ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ & «1-1» ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1. *Σταθερή* λέγεται η συνάρτηση για την οποία για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$. Υπάρχει $c \in R$, τέτοιο ώστε $f(x)=c$, για κάθε $x \in A_f$.

2. *Ορισμοί*: Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα (➚)** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- **γνησίως φθίνουσα (➘)** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.
- **αύξουσα** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **φθίνουσα** σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

3. Η μονοτονία είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται σε κάποιο διάστημα, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Όταν επομένως λέμε ότι μια συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα, θα πρέπει να λέμε και το διάστημα στο οποίο συμβαίνει.

4. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι μονότονες σε κανένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους.

Πχ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x = \text{άρρητος} \\ 1, & \text{αν } x = \text{ρητός} \end{cases}$, δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα, αφού οποιοδήποτε διάστημα και να πάρουμε, όσο μικρό και να είναι αυτό, περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς.

5. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει διαφορετικά είδη μονοτονίας σε διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της. Πχ η $f(x)=x^2$, είναι ➘ στο $(-\infty,0)$ και ➚ στο $(0,+\infty)$.

6. Εάν f ➚ (➘) στο διάστημα Δ, τότε f ↗(↘) στο Δ. Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

7. Εάν η f είναι ↗ και ↘ στο Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

8. Εάν η f είναι μονότονη σε διάστημα Δ, τότε είναι μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας σε κάθε υποσύνολο του Δ.

9. Η f είναι ➚ (↗) στο διάστημα Δ, αν και μόνο αν η $g(x)=-f(x)$ είναι ➘(↘) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

10. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (μονότονη) με το ίδιο είδος μονοτονίας στα διαστήματα A_1 και A_2, τότε δεν ισχύει η μονοτονία πάντα και στην ένωση $A_1 \cup A_2$. Πχ η $f(x)=1/x$, είναι ➘ στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δεν είναι όμως ➘ στην ένωση $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, γιατί $-2<2$ ενώ $f(-2)<f(2)$.

11. Εάν δυο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας σε διάστημα Δ, τότε και η f+g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας. (Με απόδειξη)

12. Εάν η f είναι ➚ (↗, ➘, ↘) στο διάστημα Δ, τότε και η $g(x)=af(x)$, $a>0$ είναι ➚ (↗, ➘, ↘) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

13. Εάν η f είναι ➚ (↗, ➘, ↘) στο διάστημα Δ, τότε και η $g(x)=af(x)$, $a<0$ είναι ➘ (↘, ➚, ↗) στο διάστημα Δ. (Με απόδειξη)

14. Ένας τρόπος εύρεσης της μονοτονίας μιας συνάρτησης είναι ο υπολογισμός του λόγου μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, όπου x_1, x_2 είναι τυχαία στοιχεία του Δ.

i) Εάν $\lambda>0$ ($\lambda \geq 0$), τότε η f είναι ➚ (↗) στο Δ.

ii) Εάν $\lambda<0$ ($\lambda \leq 0$), τότε η f είναι ➘ (↘) στο Δ.

iii) Εάν $\lambda=0$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ. (Με απόδειξη)

15. Άλλος τρόπος εύρεσης της μονοτονίας μιας συνάρτησης, είναι ο πίνακας μεταβολών της πρώτης παραγώγου (μεθεπόμενο κεφάλαιο).

2) ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ, ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1, ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΣΤΗΣΗ

16. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού *Α* θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

17. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

18. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1–1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $x_1=x_2$.

19. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν:

☛ Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

☛ Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

☛ Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

20. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1–1".

21. Ο ισχυρισμός «*Εάν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη*» είναι εσφαλμένος. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) =$

$\begin{cases} x, & x \le 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, είναι 1-1, αλλά δεν είναι μονότονη στο IR, αφού είναι ↗ στο διάστημα (-∞,0) και ↘ στο [0,+∞).

22. *Ορισμός*: Έστω μια συνάρτηση f: A → IR η οποία είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών f(A), της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της *A* για το οποίο ισχύει f(x)=y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση που συμβολίζεται με f^{-1}: f(A)→A με την οποία κάθε y∈f(A) αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x∈A για το οποίο ισχύει f(x)=y.

Άρα $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$.

Η συνάρτηση f^{-1} ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f.

23. $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε x∈A

24. $f(f^{-1}(y))=y$ για κάθε y∈f(A).

25. Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.

26. Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης, θέτουμε f(x)=y, και προσπαθούμε να βρούμε το διάστημα ή τα διαστήματα που βρίσκεται το y (σύνολο τιμών), ή μια ανίσωση που περιέχει το y.

27. Εάν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα (α,β) $\subseteq A_f$, τότε ο περιορισμός της f στο (α,β) δεν έχει ακρότατα (*Άσκηση* 2i,ii).

28. Εάν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα [α,β] $\subseteq A_f$, τότε ο περιορισμός της f στο [α,β] έχει ακρότατα στα α και β, τα f(α) και f(β) (*Άσκηση* 2iv).

29. Εάν η f έχει στο πεδίο ορισμού της ένα διάστημα (α,β) και υπάρχει x_0∈(α,β) τέτοιο ώστε σε καθένα από τα διαστήματα (α,x_0] και [x_0,β) η f να είναι γνησίως μονότονη με διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε ο περιορισμός της f στο (α,β) έχει ακρότατο στο x_0 (*Άσκηση* 2v).

30. Μπορεί μια συνάρτηση να έχει μόνο ελάχιστο, να έχει μόνο μέγιστο, να έχει και τα δυο, ή να μην έχει καθόλου ακρότατα. Εάν υπάρχουν, είναι μοναδικά.

31. Το ακρότατο μια συνάρτηση, μπορεί να το παρουσιάζει σε περισσότερες από μια τιμή του x. Πχ η f(x)=ημx έχει μέγιστο το 1, όταν x=2κπ+(π/2), κ∈Z.

32. Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης, ακολουθούμε τα εξής:

i) Θέτουμε f(x)=y,

ii) λύνουμε την εξίσωση ως προς x,

iii) θέτουμε $x=f^{-1}(y)$,

iv) αλλάζουμε την μεταβλητή από y σε x. Το βήμα αυτό είναι προαιρετικό.

33. Εάν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε και η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $(f^{-1})^{-1}=f$.

34. Θεώρημα: Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο 1ης – 3ης γωνίας y=x.

Απόδειξη: Έστω M(x,y) σημείο της γραφικής παράστασης της f. Τότε $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$. Δηλαδή το σημείο N(y,x) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1}. Τα σημεία όμως M(x,y) και N(y,x) είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο 1ης – 3ης γωνίας y=x.

35. *Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} είναι πάνω στην διχοτόμο y=x*. Σχετικά ισχύουν τα εξής:

i) **Εάν η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, τότε $f(f(x_0))=x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.**

Απόδειξη: Το *Αντίστροφο* (⇐)είναι προφανές. *Ευθύ* (⇒): Έστω $f(f(x_0))=x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_0)=x_0$.

- Εάν $f(x_0)<x_0$ τότε $f(f(x_0))<f(x_0)$ γιατί f ↗ στο R, ή $x_0< f(x_0)$, άτοπο γιατί $f(x_0)<x_0$.
- Εάν $f(x_0)>x_0$ τότε $f(f(x_0))>f(x_0)$ γιατί f ↗ στο R, ή $x_0> f(x_0)$, άτοπο γιατί $x_0<f(x_0)$.
- Άρα $f(x_0)=x_0$.

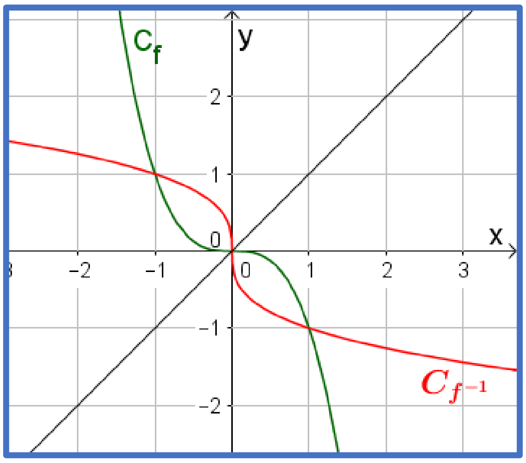
ii) **Εάν η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, τότε $f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=x$.**

Απόδειξη: $f^{-1}(x) = f(x) \overset{f\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f\big(f^{-1}(x)\big) = f(f(x) \Leftrightarrow x = f(f(x))$

$\overset{\substack{(i) \\ f\ \text{γνσ. αύξ.}}}{\Leftrightarrow} f(x) = x.$

Έτσι αν η συνάρτηση f είναι ↘ στο A_f, τότε οι σχέσεις $f^{-1}(x)=f(x)$ και f(x)=x δεν είναι ισοδύναμες.



Πχ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-x^3$ και $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & αν\ x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & αν\ x \ge 0 \end{cases}$, (παραπάνω σχήμα), τέμνονται εκτός του σημείου O(0,0) της διχοτόμου y=x, και σε σημεία εκτός της διχοτόμου, τα σημεία A(-1,1) και B(1,-1). Παρατηρούμε ότι f και f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσες.

36. Εάν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο A_f, τότε είναι «1-1». Το αντίστροφο δεν ι-σχύει. Πχ η $f(x)=1/x$ είναι «1-1» και δεν είναι μονότονη στο IR*.

37. Εάν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο A_f, τότε αντιστρέφεται και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

38. Εάν μια συνάρτηση είναι «1-1» στα διαστή-ματα A_1 και A_2, τότε δεν είναι πάντα «1-1» και στην ένωση $A_1 \cup A_2$. Πχ η $f(x)=x^2$, είναι «1-1» στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δεν είναι όμως «1-1» στην ένωση $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, αφού $-2<2$ ενώ $f(-2)=f(2)$.

39. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι «1-1», αρκεί να βρούμε δυο στοιχεία του A_f τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ ενώ $f(x_1)=f(x_2)$. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με απλή παρατήρηση είτε με διερεύνηση. Πχ εάν $f(x)=x^2-6x+3$ τότε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2-6x_1+3=x_2^2-6x_2+3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1+x_2=6$.
Εάν διαλέξουμε δυο στοιχεία του R με $x_1+x_2=6$, π.χ. $x_1=2$ και $x_2=4$, τότε $f(x_1)=f(x_2)=1$.

40. Μια συνάρτηση με κλάδους αντιστρέφεται, μόνο αν κάθε κλάδος είναι «1-1» και τα σύ-νολα τιμών των κλάδων είναι ανά δυο ξένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ, ΄΄1-1΄΄ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις
- **i)** f(x)=-x
- **ii)** f(x)=2x-3
- **iii)** f(x)=|x|
- **iv)** $f(x)=5x^3-2$
- **v)** $f(x)=x^2-8x+15$ στα διαστήματα (-∞,4] και [4,+∞)
- **vi)** $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ στα διαστήματα (-∞,-1) και (-1,+∞)
- **vii)** f(x)=2|x|+3|x-2|+x.
- **viii)** f(x)=2lnx-3

2) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:
- **i)** fx)=2x-1
- **ii)** f(x)=2x-1, x∈(-1,1)
- **iii)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1)
- **iv)** f(x)=2x-1, x∈[-1,1]
- **v)** $f(x)=x^2-5x+6$
- **vi)** $f(x)=x^2$
- **vii)** $f(x)=-3x^2+1$
- **viii)** f(x)=3συνx-1
- **ix)** $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$.
- **x)** $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.
- **xi)** $f(x)=-x^2+6x-3$.
- **xii)** $f(x)=\frac{x+2}{x^2+x+3}$.
- **xiii)** $f(x)=5-2ημ\left(\frac{x}{2}\right)$.

3) Να δείξετε ότι αν f, g γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) σε διάστημα Δ και ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, να δείξετε ότι και αυτές είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) στα πεδία ορισμού τους.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+2x+1$.
- **i)** Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο IR.
- **ii)** Να λύσετε την εξίσωση $x^5+x^3+2x-4=0$

5) Να λυθούν οι ανισώσεις:
- **a)** $5^{x^2-x}<5^{2x-2}$
- **b)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x}<\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2}$
- **c)** $2^{3x-x^2}-x^2>2^{6-2x}-5x+6$

6) Έστω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, x∈IR.
- **a)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR,
- **b)** να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$,
- **c)** να λυθεί η ανίσωση $3^x+4^x>5^x$.

7) Έστω $f(x)=α^x+(α^2-α)x-α^2$, με 0<α≠1 και x∈IR.
- **a)** Να δείξετε ότι αν α>1 (**0<α<1**) η f είναι γνησίως αύξουσα (**φθίνουσα**) στο IR,
- **b)** να λυθεί η εξίσωση $α^x+(α^2-α)x=α^2$, 0<α≠1.

8) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο IR, να λύσετε την ανίσωση:
$$(f\circ g)(x^2-2x)\geq(f\circ g)(x+4)\ .$$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.
- **i)** Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,+∞).
- **ii)** Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}+ln(x^2+1)>1$.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2}-e^{x+2}>ln\frac{x+3}{x^2+1}$.

10) Έστω g:(0,+∞)→ IR μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,-2), Β(2,-3) και η συνάρτηση f(x)=lnx-g(x), x>0.
- **i)** Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
- **ii)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x<2+g(x^2)$.

11) Μια συνάρτηση f : IIR→IR έχει την ιδιότητα f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y∈IR. Αν f(x)>0 για κάθε x∈IR, να αποδείξετε ότι:
- **i)** f(0)=0.
- **ii)** η f είναι περιττή.
- **iii)** η f είναι γνησίως αύξουσα.

12) Μια συνάρτηση f : IR→IR έχει την ιδιότητα $f(x)+x\leq x^2+1\leq f(x+1)-x$ για κάθε x∈IR.
- **i)** Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-x+1$.
- **ii)** Να βρείτε τα ακρότατα της f.

13) Εάν f συνάρτηση ΄΄1-1΄΄, να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+4x)=f(x+4)$.

14) Να βρεθούν οι αντίστροφες των συναρτήσεων (εφόσον υπάρχουν):
- **a)** $f(x)=x^2+4$, x≥0,
- **b)** $f(x)=\sqrt{2x-1}$,

c) $f(x)=3e^{x-2}-5$,

d) $f(x)=ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

f) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

g) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

h) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

15) Αν η συνάρτηση f: IR→IR είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση:

$$(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4).$$

16) Μια συνάρτηση f: IR→IR έχει την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=f(x)+ax$ για κάθε x∈IR, όπου α≠0. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι 1-1

ii) f(0)=0.

17) Εάν f(x) = lnx $-\frac{e}{x}$ + x, να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

18) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f : IR*→IR αν γνωρίζουμε ότι είναι 1-1 και για κάθε x≠0 ικανοποιεί την σχέση $(f\circ f)(x)\cdot f(x)=\alpha$, όπου α≠0.

19) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f : IR→IR διέρχεται από τα σημεία Α(4,2) και Β(6,1).

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα,

b) να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(1)$,

c) να λύσετε την εξίσωση $f(2+f^{-1}(x^2-x))=1$, x∈IR,

d) να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x^2)-2)<2$, x∈IR.

20) Αν η συνάρτηση f: IR→IR είναι γνησίως μονότονη και f(x+f(y))=f(x+y)+2, για κάθε x,y∈IR, να αποδείξετε ότι f(x)=x+2.

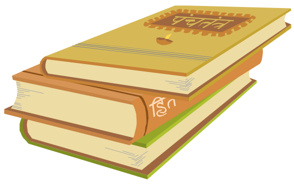
21) Μια συνάρτηση f: IR*→IR έχει την ιδιότητα $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, για κάθε x,y∈IR*. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα:

i) Να αποδείξετε ότι f(1)=0.

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$.

iv) Αν επιπλέον είναι f(x)>0, για κάθε x>1, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

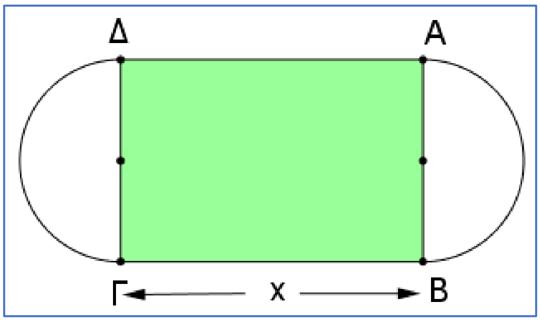


22) Θέλουμε να κατασκευάσουμε στάδιο ολυμπιακών διαστάσεων, με περίμετρο 400m, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Εάν ο αγωνιστικός χώρος (σκούρα περιοχή) έχει μήκος xm, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ δίνεται από τη συνάρτηση AB(x)=$\frac{400-2x}{\pi}$, με 0<x<200.

ii. Να δείξετε ότι ο αγωνιστικός χώρος έχει εμβαδόν E(x)=$\frac{2}{\pi}(200x-x^2)$, με 0<x<200.

iii. Να δείξετε ότι ο αγωνιστικός χώρος έχει μέγιστο εμβαδόν, όταν x=100m.

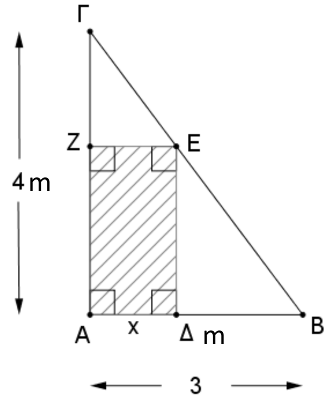


23) Δίνεται η παραβολή $y=x^2$ και η ευθεία (ε): y=-x-1.

i. Εάν Μ(x,y) τυχαίο σημείο της παραβολής, να βρείτε την απόσταση d του σημείου Μ από την ευθεία (ε), ως συνάρτηση της τετμημένης x του σημείου Μ.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, για x=-1/2 και ότι η ελάχιστη απόσταση ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

24) Στην πλευρά ΑΒ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$, ΑΒ=3m, ΑΓ=4m), κινείται σημείο Δ. Στο τρίγωνο εγγράφουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΔΕΖ όπως φαίνεται στο σχήμα.



- **i.** Εάν ΑΔ=x, να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 4x - \frac{4}{3}x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- **ii.** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΔΕΖ γίνεται μέγιστο, όταν τα Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα αντίστοιχα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

25) Δυο θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν άθροισμα 50.
- **i.** Εάν ο ένας από τους δυο αριθμούς είναι x, να υπολογίσετε το γινόμενο των αριθμών, ως συνάρτηση του x.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι το γινόμενο γίνεται μέγιστο, όταν οι αριθμοί είναι ίσοι με το μισό του αθροίσματός τους.

26) Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κατοικία, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εμβαδού 100m^2 και ύψους 2,5m.
- **i.** Να αποδείξετε ότι η ολική επιφάνεια της κατοικίας (τοίχων και πλάκας) δίνεται από την συνάρτηση $E_{ολ}(x)=\frac{5x^2+100x+500}{x}$, όπου x είναι η μια πλευρά της βάσης της κατοικίας.
- **ii.** Βάσει των απαιτήσεών μας προς τον μηχανικό, πρέπει να έχουμε την μικρότερη εκπομπή θερμότητας από την κατοικία προς το περιβάλλον. Να αποδείξετε ότι αυτή η συνθήκη πληρούται, όταν η βάση της κατοικίας είναι τετράγωνο.

27) Ένας κτηνοτρόφος θέλει να περιφράξει μια έκταση 10 στρεμμάτων σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου για βοσκή (1στρέμμα=1.000m^2). Να τον βοηθήσετε ώστε να διαλέξει τις διαστάσεις της έκτασης με τέτοιο τρόπο, ώστε η περίφραξη να του στοιχίσει όσο το δυνατόν φθηνότερα.

28) Δίνεται η ευθεία (ε): x-2y+2=0.
- **i.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση της αρχής Ο(0,0) του συστήματος συντεταγμένων από τυχαίο σημείο Μ(x,y) της ευθείας, δίνεται από τη συνάρτηση $d(x)=\frac{1}{2}\sqrt{5x^2+4x+4}$, x∈IR.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, όταν $x=-\frac{2}{5}$ και ότι τότε $OM \perp (ε)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

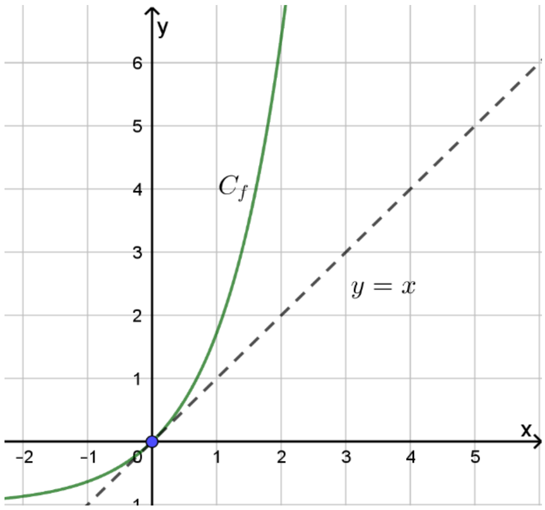
29. 23196-2: Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = e^x - 1, x \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 9)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας y=x, η οποία εφάπτεται της C_f στο μοναδικό κοινό τους σημείο, την αρχή των αξόνων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 9)



30. 23197-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x, x \in$ IR.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

31. 23198-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1,\ x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}. (Μονάδες 9)

32. 23200-4: Έστω f: IR→ IR μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$. (Μονάδες 6)

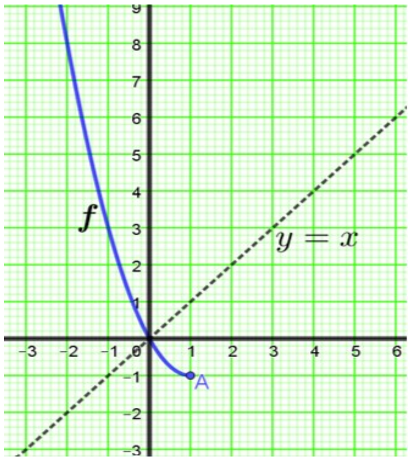
δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3, x \in$ IR. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

33. 23209-2: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 8)



34. 23216-2: Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο IR της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR. Μονάδες 7

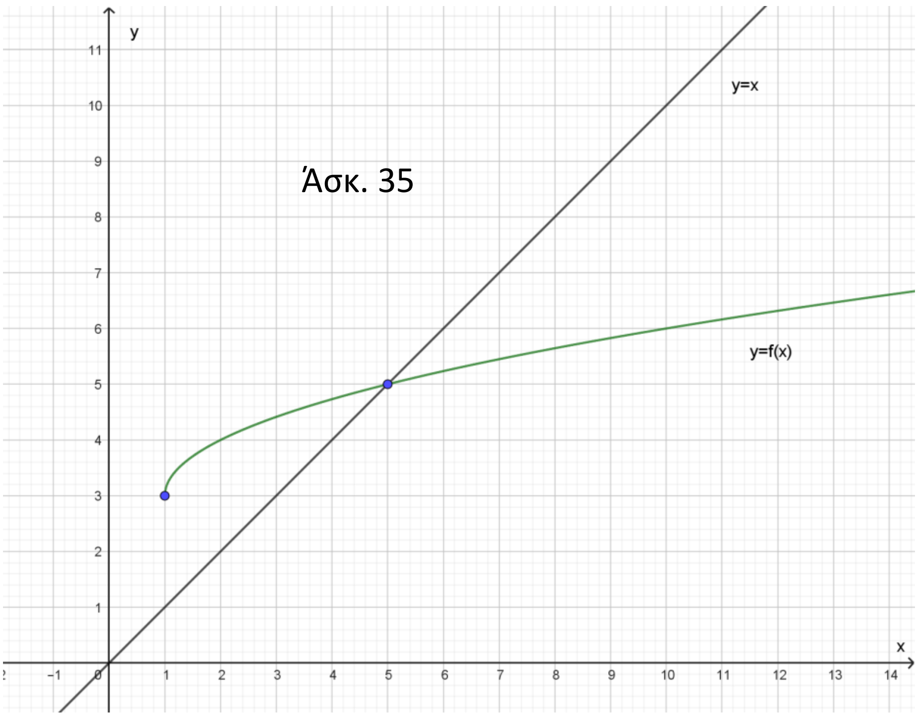
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx'. Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$. Μονάδες 10

35. 24130-2: Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3, \; x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f. (Μονάδες 10)



γ) Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας $x\hat{O}y$. Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1}

και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} . (Μονάδες 08)

36. 24569-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=[0,1]$. (Μονάδες 05)

β)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι "1 – 1". (Μονάδες 10)

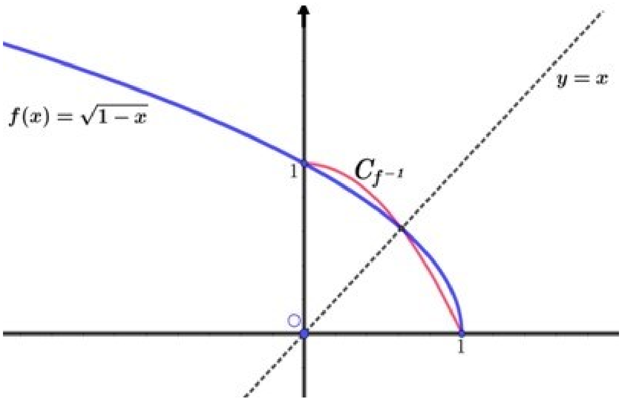
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f\big(f(x)\big)=0, x\in[0,1]$. (Μονάδες 10)

37. 24703-2: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $x\in(-\infty,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}. (Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1}. Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)



38. 23642-2: Δίνεται η συνάρτηση f: IR → IR με τύπο $f(x)=x^3+x+1$.

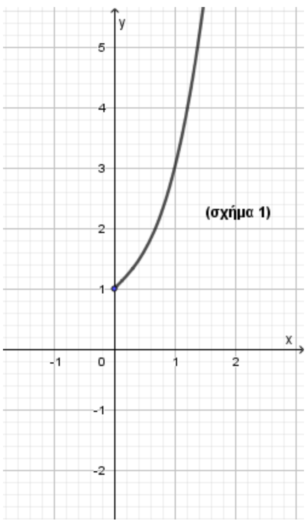
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 7)

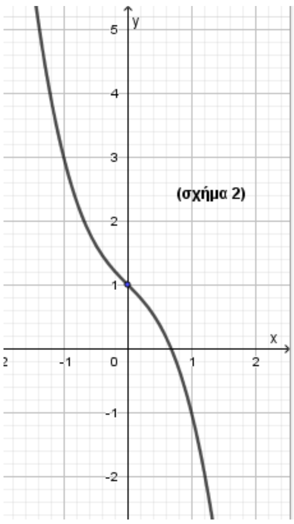
β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

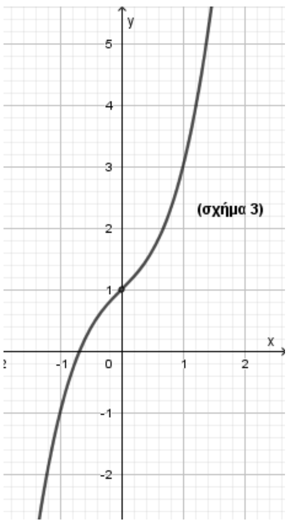
γ)

i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$. (Μονάδες 6)

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3+x+1|=2023$. (Μονάδες 5)







39. 24991-2: Δίνεται η συνάρτηση $f:(0\ ,\ +\infty)\to$ IR, με $f(x)=-2\ln x+1\ ,\quad x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}. (Μονάδες 9)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - ln\,x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f\ και\ g$ δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του IR στο οποίο ισχύει $f = g$.
(Μονάδες 8)

40. 26602-2: Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}^2-4}{\mathrm{x}+2}$ και $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h, με h(x) =$|\mathrm{g(x)}|$.
(Μονάδες 7)

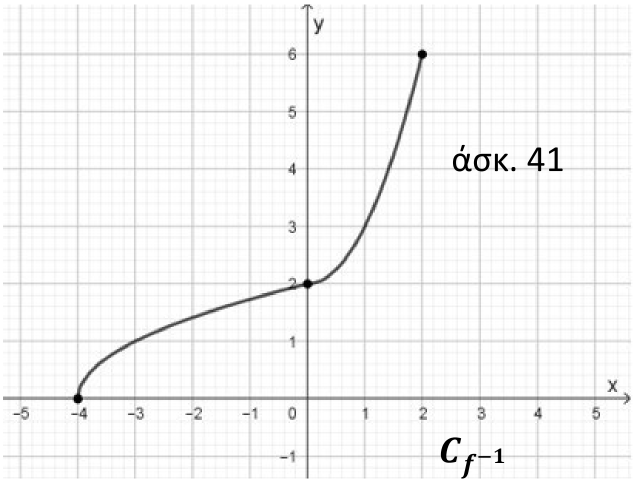
γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h. (Μονάδες 10)

41. 27277-2: Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f. Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές f(2) και f^{-1}(f(6)). Μονάδες 8

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f. Μονάδες 7



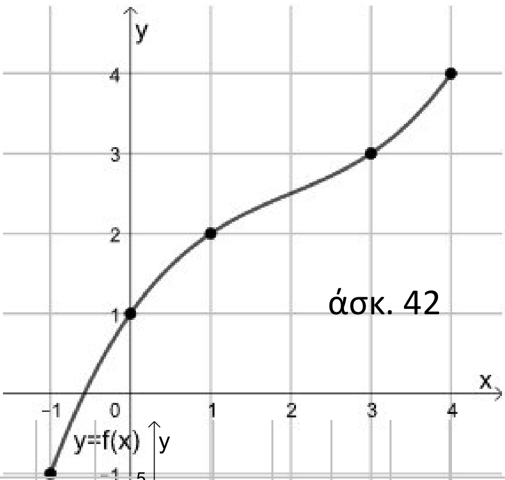
42. 28299-2: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1\,,4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f, Μονάδες 8

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$,
Μονάδες 8

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1}.
Μονάδες 9



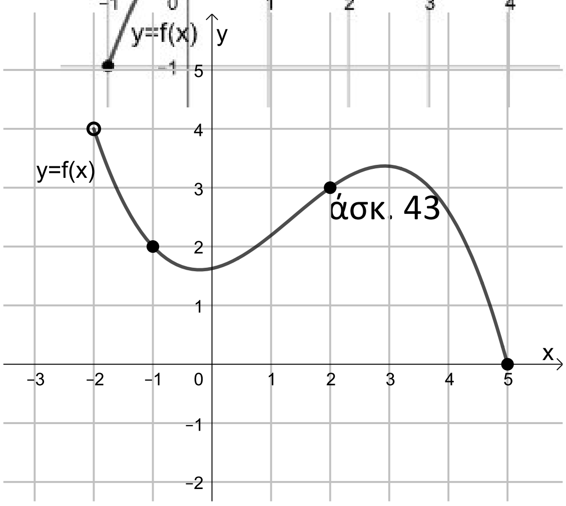
43. 28300-2: Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f,
(Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$,
(Μονάδες 6)

γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f, εφόσον υπάρχουν, (Μονάδες 7)

δ) την τιμή της σύνθεσης fof στο -1. (Μονάδες 6)



44. **29211-2:** Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 8)

γ) **i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}. (Μονάδες 7)

45. **29926-2:** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με f(x) = ln(x-2) + 5 για κάθε x > 2 και g(x) = 2x-1 με x∈IR.

α)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1}. (Μονάδες 7)

β)

i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

46. **31528-2:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 11)

47. **32695-2:** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο $f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο $g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$. Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι 1-1,

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησηςf. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0,1)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 7)

48. **35170-2:** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε f(x) = ln(1+ e^x) και g(x) = 2lnx .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f + g. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f + g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

49. END.