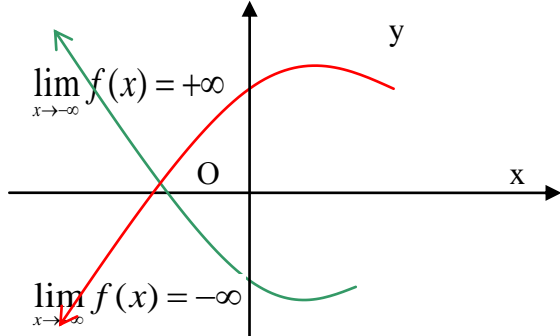
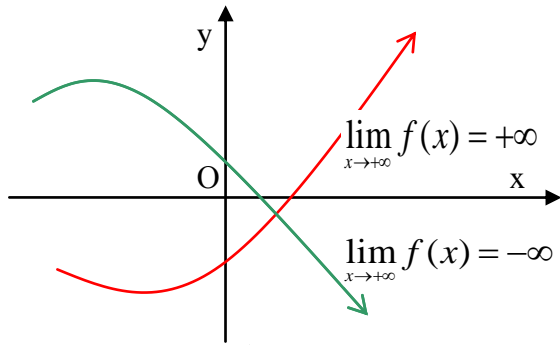


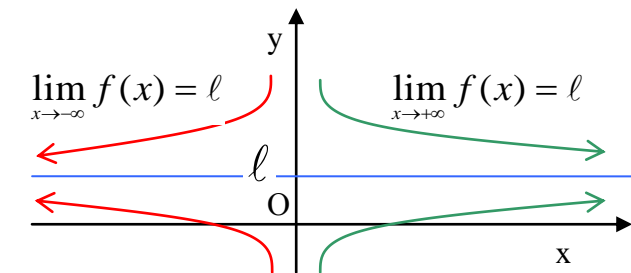
ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$



2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$



- 3.** Όταν $x \rightarrow +\infty$ πρέπει $Af = (\alpha, +\infty)$.
 Όταν $x \rightarrow -\infty$ πρέπει $Af = (-\infty, \alpha)$.

4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2\nu} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2\nu+1} = \pm\infty$

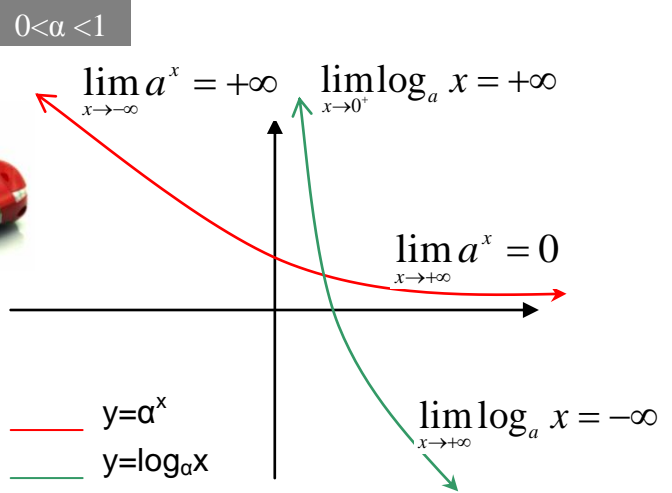
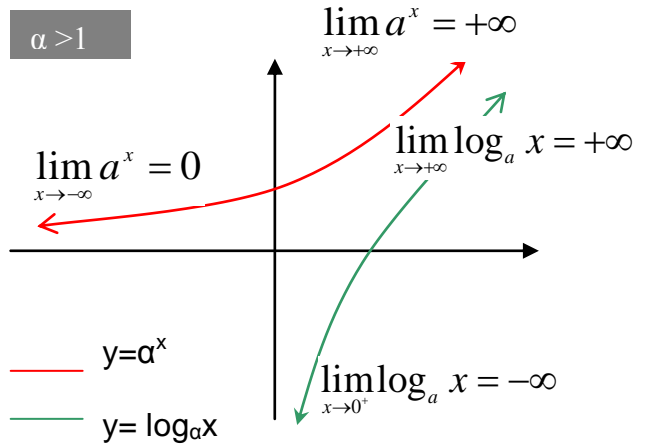
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0.$

5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_\nu x^\nu).$

6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} =$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{αν } \nu > \mu \\ \frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}, & \text{αν } \nu = \mu \\ 0, & \text{αν } \nu < \mu \end{cases}$

- 7.** Όρια εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης:



- 8.** Αν $f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)} - \sqrt[\nu]{Q(x)}$, και τα $P(x), Q(x)$ έχουν διαφορετικό μεγιστοβάθμιο όρο, βγάζουμε σταδιακά κοινούς παράγοντες τους μεγιστοβάθμιους όρους.

Όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $|x| = x$ και όταν $x \rightarrow -\infty$, $|x| = -x$.

- 9.** Αν $f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)} - \sqrt[\nu]{Q(x)}$, και τα $P(x), Q(x)$ έχουν ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο, τότε αν εφαρμόσουμε την παρατήρηση 8, θα οδηγηθούμε στην απροσδιόριστη μορφή $\pm\infty \cdot 0$. Για να υπολογίσουμε το όριο, μετατρέπουμε την παράσταση σε ρητή με τον τύπο

$A - B = \frac{A^\nu - B^\nu}{A^{\nu-1} + A^{\nu-2}B + \dots + AB^{\nu-2} + A^{\nu-1}}$

- 10.** Το ίδιο όπως στις παρατηρήσεις 8 και 9, εφαρμόζουμε και στην συνάρτηση $f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)} - Q(x)$, ανάλογα αν η ν -στη ρίζα του μεγιστοβάθμιου όρου του $P(x)$ είναι ίσος ή μεγαλύτερος από τον μεγιστοβάθμιο όρο του $Q(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εάν $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, αν

i) $f(x) = (\mu^2 - |\mu|)x^3 + \mu x^2 + \mu^2 x - \mu$ ii) $f(x) = \frac{(x^3 + x)\mu^2 + (x^3 - x)\mu - \mu}{(x - x^2)\mu^2 + x\mu + x^2|\mu| - 1}$

2. Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(2x - 3)\eta\mu \frac{1}{x} \right]$ v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$
 ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(2x - 3)\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right]$ iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \epsilon\phi \frac{1}{x + 2} \right)$

3. Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^4 - 3x^2 + 1} + 2x - 1)$ iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^4 + 1} - \sqrt{9x^4 + 2})$ v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{x^3 - x + 1}$
 ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{8x^2 - 2})$ iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\eta\mu x}{x^2 + 2}$

4. Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}$

(Παρατήρηση: τα ερωτήματα είναι εξαρτώμενα.)

5. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 2} - \alpha x + \beta \right) = 1$.

6. α) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} + ax + 1)$.

β) βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} + ax - 2\beta) = 1$.

7. Εάν για την περιττή συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2 - \eta\mu x} = -\infty$, να δείξετε ότι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

8. Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{x^4 + 1}$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
 ii) $\lim_{x \rightarrow 0} [(3x - 5) \ln x^2]$ iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 2^x}{e^x + 2^{x+3}}$

9.

