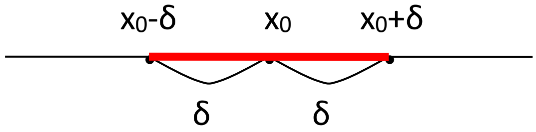
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) ***Περιοχή*** κέντρου x_0 και ακτίνας δ, (δ>0) – συμβολικά $\pi(x_0,\delta)$ – ονομάζουμε το διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, με δ όσο μικρό θέλουμε.



2) Οι σχέσεις $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ και $|x-x_0|<\delta$ είναι ισοδύναμες.

3) Έστω διάστημα Δ. ***Εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ*** ονομάζουμε κάθε $x_0\in\Delta$, για το οποίο υπάρχει περιοχή κέντρου x_0 και ακτίνας δ, τέτοια ώστε $\pi(x_0,\delta)\subseteq\Delta$.
Πχ κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι εσωτερικό των διαστημάτων (α,β), [α,β], (α,β], [α,β).
Τα άκρα α και β δεν είναι εσωτερικά σημεία των διαστημάτων (α,β), [α,β], (α,β], [α,β).

4) *Θεώρημα (μονοτονία και παράγωγος)*: Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα *Δ*.

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα *Δ*.

Απόδειξη:

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.
Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Επομένως υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$, $\overset{(1)}{\Rightarrow}\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ και επειδή $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

5. Η πρόταση «*αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ*» είναι αληθής ή ψευδής; Δικαιολογήστε την επιλογή σας.
Απάντηση: Είναι ψευδής. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in R$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R , εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R , αφού $f'(0)=0$. **Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$**, με $f'(x)=0$ μόνο για πεπερασμένο πλήθος τιμών**.**

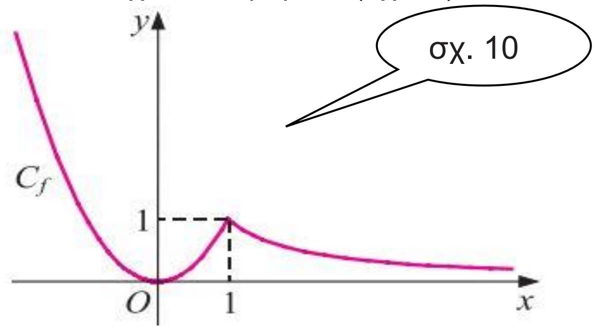
6. Το προηγούμενο Θεώρημα, ισχύει και στην περίπτωση που $f'(x)\geq 0$ (**$f'(x)\leq 0$**), αλλά τα σημεία μηδενισμού της $f'(x)$ στο Δ, να είναι πεπερασμένου πλήθους. Πχ η f(x)=x-συνx, $x\in[0,6\pi]$, είναι $f'(x)=1+\eta\mu x\geq 0$ με $f'(x)=0$ για $x_1=3\pi/2$, $x_2=7\pi/2$ και $x_3=11\pi/2$. Άρα είναι ↗ στο [0,6π].

7. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού *Α*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει *δ*>0, τέτοιο ώστε $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f.

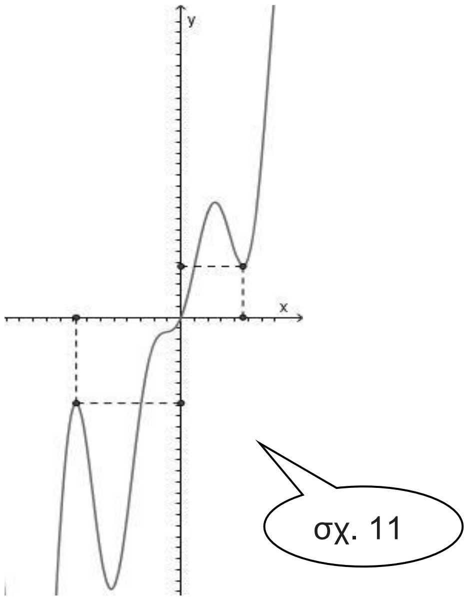
8. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού *Α*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει *δ*>0, τέτοιο ώστε $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.

9. *Ορισμός*: Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της *f* λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

10. Η πρόταση «*αν η συνάρτηση f έχει τοπικά ακρότατα, τότε θα έχει και ολικά ακρότατα*» είναι αληθής ή ψευδής; Δικαιολογήστε την επιλογή σας.
Απάντηση: Είναι ψευδής. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\leq 1\\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x>1\end{cases}$, έχει τοπικό μέγιστο το f(1)=1, τοπικό ελάχιστο f(0)=0, αλλά δεν έχει ολικό μέγιστο (σχ. 10).



11. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Πχ η συνάρτηση f(x)=3x+2xημx (σχ.11)



12. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

13. <u>*Θεώρημα Fermat*</u> : Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ’ ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f\,'(x_0) = 0$.

<u>Απόδειξη</u>: Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ’ αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει *δ*>0, τέτοιο ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\le 0$……………………..(1) για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Επειδή η συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• Αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$ τότε $x<x_0 \Leftrightarrow x-x_0<0$ και λόγω της (1) $\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \text{….(2)}$$

• Αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$ τότε $x>x_0 \Leftrightarrow x-x_0>0$ και λόγω της (1) $\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \text{….(3)}$$

Έτσι από τις (2) και (3) έχουμε $f\,'(x_0)= 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

14. <u>Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ είναι</u>:

13.1. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

13.2. Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

13.3. Τα άκρα του διαστήματος *Δ* (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

15. <u>*Ορισμός*</u>: **Κρίσιμα σημεία** μιας συνάρτησης f στο διάστημα *Δ*, λέγονται τα *εσωτερικά* σημεία του *Δ* στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

16. <u>*Θεώρημα ακροτάτων*</u>: Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η *f* είναι συνεχής.

i) Αν $f\,'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f\,'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f\,'(x)<0$ στο (α, x_0) και $f\,'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f\,'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

<u>Απόδειξη</u>:

i) ☛ Επειδή $f\,'(x)>0$ στο (α,x_0) και η *f* είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$.

Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$……………….(1) για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$

☛ Επειδή $f\,'(x)<0$ στο (x_0,β) και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$.

Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$……………….(2) για κάθε $x\in[x_0,\beta)$.

Λόγω των (1) και (2), ισχύει $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Έστω $x_1, x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

• Αν $x_1, x_2\in(\alpha,x_0)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

• Αν $x_1, x_2\in(x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

• Αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

17. *<u>Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής</u>*:

i. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.

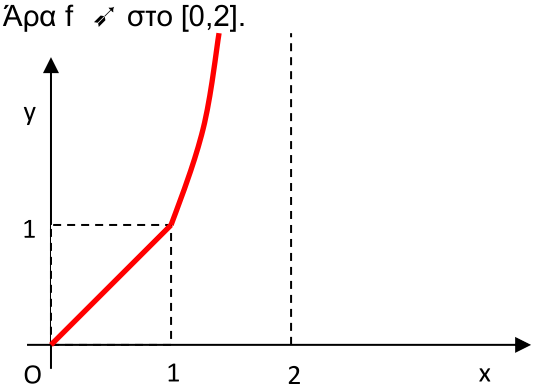
ii. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.

Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

18) Εάν η f είναι συνεχής στο x_0, δεν παραγωγίζεται στο x_0, και είναι $f'(x)>0$ **($f'(x)<0$)**, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)\subseteq D_f$, τότε η f είναι ↗ (↘) στο (α,β). Πχ η $f(x)=\begin{cases}x, & \alpha\nu\ 0\le x\le 1\\ x^2, & \alpha\nu\ 1<x\le 2\end{cases}$ δεν παραγωγίζεται αλλά είναι συνεχής στο $x_0=1$ και είναι $f'(x)>0$ στο $[0,1)\cup(1,2]$,

γιατί $f'(x)=\begin{cases}1, & \alpha\nu\ 0\le x<1\\ 2x, & \alpha\nu\ 1<x\le 2\end{cases}$.

Άρα f ↗ στο [0,2].



19) Πολλές φορές με την μονοτονία αποδεικνύουμε την μοναδικότητα ρίζας μιας εξίσωσης, αφού πρώτα εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ρίζας, είτε με το θ. Bolzano, είτε με το σύνολο τιμών κάποιας συνάρτησης, είτε με προφανή ρίζα (πχ. Άσκηση 7,8, 16ii, 27, 29).

20) Εάν η εξίσωση $f'(x)=0$ και η εύρεση του πρόσημου της $f'(x)$ ξεφεύγει από τα όρια των γνώσεων μας από προηγούμενες σχολικές χρονιές, τότε παρακάμπτουμε το πρόβλημα με άλλους τρόπους. Πχ αν $f(x)=\frac{x^2-\ln x}{x}$, x>0, τότε $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ είναι ίδιο με το πρόσημο του αριθμητή, γιατί $x^2>0$.

Για να βρούμε το πρόσημο του αριθμητή, θέτουμε $g(x)=x^2+\ln x-1$.

Επειδή $g'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$ (γιατί x>0), είναι g ↗ στο $(0,+\infty)$.

Προφανής ρίζα της g, το x=1, γιατί $g(1)=1^2+\ln 1-1=0$.

- για $0<x<1 \Leftrightarrow g(x)<g(1)=0$ …(γιατί g ↗)
  $\Leftrightarrow f'(x)<0$
  και η συνάρτηση f είναι ↘ στο (0,1].
- για $x>1 \Leftrightarrow g(x)>g(1)=0$ …(γιατί g ↗)
  $\Leftrightarrow f'(x)>0$
  και η συνάρτηση f είναι ↗ στο $[1,+\infty)$.

21) Άλλες φορές μελετάμε το πρόσημο παραγώγων ανώτερης τάξης της ίδιας ή βοηθητικής συνάρτησης.

Πχ αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$ στο $(-\infty,0]$, τότε

$f'(x)=-\eta\mu x+x-\frac{x^2}{2}$

$f''(x)=-\sigma\upsilon\nu x+1-x$

$f'''(x)=\eta\mu x-1\le 0 \Rightarrow f''$ ↘ στο $(-\infty,0]$ οπότε για $x\le 0 \Leftrightarrow f''(x)\ge f''(0) \Leftrightarrow f''(x)\ge 0$.

Άρα η συνάρτηση f' είναι ↗ στο διάστημα $(-\infty,0]$.

Άρα για $x\le 0 \Leftrightarrow f'(x)\le f'(0) \Leftrightarrow f'(x)\le 0$

$\Rightarrow$ f ↘ στο $(-\infty,0]$.

22) Η θέση ακροτάτου σε συνδυασμό με την παραγωγισιμότητα στο σημείο x_0, οδηγεί στην εφαρμογή του θ.Fermat (άσκηση 14).

23) Πολλές φορές μια σχέση της μορφής $f(x)\le\alpha$ ή $f(x)\ge\alpha$ για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, μεταφράζεται στην σχέση $f(x)\le f(x_0)$ ή $f(x)\ge f(x_0)$ αντίστοιχα, άρα το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου άρα από το θ.Fermat $f'(x_0)=0$ (άσκηση 16, 18, 20, 25).

24) Μια συνάρτηση μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα και να μην έχει ολικά.

25) Πολλές ανισοτικές σχέσεις αποδεικνύονται με την βοήθεια της μονοτονίας ή των τοπικών ή ολικών ακροτάτων (άσκηση 9, 10, 12).

26) Εξισώσεις και ανισώσεις που δεν μπορούν να επιλυθούν με γνωστές μεθόδους επίλυσης εξισώσεων, δύνανται να λυθούν με την βοήθεια της μονοτονίας κάποιας συνάρτησης (άσκηση 11, 14, 16iii, 26, 28).

27) Αν μας δοθεί μια συναρτησιακή σχέση, τότε ή χρησιμοποιούμε έναν από τους ορισμούς, ή παραγωγίζουμε την συναρτησιακή σχέση ως προς την μια μεταβλητή, χρησιμοποιώντας τις υπόλοιπες ως σταθερές (άσκηση 18, 19, 21, 23).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=\frac{1}{x+3}$

β) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$

γ) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

δ) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ε) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}$

στ) $f(x)=e^{-x^2}$

ζ) $f(x)=ln^2 x$

η) $f(x)=x\,ln\,x$

θ) $f(x)=x-\eta\mu x$

ι) $f(x)=2\varepsilon\varphi\,x-\varepsilon\varphi^2 x,\ x\in(-\pi/2,\pi/2)$

---

2) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{2}-2x+x\,ln\,x$.

3) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\geq 0\\ x^2+2x+3, & x<0\end{cases}$.

4) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x)\ln x+x^2-2x$.

5) Εάν f συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο [1,2], $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $f'(2)=f(2)=0$, να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=ln\frac{1+x}{1-x}$ με $x\in(-1,1)$.

7) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x=2x+3$, $0<\alpha<1$, έχει μοναδική ρίζα στο IR.

8) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2-x$ και $g(x)=2\ln(x-1)$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

9) Έστω $f(x)=\frac{ln\,x}{x}$, x>0.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία,

ii) να αποδείξετε ότι $x^e\leq e^x$,

iii) να συγκρίνετε τα e^π και π^e.

10) **i)** Να δείξετε ότι $1-\frac{1}{x}-ln\,x<0$ για κάθε x>1.

ii) η συνάρτηση $f(x)=\frac{ln\,x}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$,

iii) αν α>1, β>1 και $(\alpha-1)\ln\beta=(\beta-1)\ln\alpha$, τότε α=β.

11) **i)** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x$, $0<\alpha<1$,

ii) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=\lambda^2-\lambda-2,\ 0<\alpha<1.$$

12) Να δείξετε ότι $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$, x>0.

13) **i)** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\frac{4x\,ln\,x}{x+1}$,

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha\in R$, τέτοιο ώστε $f(x)\geq f(\alpha)$, για κάθε x>0.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+\beta x^2+3$. Να βρείτε τα α, β ώστε για x=1 η f να παρουσιάζει ακρότατο με τιμή f(1)=4. Στην συνέχεια να βρείτε τι ακρότατο είναι αυτό και να βρείτε τα άλλα ακρότατα.

15) **i)** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x-2x^2+5x-3$,

ii) Να δείξετε ότι η f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x=1.

16) (Ε.Μ.Ε 2008) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=ln\,x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$, με x>0. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε x>0.

i) Να αποδείξτε ότι α=-1.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να λυθεί η εξίσωση f(x)=0.

iv) Να λυθεί η ανίσωση:

$$ln(2x^2+2)+\frac{1}{2x^2+2}>ln(x^2+3)+\frac{1}{x^2+3}.$$

17) Η τιμή μιας μετοχής στο χρηματιστήριο t μήνες από σήμερα και για το επόμενο εξάμηνο δίνεται από την συνάρτηση $f(t)=100(-t^3+9t^2-15t)+c$.

i) Εάν η σημερινή της τιμή είναι 5300€ να βρεθεί πότε πρέπει να την αγοράσουμε και πότε πρέπει να την πουλήσουμε για να έχουμε μέγιστο κέρδος.

ii) Να βρεθεί το ποσοστό κέρδους και να το συγκρίνετε με κέρδος που θα πρόκυπτε, αν καταθέταμε τα χρήματα στην τράπεζα με επιτόκιο 12%.

18) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g: IR→IR με $f(x)+x^3\leq g(x)+\alpha^3$, για κάθε $x\in IR$, όπου α σταθερός πραγματικός, τέτοιος ώστε f(α)=g(α). Αν f,g παραγωγίσιμες στο α, να δείξετε ότι $f'(\alpha)-g'(\alpha)=-3\alpha^2$.

19) Δίνεται η συνάρτηση f : IR→IR με $f^3(x)+f(x)= e^x-x+1$ για κάθε $x\in IR$. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

20) Εάν $\alpha\ln x\leq x-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, με α= =σταθερό πραγματικό, να δείξετε ότι α=1.

21) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f: IR→IR, παραγωγίσιμη στο IR με $f^2(x)+x^2=1+2xf(x)$, για κάθε $x\in IR$, δεν έχει ακρότατα.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

22) (Θέμα 4° 2000) Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από την συνάρτηση $f(t)=\frac{at}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$, $t\geq 0$ όπου α και β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά την χορήγηση του φαρμάκου.

- **i)** Να βρείτε τις τιμές α και β. Μονάδες 15
- **ii)** Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η τιμή της συγκέντρωσης στο αίμα είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. Μονάδες 10

23) (Θέμα 3° 2001) Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)= =x^3-2x^2+6x-1$, για κάθε $x\in R$, όπου β,γ πραγματικοί αριθμοί με γ>0 και $\beta^2<3\gamma$.

- **i)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. Μονάδες 10
- **ii)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 8
- **iii)** Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1). Μονάδες 7

24) (Θέμα 3° 2003) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

- **i)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. Μονάδες 3
- **ii)** Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in IR$ Μονάδες 6
- **iii)** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. Μονάδες 5

25) (Θέμα 3° 2009) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, x>-1 όπου α σταθερός πραγματικός με $0<\alpha\neq 1$.

A) Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε x>-1, να αποδείξετε ότι α=e. Μονάδες 8

B) Για α=e:

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $\searrow$ στο διάστημα (-1,0] και $\nearrow$ στο διάστημα $[0,+\infty)$ Μονάδες 6

ii) αν $\beta,\gamma\in(-1,0)U(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2). Μονάδες 6

26) (Θέμα Γ 2010) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in IR$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$2(x^2-3x+2)=ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$. Μονάδες 7

27) (Θέμα Γ 2011) Δίνεται η συνάρτηση $f:IR\to IR$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR, με $f'(0)=f(0)=0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in IR$.

- **i)** Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x\in IR$. Μονάδες 8
- **ii)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 3
- **iii)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln(e^x-x)=συνx$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Μονάδες 7

28) (Θέμα Γ 2012) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(x-1)\ln x-1,\ x>0.$$

- **i)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι $\searrow$ στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και $\nearrow$ στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 6
- **ii)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, x>0, έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες. Μονάδες 6
- **iii)** Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του προηγουμένου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$. Μονάδες 6

29) <u>ΘΕΜΑ 3° (2002)</u>

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. Μονάδες 18

30) <u>Θέμα 4ον θετική-τεχνολογική 2006</u>:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-ln\,x.$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Μονάδες 8

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 5

31. <u>Θέμα 3ον θετική-τεχνολογική 2007</u>:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x-2ημ^2θ$ όπου $θ\in IR$ μια σταθερά με $θ\neq κπ+\pi/2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο. Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 8

32)(Θέμα Γ 2015) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μια ακριβώς ρίζα. Μονάδες 8

ΔΙΑΦΟΡΑ ΘΕΜΑΤΑ

33)Πρόκειται να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κασόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου από ένα ορθογώνιο χαρτόνι μήκους 30cm και πλάτους 16cm. Από κάθε γωνία του ορθογωνίου αποκόπτουμε ίσα τετράγωνα και λυγίζουμε προς τα πάνω τα πλαϊνά κομμάτια (παρακάτω σχήματα).

i. Να αποδείξετε ότι το κασόνι έχει όγκο $V(x)=4x^3-92x^2+480x$.

ii. Να βρείτε το μήκος x της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, έτσι ώστε το κασόνι να έχει μέγιστο όγκο.

34)Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 10 cm και Ε, Ζ σημεία των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΕ=xcm και ΓΖ=2xcm.

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=x^2-5x+50$.

ii. Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδόν E(x) ελαχιστοποιείται.

35)Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x$, $x\in\mathbb{R}$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x=1, την τιμή f(1)=2. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

36)Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x+10$ με $1<x<5$.

i. Να βρείτε την τιμή του $x\in(1,5)$, για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση.

ii. Να υπολογίσετε την κατανάλωση αυτή.

37)Κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο πλευράς x dm και ανοικτό από πάνω, έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας ίσο με 12 dm^2.

i. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του δίνεται από τη συνάρτηση $V(x)=\frac{1}{4}(12x-x^3)$.

ii. Να υπολογίσετε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ ο όγκος γίνεται μέγιστος και ποιος είναι ο μέγιστος όγκος.

38)Το κόστος ημερήσιας παραγωγής x τόνων τσιμέντου σε ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)=50+70x+\frac{1}{20}x^2$, $x>0$. Μία ημερήσια παραγωγή x τόνων, μπορεί να πουληθεί στην τιμή των $270-\frac{3x}{20}$ ευρώ ανά τόνο.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση του κέρδους P, x τόνων παραγωγής, σε ευρώ.

ii. Να υπολογίσετε την ημερήσια παραγωγή, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό.

39)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=27-x^2$.

i. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ii. Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει δύο κορυφές στον άξονα των τετμημένων και δύο κορυφές πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

40)Ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με $\sqrt{3}$m περιστρέφεται γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές του και παράγει κώνο.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση του όγκου του κώνου, σε συνάρτηση με το μήκος x της πλευράς που περιστρέφεται.

ii. Να υπολογίσετε την ακτίνα και το ύψος του κώνου που έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τον μέγιστο δυνατό όγκο.

41)<u>Θέμα 3^ον^ θετική-τεχνολογική 1999</u>:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x)>0$ στο (0,1). Αν f(0)=2 και f(1)=4 να δείξετε ότι:

i) Η ευθεία y=3 τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. Μονάδες 7

ii) Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$. Μονάδες 12

iii) Υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

Μονάδες 6

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$ και τα σημεία Α , Β της γραφικής της παράστασης στις θέσεις με τετμημένες αντίστοιχα x , x+1 .

i. Να προσδιορισθεί το x < 0 , ώστε το εμβαδόν Ε(x) του τριγώνου ΑΟΒ όπου Ο(0,0) να γίνεται μέγιστο και να βρεθεί το $\lim_{x\to-\infty} E(x)$.

ii. Αν το x μειώνεται με ταχύτητα 2cm/sec , να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι x=-4 .

43) (ΕΜΕ 2010) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{|1-\ln x|}{x}$, x>0.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Αν η τετμημένη του σημείου Μ(x,f(x)) μεταβάλλεται με ρυθμό 1 m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(t) του τριγώνου ΑΟΒ, όπου Α(x,0), Ο(0,0), και Β(0,f(x)), τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0)=4$m.

iii. Αν τη χρονική στιγμή t=0 το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση (1,1) , τότε να αποδείξετε ότι: **α)** x(t)=t+1.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε(t) ελαττώνεται με τον χρόνο όταν t>e-1.

44) (ΕΜΕ 2012) Μια συνάρτηση f:[0,2]→ IR, είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0,2] και η γραφική παράσταση της f΄ βρίσκεται στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ με Α(0,0), Β(2,0), Γ(2,1) και Δ(0,1). Εάν ισχύει f΄(0)<f΄(2)<f΄(1), τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f΄ τέμνει την ευθεία ΒΔ σε ένα τουλάχιστον σημείο Κ.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε το σημείο $N(x_0,f΄(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f΄ να είναι πλησιέστερο στην πλευρά ΓΔ.

iii. Για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος:

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h\to 0}\varphi(h)$ όπου $\varphi(h)=\frac{[f'(x_0+h)]^2-[f'(x_0-h)]^2}{4h}$.

β) Ένα σημείο $M(x(t),f΄(x(t))$ όπου x(t) μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f΄. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΔΜΓ τη χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στη θέση $N(x_0,f΄(x_0))$.

45. (ΕΜΕ 2014) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g :(-1,+∞)→ IR με f(x)=ln(x+1) και $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

i. Να λύσετε την εξίσωση f(x)+g(x)=0 και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης Φ(x)=f(x)+g(x).

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο Ο(0,0), η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.

iii. Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Αν Ν είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x x′ και Α(0,α) σημείο του άξονα yOy,′ με α>0, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής Ε΄(t) του εμβαδού Ε(t) του τριγώνου ΑΜΝ κάθε χρονική στιγμή t ισούται με Φ(x(t)).

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με $\left(2\ln 3+\frac{8}{9}\right)cm^2/sec$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x}$, x≤0.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Ένα υλικό σημείο $A(\alpha,\sqrt{-\alpha})$, α < 0 κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του α′(t)=−α(t). Επίσης υλικό σημείο Μ(x,y) με x>0, κινείται στην ευθεία με εξίσωση y=x. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $A\hat{O}M$ =θ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι (ΟΑ) = $\sqrt{2}$.

47. (ΕΜΕ 2016) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:(1,+∞)→ IR, με f(e)=1, η οποία για κάθε x∈(1,+∞) ικανοποιεί τις σχέσεις:

- f(x)>0
- $xf΄(x)+f^2(x)=0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\ln x}$, x∈(1,+∞).

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=εφx, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

iii. Ένα υλικό σημείο Μ(α,f(α)), α>1 κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα 4αcm/sec. Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα xOx′, στο σημείο Α, τότε:

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Α, τη χρονική στιγμή t_0, που το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο (e,f(e)).

β) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα xOx′ , να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\theta(t_0)=\frac{12e}{e^2+1}$ rad/sec.

48) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με:

- $f(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$
- $f(1)=-\frac{1}{e}$
- $(1-x)f(x)=x(\ln x-x)(f(x)+f'(x))$ …….(1) για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Εάν $f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$:

ii. Να δείξετε ότι $f(x)<0$, για κάθε $x>0$.

iii. Να δείξετε ότι $\ln x\leq x-1$, $x>0$ και να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης f.

iv. Εάν F συνάρτηση για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x>0$, να δείξετε ότι $F(x)+F(3x)>2F(2x)$ για κάθε $x>0$.

v. Εάν $\beta>0$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\beta,2\beta)$, τέτοιο ώστε $F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΜΤ ROLLE ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

49)23199-4: Έστω $f:(1,+\infty)\to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}$ και $f(e)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

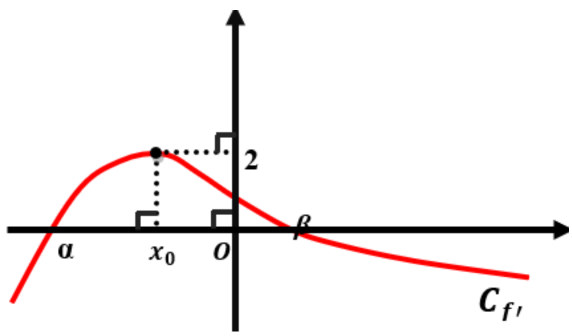
50)23210-4: Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$. Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$
- τα α,β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha)<0,$ και $f(\beta)>0.$
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathrm{R}$, ισχύει $f(x+1)-f(x)\le 2$. (Μονάδες 8)



51)23311-4: Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=\frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\ \mathrm{m/sec}$. (Μονάδες 5)

52)23376-4: Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\quad x\in\mathbb{R}$ και
- $g(x)=\ln x,\quad x\in(0,+\infty).$

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)

ii. η συνάρτηση h είναι "1-1".(Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0, x>0.$ (Μονάδες 08)

53)23375-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 6)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το IR.
(Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x + f(x)) > x$, $x \in$ IR. (Μονάδες 6)

54)24579-4: Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to$ IR με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.

α) **i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in$ IR. (Μονάδες 7)

55)24587-4: Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2}\, |x_0 - ln x_0|$.

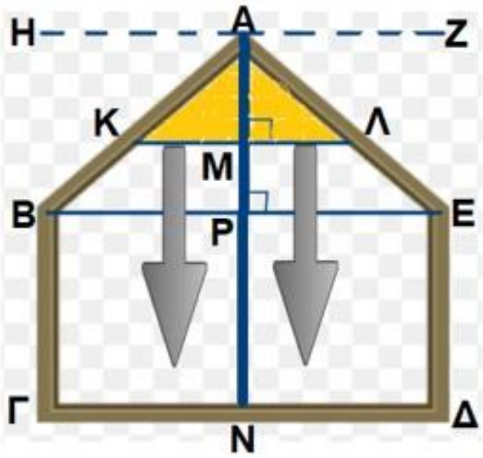
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2}\, (x_0 - ln x_0)$.
(Μονάδες 5)

β) **i.** Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.
(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.
(Μονάδες 5)

56)25257-4: Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $B\Gamma\Delta E$ και το ισοσκελές τρίγωνο ABE. Είναι $AP = 0{,}8$m, $BE = 1{,}6$m, $AM = x$ m, $B\Gamma = 1$m. Το ορατό κάτω μέρος $K\Lambda$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση HZ,



με σταθερό ρυθμό, ώστε το M να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AN (με $AM \neq 0$). Αν $E = E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

1) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E, ισχύει

$$E(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε } m^2.$$

(Μονάδες 8)

2) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x, όταν $x = \frac{4}{5}$ m, είναι ίσος με $E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$ m^2/m. (Μονάδες 9)

3) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5}$ m, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0{,}08$ m/s για κάθε $t \geq 0$. (Μονάδες 8)

57)25761-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(ln\, x - 1) + 1$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\, ln\, x + 1 = x$.
(Μονάδες 12)

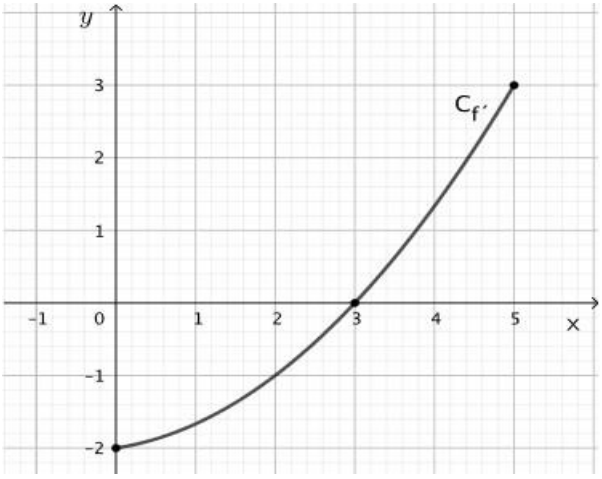
58) 25764-2: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), x \geq 0 \\ x^3, x < 0 \end{cases}.$$

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR. (Μονάδες 13)

59)26707-2: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

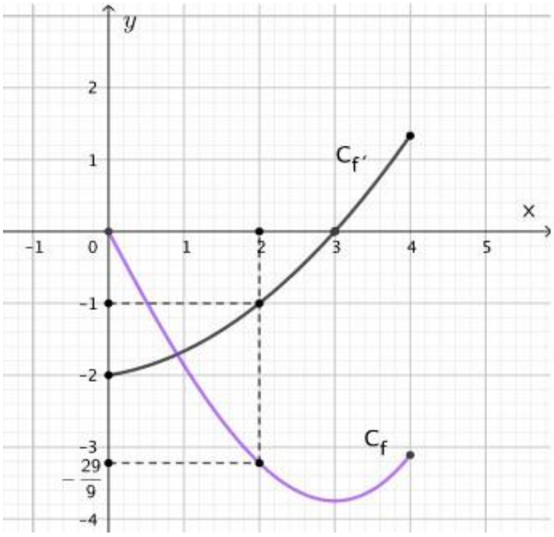


α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$; (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o=3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

60)26712-2: Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f'.



α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_o=2$. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_o=2$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)

61)27082-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3-3x$, $x \in$ IR.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-5,+\infty)$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$. (Μονάδες 07)

62)27319-4: Δίνεται η συνάρτηση f με
$f(x)=(x-2)e^x+(x-1)lnx$, $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2). (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8) (Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x'x στο σημείο x_0 του (α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 9)

63)27455-4: Δίνονται οι συναρτήσεις f : IR → IR με $f(x)=\begin{cases}-1, & x<2\\ e^{x-2}-2, & x\geq 2\end{cases}$ και g : IR - {2} → IR με $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-3$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in$ IR.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 14)

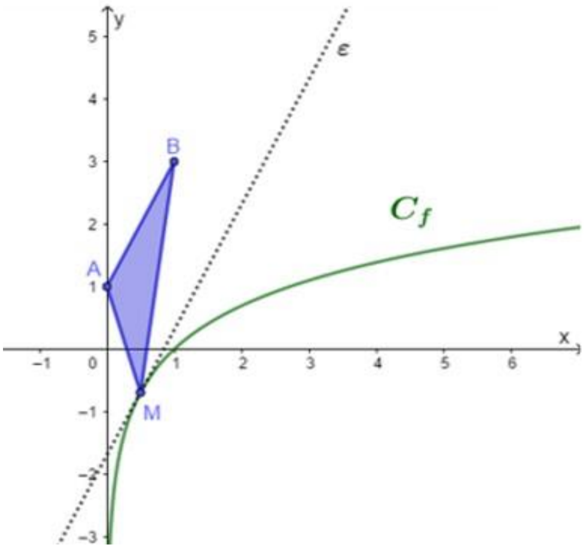
β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και
$$\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x).»$$

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

64)27650-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.



α)

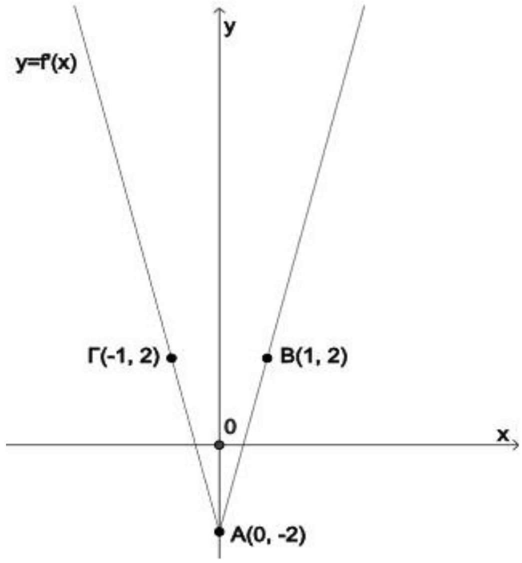
i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)

β) Έστω Ε(x) $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - lnx), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A. (Μονάδες 07)

65)28337-4: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f', είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1,2)$ και η άλλη από το $Γ(-1,2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $Δ(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 7)

66)28338-4: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου f' τέμνονται στο σημείο $A(-2,0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

i. $x_1 = 2$, (Μονάδες 5)

ii. $x_2 = -2$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f' είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού και η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $B(0,-12)$. Να αποδείξετε ότι:

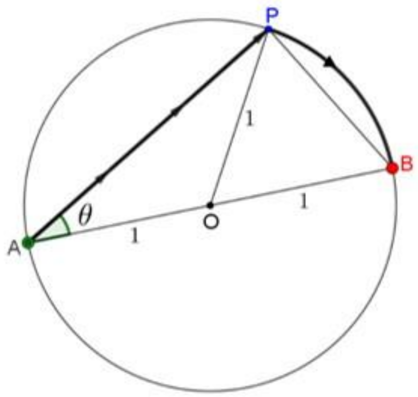
i. $f'(x) = 3x^2 - 12$, (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = x^3 - 12x - 16$, (Μονάδες 5)

iii. η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 6)

67)28532-4: Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας $1\ Km$ και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα $3\ Km/h$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα $6\ Km/h$. Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι $\theta\ rad$.



α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι $f(\theta) = \frac{1}{3}\cdot(2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

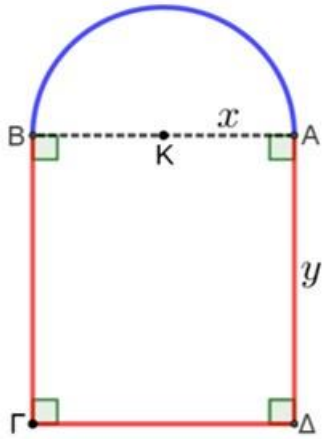
β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]$.

(Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\ rad$ σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S = x\cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

68)28534-4: Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα.



Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\ m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\ m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta) = y\ m$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.

α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)}$.

(Μονάδες 8)

69)28685-4

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

(Μονάδες 8)

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$ (διπλανό σχήμα).

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου ΟΑΜ, όπου Ο(0,0), Α(x,0) και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 cm^2/sec$. (Μονάδες 10)

70)29150-4: Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

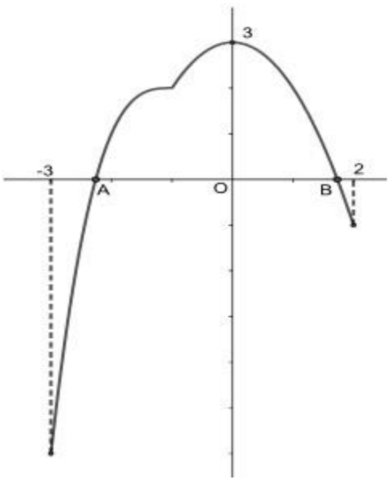
1) **i.** Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 4)

2) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διάνυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)

3) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 6)

71)29644-4: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α και Β. Έστω g η συνάρτηση με $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-3,2]$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

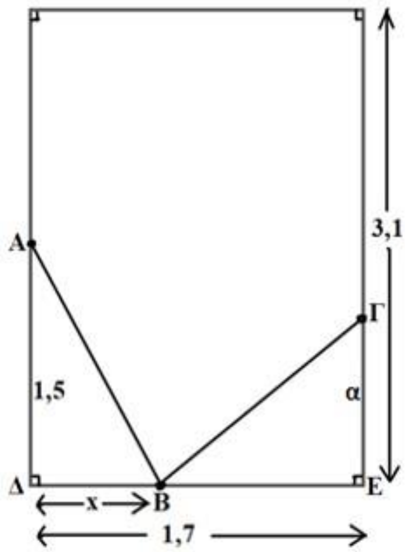
β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y=x+3$. (Μονάδες 10)

72) 31643-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-3x^3-x^2+9x$, $x\in[1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-9x^2-2x+9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. (Μονάδες 13)

73)31680-4: Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνονται τα μήκη $ΔB=x$, $ΔE=1{,}7$, $AΔ=1{,}5$, $ΓE=α$ και $L=AB+BΓ$ που εκφράζονται σε μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι $L=L(x)=\sqrt{x^2+2{,}25}+\sqrt{(1{,}7-x)^2+α^2}$, $x\in\left(0,\frac{17}{10}\right)$. (Μονάδες 07)

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει $1{,}02$ μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+2{,}25}}-\sqrt{\frac{(1{,}7-x)^2}{(1{,}7-x)^2+α^2}}$, $x\in\left(0,\frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι α=1. (Μονάδες 10)

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1{,}02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει. (Μονάδες 08)

74)32390-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

75)32524-4: Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to$ IR με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x) = x \ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 1$.

(Μονάδες 6)

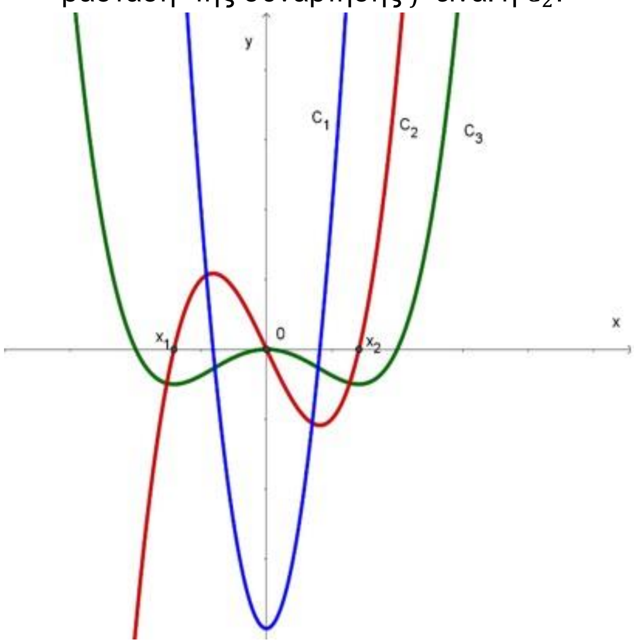
γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x}{e - x\ln x - ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

(Μονάδες 7)

76)32694-2: Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο IR. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2.



α) i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					

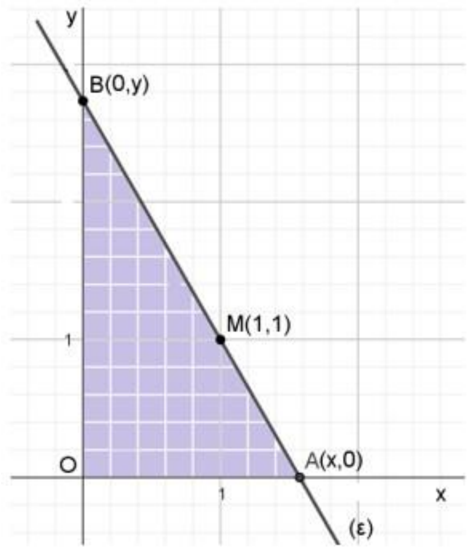
(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F. (Μονάδες 8)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F.

(Μονάδες 7)

77)34440-4: Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $M(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0)$, $x>0$ και $B(0,y)$, $y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x = 2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3, E(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $\mathrm{K}(x, y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

(Μονάδες 6)

78) END.