1. 23106-4: Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε $(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, για κάθε $x \in [0,\pi]$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f. (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: [0,\pi] \to$ IR με $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. (Μονάδες 07)

Λύση:

α) g(f(x)) = |συνx| ⇔ $\sqrt{1-f^2(x)} = |\sigma\upsilon\nu x|$

⇔ 1-f ^{2}(x)=συν^{2}x

⇔ f ^{2}(x)=1-συν^{2}x

⇔ f ^{2}(x)=ημ^{2}x

⇔ |f(x)|=|ημx|

Για τις ρίζες της εξίσωσης f(x)=0 έχουμε:

f(x)=0 $\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$ ημx=0 ⇔ x=κπ, κ ∈ ℤ.

Επειδή όμως η f είναι ορισμένη στο [0, π], τότε έχουμε x=0 ή x=π.

Επομένως είναι x 0 ή x = π.

β) Από το (β) ερώτημα, η f(x) δεν μηδενίζεται στο διάστημα (0,π) και επειδή είναι συνεχής σε αυτό, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (0, π) και επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, είναι f(x) > 0, για κάθε $x \in (0,\pi)$, οπότε η εξίσωση |f(x)|=|ημx| δίνει f(x)=ημx, γιατί ημx > 0 στο (0,π).

Άρα f(x)=ημx, $x \in [0,\pi]$.

γ) |ημx| ≤ |x| $\xRightarrow[\eta\mu x>0]{x>0}$ ημx ≤ x

⇔ ημx – x ≤ 0

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\eta\mu x - x} = -\infty$ (μορφή $\frac{\alpha}{0}$).

2. 23375-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x \in$ IR.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in$ IR είναι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 6)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το IR. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f(x)\right) > x,\ \ x \in$ IR. (Μονάδες 6)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x ∈ IR με $f\,'(x) = \left(ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)'$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{\sqrt{x^2+1}-x}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}-x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αφού είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ για κάθε $x \in$ IR. Επομένως είναι «1-1» και άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών f(IR) της f.

$D_{f^{-1}}$ = f(IR) $\overset{f\downarrow}{=}$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$ = (-∞, +∞), γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$= \lim\limits_{u\to 0^+} lnu$

= -∞

Θέτω u=$\sqrt{x^2+1}-x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$\overset{+\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)} \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}$ *0,*

με u=$\sqrt{x^2+1}-x>0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$= \lim\limits_{w\to+\infty} lnw$

= +∞

Θέτω w=$\sqrt{x^2+1}-x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} w = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$= +\infty.$

Άρα f(IR) = IR.

γ) $f^{-1}(x+f(x)) > x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x+f(x))\right) < f(x)$

$\Leftrightarrow x + \cancel{f(x)} < \cancel{f(x)}$

⇔ *x < 0.*

3. **24761-3:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023-\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο IR.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR, άρα και στο 0, οπότε

f(0) = $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ⇔ α = $\lim\limits_{x\to0}\left(2023-\frac{\eta\mu x}{x}\right)$

⇔ α = 2023 – 1

⇔ α = 2022.

β) |ημx| ≤ 1 $\underset{x\neq0}{\overset{x\to0}{\Leftrightarrow}} \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$=0

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)$=0

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$ = 0, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ = 2023 – 0

⇔ $\lim f(x)$= 2023.

γ) Αφού f(0) = 2022, ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης f(x) = 2022.

Για x ≠ 0 έχουμε: f(x) = 2022 ⇔ $2023-\frac{\eta\mu x}{x}$ = 2022

⇔ $\frac{\eta\mu x}{x}$ = 1

⇔ ημx = x

που είναι αδύνατη για x ≠ 0.

Συνεπώς η μοναδική λύση της εξίσωσης f(x) = 2022 είναι η x = 0.

4. **24767-2:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$, $x \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Για κάθε x₁, x₂ ∈ IR με x₁ < x₂ έχουμε $e^{x_1} < e^{x_2}$

$\Leftrightarrow 0 < e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}+1} > \frac{1}{e^{x_2}+1}$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

Εναλλακτικά $f\,'(x) = -\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$, για κάθε x ∈ IR, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

Επιπλέον η f είναι συνεχής, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0$,

και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{0+1} = 1$,

οπότε $f(IR) \overset{f\downarrow}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,1)$.

β) Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι «1-1», άρα αντιστρέφεται.

Αν f(x) = y $\Leftrightarrow y = \frac{1}{e^x+1}$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{y} - 1$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y}$

$\overset{y\in(0,1)}{\Longleftrightarrow} \ln e^x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$, x∈(0,1).

5. 25124-2: Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3,\ x \in (-\infty, 0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Έστω x₁, x₂ ∈ $(-\infty, 0]$, με x₁ < x₂ $\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$

$\Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Εναλλακτικά $f\,'(x) = -3x^2 < 0$, για κάθε x ∈ $(-\infty, 0]$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι «1-1», άρα αντιστρέψιμη.

$D_{f^{-1}} = f((-\infty,0]) \overset{f\downarrow}{=} \left[f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)$

$= \left[0, \lim_{x\to-\infty}(-x^3)\right)$

$= [0, +\infty)$.

γ) Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε ως προς x την εξίσωση:

y = f(x) ⇔ y = $-x^3$

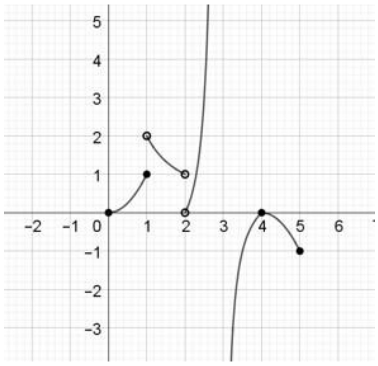
⇔ $x^3 = -y$

$\underset{y>0}{\overset{x<0}{\Leftrightarrow}} x = -\sqrt[3]{y}$

⇔ $f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{y}$

⇔ $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$, x ≥ 0.

6. 25749-2: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι f(1)=1. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$. (Μονάδες 5) **ii.** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{f(x)}$. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Σημείο ασυνέχειας είναι μόνο το 1 διότι 1$\in$D$_f$ και δεν υπάρχει το όριο στο 1, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$=1 ενώ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ = 2. Το 2 και το 3 δεν είναι σημεία ασυνέχειας αφού δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

β) Η f είναι συνεχής στο [0,1] αφού είναι συνεχής στο (0,1) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ = 1 = f(1) και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ = 0 = f(0).

Εναλλακτικά, η f είναι συνεχής στο διάστημα [0,1] του πεδίου ορισμού της, αφού το τμήμα της γραφικής της παράστασης που αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό, είναι μια καμπύλη που δεν διακόπτεται για καμιά τιμή του x που ανήκει στο [0,1].

γ) **i.** $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{f(x)} \overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{\underset{\substack{f(x)<0 \\ κοντά\ στο\ 4}}{=}}$ -∞.

7. 26605-4: Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : IR → IR για την οποία ισχύουν :

- f^2(x) - 5 = x^2 για κάθε x $\in$ IR.
- $f(2) = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. f(x) ≠ 0 για κάθε x $\in$ IR. (Μονάδες 4)

ii. f(x) = $\sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε x $\in$ IR. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με g(x) = x^2– συνx, με x $\in$ IR. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-∞, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞). (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση f^2(x) = 5 + συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π). (Μονάδες 9)

Λύση:

α) i. Ισχύει ότι f ^{2}(x) - 5 = x^2 ⇔ f ^{2}(x) = x^2+ 5 …..(1) για κάθε x $\in$ IR.
Εάν f(x) = 0 τότε η (1) δίνει x^2+5=0, αδύνατο, οπότε f(x) ≠ 0 για κάθε x $\in$ IR.
ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο IR με f(x) ≠ 0 για κάθε x $\in$ IR, οπότε η f διατηρεί πρόσημο στο IR και επειδή f(2) = 3 > 0, η συνάρτηση f παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε x $\in$ IR.
Άρα (1) ⇔ f(x) = $\sqrt{x^2+5}$ για κάθε x $\in$ IR.
β) i. Αν g(x) = x^2-συνx, με x $\in$ IR, g'(x) = 2x+ ημx και g''(x) = 2+ συνx > 0, για κάθε x $\in$ IR. Άρα η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

• Για x < 0 ισχύει g'(x) < g'(0) = 0, αφού η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, ενώ:
• Για x > 0 ισχύει g'(x) > g'(0) = 0. Άρα για τη συνάρτηση g έχουμε:
g συνεχής στο (-∞, 0] με g'(x) < 0 στο (-∞, 0), άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0].
Αντίστοιχα g συνεχής στο [0, +∞) με g'(x) > 0 στο (0, +∞), άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).
(Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το g(0) = -1).
ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + συνx$ με $x \in$ IR, γράφεται ισοδύναμα $x^2 + 5 = 5 + συνx$

$$\Leftrightarrow x^2 - συνx = 0$$
$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ με } x \in IR.$$

Ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση g(x) = 0 έχει δύο ρίζες αντίθετες στο (-π,π) και δεν έχει άλλες ρίζες στο IR.
Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [0,π], με $g(π) = π^2 - συνπ = π^2 + 1 > 0$
και g(0) = -συν0 = -1 < 0
Άρα g(π)g(0) < 0.
Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [0,π], οπότε η εξίσωση g(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα $ρ \in (0, π) \subset (0,+\infty)$. Επιπλέον η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞), οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.
Επειδή $g(-x) = (-x)^2 - συν(-x) = x^2 - συνx = g(x)$, η συνάρτηση g είναι άρτια, άρα και το -ρ είναι ρίζα της εξίσωσης g(x)=0, αφού g(-ρ) = g(ρ) = 0. Επειδή $0 < ρ < π \Leftrightarrow -π < -ρ < 0$, η ρίζα –ρ της εξίσωσης g(x)=0 βρίσκεται στο διάστημα (-π,0).
Επιπλέον η ρίζα -ρ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 στο διάστημα (-∞ , 0] αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
Άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - συνx=0 \Leftrightarrow f^2(x) = 5 + συνx$ με $x \in$ IR έχει ακριβώς δύο ρίζες αντίθετες μεταξύ τους οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π).

8. 26640-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)
β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το IR. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 5)
δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$. (Μονάδες 5)

Λύση: α) A_f = IR. Έστω $x_1, x_2 \in$ IR, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2} \\ x_1^3 < x_2^3 \\ 2x_1 < 2x_2 \end{array}\right\} (+)$$
$$\overline{e^{2x_1} + x_1^3 + 2x_1 < e^{2x_2} + x_2^3 + 2x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.
Εναλλακτικά $f'(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + 2 > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι «1-1» και αντιστρέφεται. Επίσης είναι συνεχής στο IR οπότε έχει σύνολο τιμών f(IR) $\overset{f\uparrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ = (-∞,+∞) = IR, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ = $= \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x} + x^3 + 2x)$ = 0-∞-∞ = -∞ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x} + x^3 + 2x)$ = +∞+∞+∞ = +∞.
γ) Εάν η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν α, β ∈ IR , με α < β και $f^{-1}(α) > f^{-1}(β)$.
Έχουμε $f^{-1}(α) > f^{-1}(β) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(α)) > f(f^{-1}(β)) \Rightarrow α > β$ άτοπο. Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
δ) $f(0) = e^0+0+0 = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$.
Η συνάρτηση f^{-1} ως γνησίως αύξουσα στο IR είναι «1-1».
$f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(1) \overset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow}$ x = 1.

9. 27317-2: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, x∈[0,2]
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο [0,2] (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το σύνολο τιμών της f είναι το [0, 2]. (Μονάδες 5)
ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 3)
iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1}είναι ίσες. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Έστω $x_1, x_2 \in [0,2]$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2$

$\Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2$

$\Leftrightarrow 4 - x_1^2 > 4 - x_2^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x_1^2} > \sqrt{4-x_2^2}$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2].

Εναλλακτικά $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} < 0$, για $x \in [0,2]$. Άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2].

β) i. Η είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο [0,2] ως τετραγωνική ρίζα πολυωνυμικής, άρα για το σύνολο τιμών της θα έχουμε $f([0,2]) \overset{f\downarrow}{=} [f(2),f(0)] = [0,2]$.

ii. Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2], θα είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

iii. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι $D_{f^{-1}} = f([0,2]) = [0,2]$ και ο τύπος της:

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

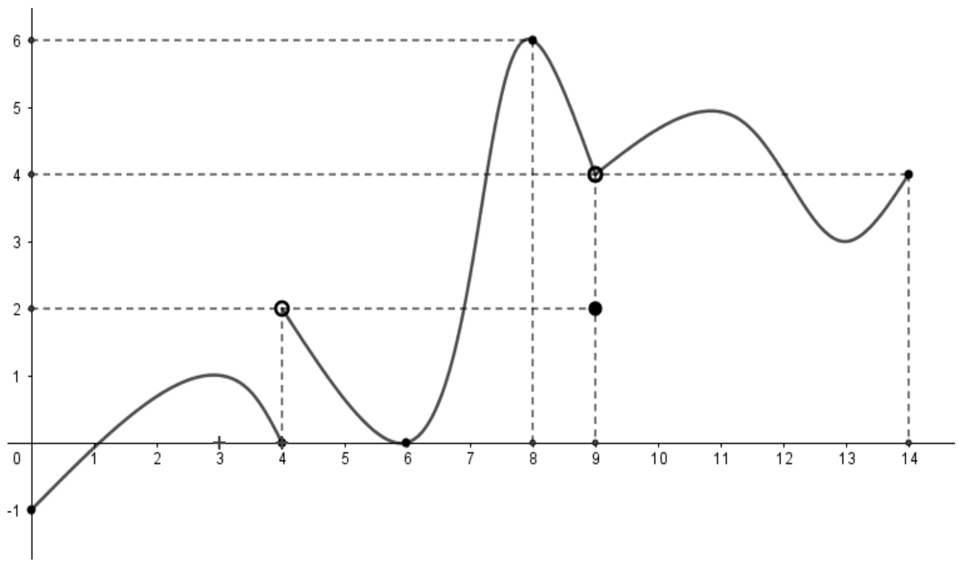
$\Leftrightarrow x = \sqrt{4-y^2}$............$y \in [0,2]$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{4-y^2}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$, με $x \in [0,2]$.

Άρα $D_{f^{-1}} = D_f$ και $f^{-1}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,2]$, οπότε οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

10. 27318-2: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$

ii. $\lim_{x\to 4} f(x)$

iii. $\lim_{x\to 9} f(x)$

iv. $\lim_{x\to 14} f(x)$

v. $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f αποτελεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Από τη γραφική παράσταση του σχήματος παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα [0,14]. Αντίστοιχα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f, δηλαδή το κλειστό διάστημα [-1,6].

β) i. $\lim_{x\to 0} f(x)$ = -1. **ii.** $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ = 0 και $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ = 2. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$.

iii. $\lim_{x\to 9} f(x)$ = 4. **iv.** $\lim_{x\to 14} f(x)$ = $\lim_{x\to 14^-} f(x)$ = 4.

v. $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)} \underset{\substack{f(x)>0 \\ \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\ \sigma\tau o\ 6}}{\overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=}}$ +∞.

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$ γιατί τα πλευρικά όρια στο 4 είναι διαφορετικά. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο 4.
Επίσης η f δεν είναι συνεχής στο 9, γιατί $\lim_{x\to 9} f(x)$ = 4 ≠ f(9) = 2.

Σε όλα τα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού της το όριο υπάρχει, είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής σε αυτά.

11. 29834-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2+16} - \frac{5}{2}ln(8x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. (Μονάδες 9)

Λύση:

α) $\begin{cases} 9x^2+16 \ge 0 \\ 8x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{8}$. Άρα $A_f = \left(-\frac{1}{8}, +\infty\right)$

Επίσης για $x \in \left(-\frac{1}{8}, +\infty\right)$, η συνάρτηση $9x^2$ +16 και η συνάρτηση 8x+1 είναι συνεχείς, οπότε και οι $\sqrt{9x^2+16}$ και ln(8x+1) είναι συνεχείς ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επομένως, η συνάρτηση f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

β) f(0) = $\sqrt{16} - \frac{5}{2}ln1$ = 4 > 0

f(1) = $\sqrt{9+16} - \frac{5}{2}ln9$ = $\sqrt{25} - \frac{5}{2}ln3^2$ = 5 – 5ln3 = 5(1 – ln3) < 0, γιατί e < 3 ⇔ lne < ln3
⇔ 1 < ln3
⇔ 1 – ln3 < 0.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] . Λόγω του ερωτήματος (β) για τη συνάρτηση f ισχύει f(0)f(1) < 0, οπότε από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ρ ∈ (0, 1) με f(ρ) = 0. Δηλαδή η εξίσωση f (x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1) .

12. 31548-2: Έστω f: IR → IR μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \le (x-1)^2$ για κάθε x∈ IR.
Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$. (Μονάδες 10)

β) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. (Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1. (Μονάδες 5)

Λύση:

α) Για x = 1 στην δοθείσα σχέση, έχουμε |f(1) – 2| ≤ 0 ⇔ |f(1) – 2| = 0 ⇔ f(1) = 2.

β) $|f(x) - 2x| \le (x-1)^2$ ⇔ $-(x-1)^2 \le f(x)-2x \le (x-1)^2$
⇔ $-(x-1)^2 + 2x \le f(x) \le (x-1)^2 + 2x$ $\underset{\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta.}{\overset{\kappa\rho\iota\tau.}{\Leftrightarrow}}$ $\lim_{x\to 1} f(x)$ = 2.

• $\lim_{x\to 1}(-(x-1)^2 + 2x) = 2$ και $\lim_{x\to 1}((x-1)^2 + 2x) = 2$

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα $\lim_{x\to 1} f(x)$ = f(1) = 2 επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής στο 1.

13. 35171-2 : Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε $g(x) = 2\ln x$, $x>0$ και $h(x) = \ln(1 + x^2)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h\circ g^{-1}$. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) i. Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού $D_g = (0,+\infty)$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και ένα προς ένα, άρα είναι αντιστρέψιμη.

Εναλλακτικά $g'(x) = 2/x > 0$. Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα σε αυτό οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} g(x), \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Άρα η αντίστροφη της συνάρτησης g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (το σύνολο τιμών της g).

Για να βρούμε την αντίστροφη θέτουμε

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = 2\ln x \Leftrightarrow y = \ln x^2 \Leftrightarrow x^2 = e^y \Leftrightarrow |x| = \sqrt{e^y} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x = \sqrt{e^y} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{e^y}. \Leftrightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{e^x},\ x\in\mathbb{R}.$$

β) $D_{h\circ g^{-1}} = \{x\in D_{g^{-1}}\ \text{και}\ g^{-1}(x)\in D_h\} = \{x\in\mathbb{R}\ \text{και}\ \sqrt{e^x}\in\mathbb{R}\} = \mathbb{R}$,

και $(h\circ g^{-1})(x) = h(g^{-1}(x)) = h(\sqrt{e^x}) = \ln[1 + (\sqrt{e^x})^2] = \ln(1 + e^x)$.

14. END.