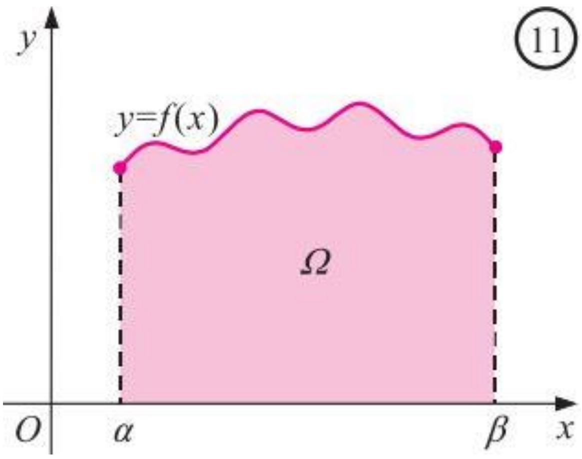
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. <u>*Ορισμός εμβαδού*</u>: Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και *Ω* το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου *Ω,* (σχ. 12), εργαζόμαστε ως εξής:



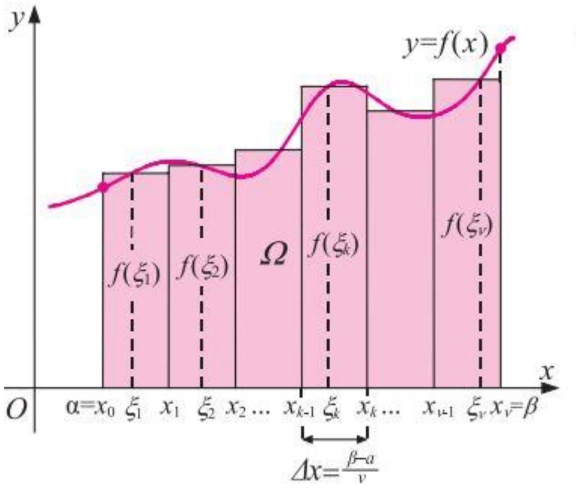
● Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

● Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$ (σχ. 13). Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι:

$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\ldots+f(\xi_\nu)\Delta x=$
$=[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_\nu)]\Delta x.$

● Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με ***Ε***(***Ω***). Είναι $E(\Omega)\geq 0$.



2. <u>*Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος*</u>:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

● Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$ με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

● Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\ldots+f(\xi_\nu)\Delta x=\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ *(άθροισμα Riemann).*

● Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το *α* στο *β* και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το *α* στο *β*». $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$.

3. Εάν $f(x)\geq 0$, το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ισούται με το εμβαδόν **Ε** του χωρίου Ω, (σχ. 12), που περικλείεται από την καμπύλη $y=f(x)$, τον άξονα x΄Ox (y=0) και τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β (σχήμα 12). Οι διαιρέσεις των αξόνων εκφράζουν μήκος.

4. Προφανώς το παραπάνω σύμβολο έχει νόημα αν α<β. Επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για α>β ή α=β ως εξής:

i. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0.$

ii. $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx.$

5. Εάν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β], και κ,λ∈R, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) $\int_\alpha^\beta (f(x) \pm g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \pm \int_\alpha^\beta g(x)dx.$

ii) $\int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx = \kappa \int_\alpha^\beta f(x)dx$ και γενικά:

iii) $\int_\alpha^\beta (\kappa f(x) + \lambda g(x))dx = k\int_\alpha^\beta f(x)dx + \lambda \int_\alpha^\beta g(x)dx.$

iv) Εάν f συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ∈Δ, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$

6. Εάν f συνεχής συνάρτηση στο [α,β], f(x)≥0, στο [α, β], και η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$

7. Εάν f, g συνεχείς άνισες συναρτήσεις στο [α, β], και f(x)≥g(x), στο [α, β], τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx.$ (Με απόδειξη) (Άσκηση 5,6).

Απόδειξη: f(x)≥g(x) ⇔ f(x) - g(x) ≥ 0. Επομένως από την προηγούμενη ιδιότητα:

$$\int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

8. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και όχι συνάρτηση, που η τιμή του εξαρτάται μόνο από τα άκρα ολοκλήρωσης α και β και όχι από το γράμμα που παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή της f. Δηλαδή $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du = \ldots$

9. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β], τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] και $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

10. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο [α, β], τότε $m(\beta - \alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M(\beta - \alpha)$.

11. Εάν f είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και α∈Δ, τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{F(x)} = \int_a^x \boldsymbol{f(t)dt}$, x∈Δ, είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή $\left(\int_a^x \boldsymbol{f(t)dt}\right)' = \boldsymbol{f(x)}$, για κάθε x∈Δ.

12. Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε διάστημα Δ έχει αρχικές συναρτήσεις στο Δ.

13. Εάν f συνεχής στο Δ, μπορεί να υπάρχουν αρχικές συναρτήσεις της f που δεν έχουν την μορφή $\int_a^x \boldsymbol{f(t)dt}$. Παράδειγμα η F(x)=2+ημx είναι αρχική της f(x)=συνx που δεν μπορεί να γραφτεί στην μορφή $\int_a^x \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu t dt}$, γιατί αν 2+ημx=$\int_a^x \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu t dt}$, τότε για x=α παίρνουμε 2+ημα=0 ⇔ ημα=-2 άτοπο.

14. <u>Θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού:</u> Εάν f συνεχής σε διάστημα [α,β] και G παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_a^\beta f\,(x)dx = [G(x)]_a^\beta = G(\beta) - G(\alpha).$

Απόδειξη:

Η συνάρτηση F(x)=$\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι επίσης μια παράγουσα της f στο [α,β]. Επειδή και η G(x) είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει c∈R τέτοιο, ώστε

G(x)=F(x)+c……………………………(1)

Από την (1) για x=α έχουμε:

G(α)=F(α)+c=$\cancelto{0}{\int_\alpha^\alpha f(t)dt}$+c=c…………..(2)

Από την (1) για x=β έχουμε:

G(β)=F(β)+c=$\int_\alpha^\beta f(t)dt$+c $\overset{(2)}{=}$ $\int_\alpha^\beta f(t)dt$+G(α)

Επομένως $\int_\alpha^\beta f(x)dx$=G(β)-G(α).

15. Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι $\int_{a}^{\beta} f'(x)dx = [f(x)]_{a}^{\beta} = f(\beta) - f(\alpha)$.

16. Βασικά ολοκληρώματα απλών και σύνθετων συναρτήσεων

Απλή	Σύνθετη
	$\int_{\alpha}^{\beta} (f'(x)+g'(x))dx = [f(x)+g(x)]_{\alpha}^{\beta}$
	$\int_{\alpha}^{\beta} (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}$
	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))}{g^2(x)}dx = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
	$\int_{\alpha}^{\beta} f'(g(x))g'(x)dx = [f(g(x))]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} 1dx = [x]_{\alpha}^{\beta} = \beta - \alpha$	$\int_{a}^{\beta} f'(x)dx = [f(x)]_{a}^{\beta} = f(\beta) - f(\alpha)$
$\int_{a}^{\beta} cdx = [cx]_{\alpha}^{\beta} = c(\beta - \alpha)$ (Άσκηση 2)	$\int_{a}^{\beta} \lambda f'(x)dx = [\lambda f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} x^{\nu}dx = \left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$, ν≠-1	$\int_{a}^{\beta} f^{\nu}(x)f'(x)dx = \left[\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \frac{1}{x^{\nu}}dx = \left[\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$, ν≠1	$\int_{a}^{\beta} \frac{1}{f^{\nu}(x)}f'(x)dx = \left[\frac{f^{-\nu+1}(x)}{-\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = [2\sqrt{f(x)}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} f'(x)\eta\mu f(x)dx = [-\sigma\upsilon\nu f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)dx = [\eta\mu f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = [\varepsilon\phi x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}dx = [\varepsilon\phi f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = [-\sigma\phi x]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}dx = [-\sigma\phi f(x)]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} e^{x}dx = [e^{x}]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} e^{f(x)}f'(x)dx = [e^{f(x)}]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \frac{1}{x}dx = [\ln\lvert x\rvert]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)}dx = [\ln\lvert f(x)\rvert]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{a}^{\beta} \alpha^{x}dx = \left[\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}\right]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{a}^{\beta} \alpha^{f(x)}f'(x)dx = \left[\frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha}\right]_{\alpha}^{\beta}$

$\int_a^\beta \varepsilon\varphi x dx = [-\ln\|\sigma\upsilon\nu x\|]_\alpha^\beta$	$\int_a^\beta f'(x)\varepsilon\varphi f(x)dx = [-\ln\|\sigma\upsilon\nu f(x)\|]_\alpha^\beta$
$\int_a^\beta \sigma\varphi x dx = [\ln\|\eta\mu x\|]_\alpha^\beta$	$\int_a^\beta f'(x)\sigma\varphi f(x)dx = [\ln\|\eta\mu f(x)\|]_\alpha^\beta$
$\int_a^\beta \frac{1}{c^2-x^2}dx = \left[\frac{1}{2c}\ln\frac{c+x}{c-x}\right]_\alpha^\beta$	(Με απόδειξη)
$\int_a^\beta \ln x dx = [x\ln x - x]_\alpha^\beta$	(Με απόδειξη)

17. Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της επιλεγείσης αρχικής συνάρτησης G. Πράγματι εάν F, G είναι δυο αρχικές της f, τότε G(x)=F(x)+c, c=σταθερά, οπότε:
G(β)-G(α)= F(β)+c-(F(α)+c)=F(β)+~~c~~-F(α) – ~~c~~ =F(β)-F(α).

18. Παραγοντική ολοκλήρωση: $\int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x)g'(x)dx$.

19. Αντικατάσταση μεταβλητής: $\int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(\beta)} f(t)dt$.

20. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_\alpha^\beta \eta\mu^\kappa x\cdot\sigma\upsilon\nu^\lambda x dx$.

i. Αν κ, λ άρτιοι εφαρμόζουμε τους τύπους αποτετραγωνισμού $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$.

ii. Αν κ= περιττός, θέτω συνx=u.

iii. Αν λ= περιττός, θέτω ημx=u.

21. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

i. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων.

ii. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του παρονομαστή, κάνουμε την διαίρεση και καταλήγουμε στην περίπτωση (i).

22. Εάν το ολοκλήρωμα περιέχει την παράσταση $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, τότε:

i. Αν Δ=0 τότε η παράσταση είναι ρητή.

ii. Αν Δ>0, θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = (x-\rho_1)u$, όπου ρ_1 η μια από τις δυο ρίζες του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

iii. Αν Δ<0, τότε αναγκαστικά α>0 και θέτουμε $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x-u)$.

23. Εάν f συνεχής στο [-α,α] και **περιττή**, τότε $\boxed{\int_{-\alpha}^{a} f(x)dx = 0.}$

Πράγματι $\int_{-\alpha}^{a} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_\alpha^0 f(-u)du + \int_0^a f(x)dx = \int_\alpha^0 f(u)du + \int_0^a f(x)dx =$

Θέτω x=-u. Τότε dx=-du.
Για x=-α, u=α
και για x=0, u=0

f περιττή

$= -\cancel{\int_0^a f(u)du} + \cancel{\int_0^a f(x)dx} = 0$. (Άσκηση 2)

24. Εάν f συνεχής στο [-α,α] και **άρτια**, τότε $\int_{-\alpha}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$ Πράγματι

$$\int_{-\alpha}^{a} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{0} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{\alpha}^{0} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

f άρτια

Θέτω x=-u. Τότε dx=-du.
Για x=-α, u=α
και για x=0, u=0

$$= \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(u)du$$. (Άσκηση 3)

25. Εάν f συνεχής στο R και **περιοδική** με περίοδο T, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx.$ Πράγματι

θέτω x=u+T, οπότε dx=du και για x=α+T $\Rightarrow$ u=α και για x=β+T $\Rightarrow$ u=β, και :

f περιοδική

$$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u+T)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du.$$ (Άσκηση 4)

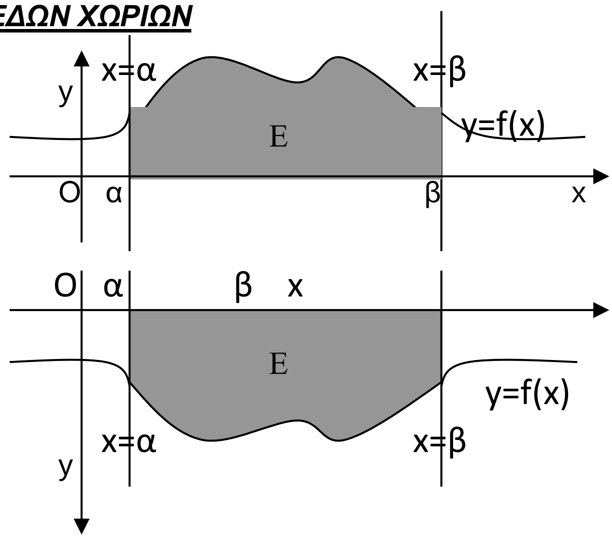
ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

1. Εάν f συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x), τον άξονα x΄Ox (y=0) και τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β είναι

E= $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, αν f(x)≥0 και

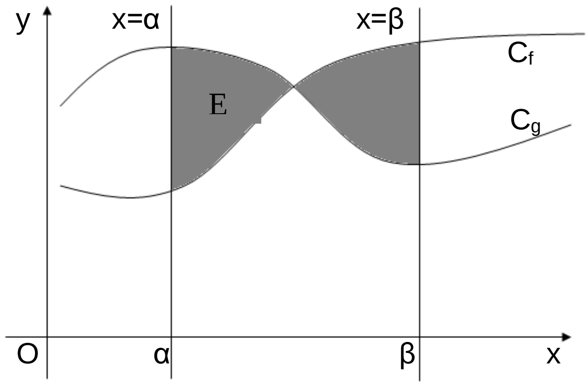
E=- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, αν f(x)≤0.

Γενικά $E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.



2. Εάν f,g συνεχείς στο [α,β], τότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f,C_g και των ευθειών x=α, x=β δίνεται από την σχέση:

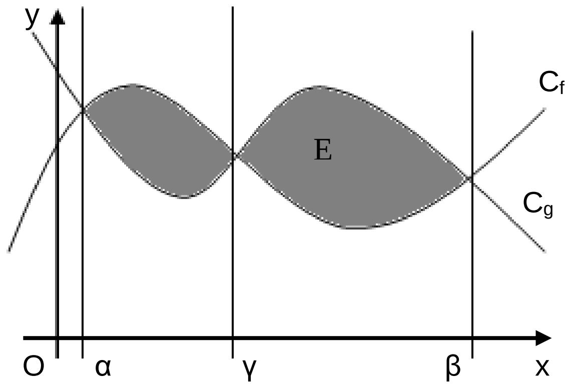
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx .$$



3. Εάν f,g συνεχείς στο [α,β], τότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g, δίνεται από την σχέση:

$$E = \int_{\alpha}^{\gamma} |f(x) - g(x)| dx + \int_{\beta}^{\gamma} |f(x) - g(x)| dx + \ldots ,$$

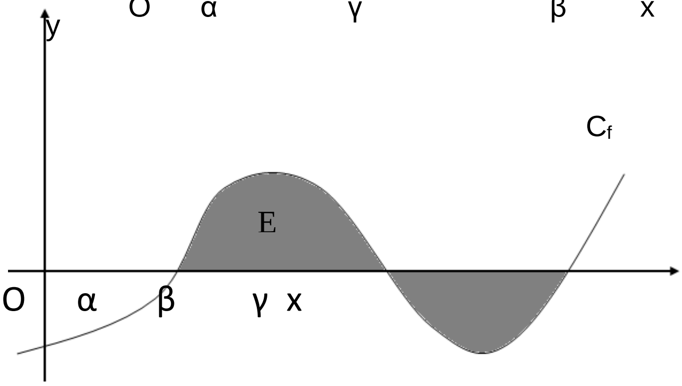
όπου α, γ, β, … είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=g(x), δηλαδή οι τετμημένες των σημείων τομής τους.



4. Εάν f συνεχής σε διάστημα Δ, τότε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f της f και τον άξονα x’Ox, δίνεται από την σχέση:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx + \int_{\beta}^{\gamma} |f(x)| dx + \ldots ,$$

όπου α, β, γ, … είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0, δηλαδή οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄Ox.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x-5, & \alpha\nu\ 1<x\le 2\\ x-1, & \alpha\nu\ 2<x<4\\ 3, & \alpha\nu\ 4<x\le 6\end{cases}$. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται:

a) $\int_1^2 f(x)dx.$ **d)** $\int_3^5 f(v)dv.$

b) $\int_3^2 f(x)dx.$ **e)** $\int_0^2 f(\omega)d\omega.$

c) $\int_3^4 f(u)du.$ **f)** $\int_6^6 f(t)dt.$

2. **α)** Να δείξετε ότι $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^{\nu}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx$, για κάθε ν∈N*.

β) Να δείξετε ότι $\int_0^{\pi/2}\eta\mu^2 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$.

3. Να δείξετε ότι $\int_{-2}^{2}\frac{e^x-e^{-x}}{x^2+1}dx=0$.

4. Υπολογίστε το $\int_{-1}^{1}|x|dx$.

5. Να δείξετε ότι $\int_{\pi}^{5\pi/4}\frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi=\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi$.

6. Να δείξετε ότι $\int_0^1\sqrt{x}dx\ge\int_0^1 x^3dx$.

7. Να δείξετε ότι $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{x^2+1}dx\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2+1}dx$.

8. Να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}$.

9. Να δείξετε ότι $\int_2^5\frac{1}{x^2+1}dx\le\int_2^5\frac{x}{10}dx.$

10. **α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x)=e^{x^2-x}, x∈[0,2].

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2.$

11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

11.1. $\int_0^1 2^x e^x dx$ **11.2.** $\int_0^{\pi/3}(\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x)dx$ **11.3.** $\int_1^e\frac{1-\ln x}{x^2}dx$

12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

12.1) $\int_0^2 3x^5dx$ 12.3) $\int_1^e\frac{x^3+1}{x}dx$ 12.5) $\int_0^1(x^3+x)^2dx$

12.2) $\int_0^{\pi}(x^4+3\sigma\upsilon\nu x)dx$ 12.4) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ 12.6) $\int_1^e\frac{x^2+x+1}{x}dx$

12.7) $\int_0^1 \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

12.8) $\int_2^3 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$

12.9) $\int_0^{\pi} (e^x + 2\eta\mu x)dx$

12.10) $\int_1^2 \frac{x-3}{x^4}dx$

12.11) $\int_1^e e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$

12.12) $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}-\eta\mu\frac{\chi}{2}\right)^2 d\chi$

12.13) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \varepsilon\phi^2 x\,dx$

12.14) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{3-5\sigma\phi^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

12.15) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}dx$

12.16) $\int_0^2 \frac{\chi^2-2\chi+1}{\chi-1}dx$

12.17) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx$

12.18) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{2\sigma\upsilon\nu^2 x-1+\eta\mu^2 x}$

12.19) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^2 x}dx$

12.20) $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

13. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

13.1) $\int_0^{\pi} \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$

13.2) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu 3t\,dt$

13.3) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\eta\mu\chi}\,\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi$

13.4) $\int_4^{e+3} \frac{dx}{x-3}$

13.5) $\int_{-1}^0 e^{2x+1}dx$

13.6) $\int_{5/2}^{7/2} \frac{dx}{(x-3)^2}$

13.7) $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx$

13.8) $\int_{9\pi/4}^{7\pi/3} \varepsilon\phi x\,dx$

13.9) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

13.10) $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

13.11) $\int_{7\pi/4}^0 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx$

13.12) $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

13.13) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$

13.14) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx$

13.15) $\int_{5\pi/2}^{11\pi/4} \sigma\phi x\,dx$

13.16) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)dx$

13.17) $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx$

13.18) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$

13.19) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^7\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^3\omega\,d\omega$

13.20) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\varepsilon\phi^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

13.21) $\int_{-1}^1 (x^3+2x^2+5)(3x^2+4x)dx$

13.22) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sqrt[3]{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$

13.23) $\int_1^e \frac{x^3+\ln x}{x}dx$

13.24) $\int_4^9 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

13.25) $\int_0^1 \frac{3x\,dx}{x^2+1}$

13.26) $\int_{-1}^1 x^3(2-3x^4)^3 dx$

13.27) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{4+x\ln x}dx$

13.28) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x-1}dx$

13.29) $\int_{1/2}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

13.30) $\int_{-1}^1 e^{-x^2-1}x\,dx$

13.31) $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}d\alpha$

13.32) $\int_{-8}^{-3} \frac{3d\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon}}$

13.33) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

13.34) $\int_0^{\pi/2} \alpha^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$

13.35) $\int_{1/e}^{e^7} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

13.36) $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

13.37) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \eta\mu^3 6x\sigma\upsilon\nu 6x\,dx$

13.38) $\int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2x+3}{2x+1}dx$

13.39) $\int_{\sqrt[3]{7}}^{\sqrt[3]{26}} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

13.40) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

13.41) $\int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x\,dx$

13.42) $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

13.43) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx$

13.44) $\displaystyle\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)dx}{x}$

13.45) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}dx$

13.46) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

13.47) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{e-1}} \frac{2xdx}{x^2+1}$

13.48) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{4-x^2}$

13.49) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx$

13.50) $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{7}}^{2} (x^3-7)^8 3x^2 dx$

13.51) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln^3 x}{x}dx$

13.52) $\displaystyle\int_{-3}^{e-4} \frac{x}{x+4}dx$

13.53) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} (\varepsilon\phi^2 x + \varepsilon\phi^4 x)dx$

13.54) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+4}$

14. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

14.1) $\displaystyle\int_{3}^{e+2} \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx$

14.2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x-1}{x-2}dx$

14.3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \varepsilon\phi^3 x dx$

14.4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{c(e-1)}{e+1}} \frac{dx}{c^2-x^2}$, x∈R.

14.5) $\displaystyle\int_{3}^{e+2} \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

14.6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x-3}{x^2-x-2}dx$

14.7) $\displaystyle\int_{2}^{e+1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}dx$

14.8) $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

14.9) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-5x+6}$

14.10) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$

14.11) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-1}{x^3+1}dx$

14.12) $\displaystyle\int_{1}^{e-1} \frac{2-x}{x^2+x}dx$

14.13) $\displaystyle\int_{1}^{e-2} \frac{x^3+6x^2+3x+6}{x^3+2x^2}dx$

15. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

15.1) $\displaystyle\int_{\frac{8}{7}}^{\frac{27}{26}} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\,\frac{1}{x(x-1)}dx$

15.2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{7}}^{-\frac{1}{26}} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\,\frac{1}{x(x-1)}dx$

15.3) $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

15.4) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

15.5) $\displaystyle\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x+1}}$

14.5) $\displaystyle\int_{0}^{14/9} \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

16. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

16.1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{10} x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

16.2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/3} \eta\mu^4 3x\sigma\upsilon\nu^2 3x dx$

16.3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^5\phi d\phi$

16.4) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{\sigma\upsilon\nu^5\chi}{\sqrt[3]{\eta\mu\chi}}d\chi$

16.5) $\displaystyle\int_{7\pi/4}^{2\pi} \frac{\eta\mu^5 y}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu y}}dy$

16.6) $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx$

16.7) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$

16.8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

16.9) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

16.10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

17. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

17.1) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x\eta\mu x dx$

17.2) $\int_{0}^{1} xe^{x} dx$

17.3) $\int_{1}^{e} x^{\nu} \ln x dx, \nu \in \mathrm{N}^{*}$

17.4) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \chi\sigma\upsilon\nu\chi d\chi$

17.5) $\int_{0}^{1} e^{x} x^{2} dx$

17.6) $\int_{\pi/4}^{\pi} e^{x}\eta\mu x dx$

17.7) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\sigma\upsilon\nu 2x dx$

17.8) $\int_{e}^{e^2} \ln x dx$

17.9) $\int_{0}^{3} e^{3x} x^{2} dx$

17.10) $\int_{\pi/2}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu 3x dx$

17.11) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^{x}} dx$

17.12) $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln x}{x^{3}} dx$

17.13) $\int_{0}^{1} \frac{xe^{x}}{(1+x)^{2}} dx$

Παρατήρηση: $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)'$

17.14) $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \eta\mu x \eta\mu 3x dx$

17.15) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{5x}\sigma\upsilon\nu 4x dx$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

18. Θέμα 3ο 2004: Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{x}f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R. και $f(0)=f(^3/_2)=0$.

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, ^3/_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.
2. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx$.
3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{I}(a)$

19. Θέμα 4ο 2008: Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R για την οποία ισχύει :

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_{0}^{2} f(t)dt - 45 .$$

1. Να δείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$. Μονάδες 8
2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δυο φορές παραγωγίσιμη στο . Να αποδείξετε ότι $\lim_{h\to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = g''(x)$. Μονάδες 4
3. Αν για την συνάρτηση f του (1) ερωτήματος και την συνάρτηση g του δεύτερου ερωτήματος ισχύει ότι $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε:
   i. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$. Μονάδες 10
   ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1». Μονάδες 3

20. Θέμα Γ 2010 ερώτημα Γ4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in$R. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} xf(x)dx$. Μονάδες 7

21. Θέμα Δ 2016: Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\pi$.
- f(R)=R και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε x∈R.

Δ.1. Να δείξετε ότι f(π)=π (μονάδες 4) και f΄(0)=1 (μονάδες 3) Μονάδες 7

Δ.2.

Δ.2.1. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. (μονάδες 4)

Δ.2.2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ.3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. Μονάδες 6

Δ.4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. Μονάδες 6

ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

22. 23219-4: Έστω συνάρτηση f: IR→ IR παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in$ IR. (Μονάδες 8)

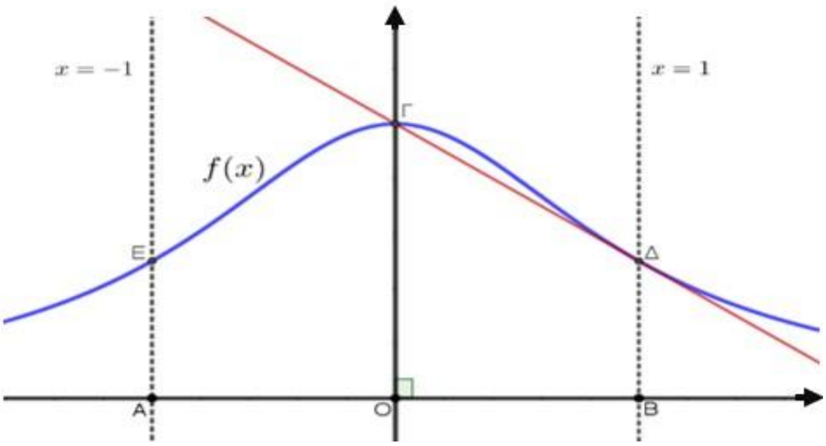
β) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx>1$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 xf'(x)dx<1$. (Μονάδες 6)

23. 23955-4: Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in$ IR και οι ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx > \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

24. 23957-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\frac{lnx}{x} f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \cdot lnx \cdot f(x) + xe^x}{x(f(x)+e^x)} dx$. (Μονάδες 10)

25. 24758-4: Έστω συνάρτηση f: IR → IR παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ IR. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ και για $x = -1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$. (Μονάδες 6)

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$. (Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$. (Μονάδες 6)

26. 24770-4: Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x) = ln(e^x - 1) + x - 1,\ x > 0}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

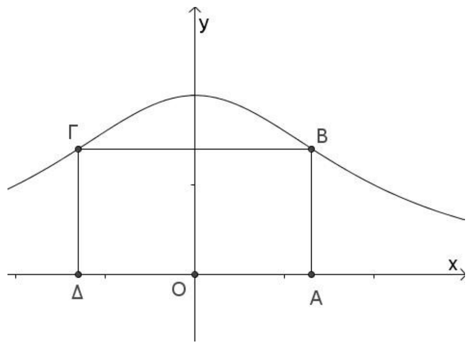
β) **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o = ln\, 2$. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $ln(e^x - 1) \leq 2x - ln4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\frac{2-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}-1}\right) \mathrm{dx}$. (Μονάδες 8)

27. 24771-4: Έστω f: IR → IR συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2+1} = 0$ για κάθε $x \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x \in$ IR. (Μονάδες 5)



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης $\alpha, \alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \alpha > 0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = ln\, 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx = ln\sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

28. 25747-4: Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2] \rightarrow$ IR η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)\,dx$. (Μονάδες 6)

29. 25757-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0\le x<1\\ 0, & \text{αν } x=1\end{cases}$

1) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 9)

2) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,1]$, ισχύει $0\le f(x)\le 1-x$. (Μονάδες 7)

3) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=1$ ισχύει $E<\frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 9)

30. 25766-4: Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο IR.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \qquad f(0)=1 \qquad \text{και} \qquad f(2)=5$$

τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=|x^2-4|+5$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$. (Μονάδες 5)

31. 26184-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x=e^2$.
(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e^2} f(x)dx$. (Μονάδες 9)

32. 27321-4: Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς. Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = axe^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0,1)$ και $a \in (1, +\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y; (Μονάδες 9)

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f. Να αποδείξτε ότι $F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$. (Μονάδες 9)

33. 27322-4: Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$$, όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στον περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim_{t \to +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot ln(T(t))dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$. (Μονάδες 10)

34. 27668-4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-\lambda)(x-1), x \in$ IR με $1 < \lambda < 3$.

1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο IR. (Μονάδες 12)

2) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 8)

3) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4-x)$, για κάθε $x \in$ IR, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

35. 29549-4: Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f: IR $\to$ IR με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε $f'(0) = f(0) = 0$ και $\int_0^\pi \big(f(x) + f''(x)\big)\eta\mu x dx = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx = -\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$. (Μονάδες 7)

β) $f(\pi) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής. (Μονάδες 10)

36. 31551-4: Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$ και $\varphi(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \varphi(x)dx = 0$. (Μονάδες 5)

37. **32225-4:** Για μια συνεχή συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \to$IR ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x+1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,
- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - 1\right), x \geq -1$. (Μονάδες 7)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x), x \in (-1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024}\left(f(x+1) - f(x)\right)dx < \int_{2023}^{2024}\left(f(x+2) - f(x+1)\right)dx$. (Μονάδες 6)

38. END.