ στο R, ή $x_0> f(x_0)$, άτοπο γιατί $x_0<f(x_0)$.

• Άρα $f(x_0)=x_0$.

***ii)* Εάν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε $f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=x$.**

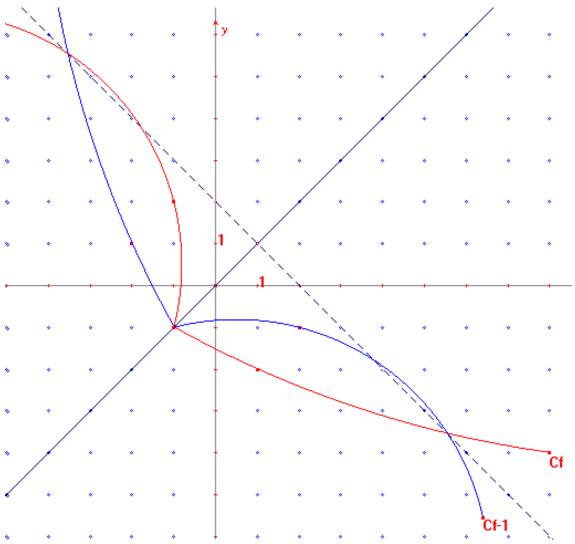
Απόδειξη: $f^{-1}(x)=f(x) \overset{f\ \text{"1–1"}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(f(x)) \Leftrightarrow x=f(f(x)) \underset{(i)}{\overset{f\ \text{γνησ. αύξ.}}{\Leftrightarrow}} f(x)=x.$$

Έτσι αν η συνάρτηση f είναι ↘ στο A_f, τότε οι σχέσεις $f^{-1}(x)=f(x)$ και f(x)=x δεν είναι ισοδύναμες. Πχ η συνάρτηση του σχήματος (**μπλε**) και η αντίστροφή της (**κόκκινη**) τέμνονται και σε σημείο εκτός της διχοτόμου, γιατί είναι γνησίως φθίνουσες.

26. Εάν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο A_f, τότε είναι «1-1». Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ η f(x)=1/x είναι «1-1» και δεν είναι μονότονη στο R*.

27. Εάν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο A_f, τότε αντιστρέφεται και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.



28. Εάν μια συνάρτηση είναι «1-1» στα διαστήματα A_1 και A_2, τότε δεν είναι πάντα «1-1» και στην ένωση $A_1 \cup A_2$. Πχ η $f(x)=x^2$, είναι «1-1» στα (-∞,0) και (0,+ ∞), δεν είναι όμως «1-1» στην ένωση (-∞,0)U(0,+ ∞), αφού -2<2 ενώ f(-2)=f(2).

29. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι «1-1», αρκεί να βρούμε δυο στοιχεία του A_f τέτοια ώστε $x_1\neq x_2$ ενώ $f(x_1)=f(x_2)$. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με απλή παρατήρηση είτε με διερεύνηση. Πχ εάν $f(x)=x^2-6x+3$ τότε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2-6x_1+3=x_2^2-6x_2+3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ $x_1=x_2$ ή $x_1+x_2=6$.
Εάν διαλέξουμε δυο στοιχεία του R με $x_1+x_2=6$, π.χ. $x_1=2$ και $x_2=4$, τότε $f(x_1)=f(x_2)=1$.

30. Πολλές φορές από την διαδικασία εύρεσης της αντίστροφης, προκύπτει η «1-1», γιατί η εξίσωση f(x)=y, έχει μοναδική λύση ως προς x. Εάν όχι, τότε δεν είναι «1-1».

31. Μια συνάρτηση με κλάδους αντιστρέφεται, μόνο αν κάθε κλάδος είναι «1-1» και τα σύνολα τιμών των κλάδων είναι ανά δυο ξένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ´´1-1´´

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:
- **i)** f(x)=-x
- **ii)** f(x)=2x-3
- **iii)** f(x)=|x|
- **iv)** $f(x)=5x^3-2$
- **v)** $f(x)=x^2-8x+15$ στα διαστήματα (-∞,4] και [4,+∞)
- **vi)** $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ στα διαστήματα (-∞,-1) και (-1,+∞)
- **vii)** f(x)=2|x|+3|x-2|+x.
- **viii)** f(x)=2lnx-3

2) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:
- **i)** f(x)=2x-1
- **ii)** f(x)=2x-1, x∈(-1,1)
- **iii)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1)
- **iv)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1]
- **v)** $f(x)=x^2-5x+6$
- **vi)** $f(x)=x^2$
- **vii)** $f(x)=-3x^2+1$
- **viii)** f(x)=3συνx-1
- **ix)** $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$.

3) Να δείξετε ότι αν **f, g** γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) σε διάστημα **Δ** και ορίζονται οι συναρτήσεις **f∘g** και **g∘f**, να δείξετε ότι και αυτές είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) στα πεδία ορισμού τους.

4) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να λύσετε την ανίσωση $(f\circ g)(x^2-2x)\geq(f\circ g)(x+4)$.

5) Εάν f συνάρτηση ´´1-1´´, να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+4x)=f(x+4)$.

6) Αν η συνάρτηση f:R→R είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση $(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4)$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+2x+1$.
- **i)** Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο R.
- **ii)** Να λύσετε την εξίσωση $x^5+x^3+2x-4=0$

8) Να λυθούν οι ανισώσεις:
- **a)** $5^{x^2-x}<5^{2x-2}$
- **b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x}<\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2}$
- **c)** $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6$

9) Έστω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, x∈R.
- **a)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R,
- **b)** να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$,
- **c)** να λυθεί η ανίσωση $3^x+4^x>5^x$.

10) Έστω $f(x)=\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x-\alpha^2$, με 0<α≠1 και x∈R.
- **a)** Να δείξετε ότι αν α>1 (**0<α<1**) η f είναι γνησίως αύξουσα (**φθίνουσα**) στο R,
- **b)** να λυθεί η εξίσωση $\alpha^x+(\alpha^2-\alpha)x=\alpha^2$, 0<α≠1.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.
- **i)** Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,+∞).
- **ii)** Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}+\ln(x^2+1)>1$.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}-e^{x+2}>\ln\frac{x+3}{x^2+1}$.

12) Έστω g:(0,+∞)→R μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,-2), B(2,-3) και η συνάρτηση f(x)=lnx-g(x), x>0.
- **i)** Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
- **ii)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x<2+g(x^2)$.

13) Μια συνάρτηση f:R→R έχει την ιδιότητα f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y∈R. Αν f(x)>0 για κάθε x∈R, να αποδείξετε ότι:
- **i)** f(0)=0.
- **ii)** η f είναι περιττή.
- **iii)** η f είναι γνησίως αύξουσα.

14) Μια συνάρτηση f:R→R έχει την ιδιότητα $f(x)+x\leq x^2+1\leq f(x+1)-x$ για κάθε x∈R.

- **i)** Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-x+1$.
- **ii)** Να βρείτε τα ακρότατα της f.

15) Να βρεθούν οι αντίστροφες των συναρτήσεων (εφόσον υπάρχουν):

- **a)** $f(x)=x^2+4,\ x\geq 0$,
- **b)** $f(x)=\sqrt{2x-1}$,
- **c)** $f(x)=3e^{x-2}-5$,
- **d)** $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
- **e)** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

- **f)** $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
- **g)** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
- **h)** $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

16) Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=f(x)+ax$ για κάθε $x\in R$, όπου $α\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

- **i)** Η f είναι 1-1
- **ii)** $f(0)=0$.

17) Εάν $f(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}+x$, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

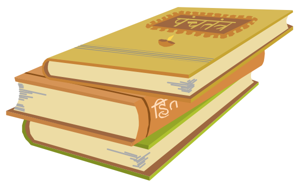
18) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f:R^*\to R$ αν γνωρίζουμε ότι είναι 1-1 και για κάθε $x\neq 0$ ικανοποιεί την σχέση $(f\circ f)(x)\cdot f(x)=\alpha$, όπου $α\neq 0$.

19) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: R\to R$ διέρχεται από τα σημεία Α(4,2) και Β(6,1).

- **a)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα,
- **b)** να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(1)$,
- **c)** να λύσετε την εξίσωση $f(2+f^{-1}(x^2-x))=1,\ x\in R$,
- **d)** να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2)-2) < 2,\ x\in R$.

20) Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως μονότονη και $f(x+f(y))=f(x+y)+2$, για κάθε $x,y\in R$, να αποδείξετε ότι $f(x)=x+2$.

21) Μια συνάρτηση $f:R^*\to R$ έχει την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$, για κάθε $x,y\in R^*$. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα:



- **i)** Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.
- **ii)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}.
- **iii)** Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$.
- **iv)** Αν επιπλέον είναι $f(x)>0$, για κάθε $x>1$, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

22) σ