

ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΤΡΑΠΕΖΑ

21152 ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
- ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.
- iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.
- iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1, 0)$.
- v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

(Μονάδες 15)

18242 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4, 4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

20235 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

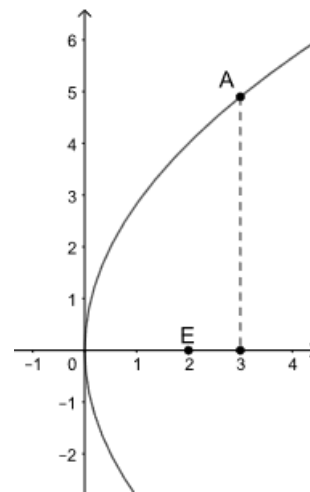
β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της ($\frac{1}{8}, 1$) είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$.

$$\frac{1}{8}, 1) \text{ είναι παράλληλη στην ευθεία } \varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0.$$

(Μονάδες 15)

21306 ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. (Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο A . (Μονάδες 09)

21307 ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ϵ_1) και (ϵ_2) της παραβολής στα σημεία $A(6,3)$ και $B(-6,3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2). (Μονάδες 05)

22190 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ). (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,-1)$ είναι σημείο της παραβολής. (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της $A(1,-1)$. (Μονάδες 08)

22267 ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

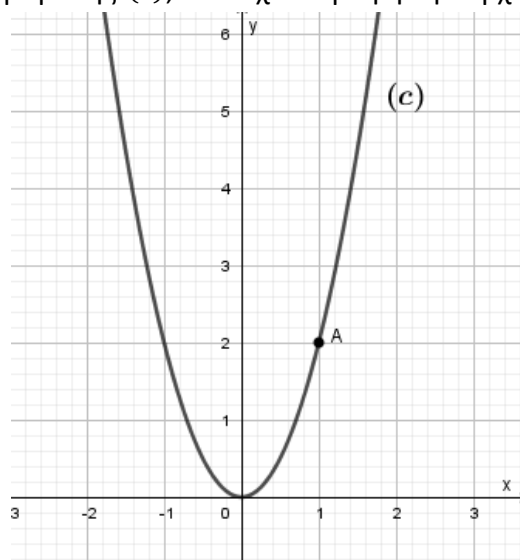
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E , έχει συντεταγμένες $E(\dots, \dots)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση». (Μονάδες 09)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο $A(1, -2)$. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ϵ με τον άξονα x' είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

20866 ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής. (Μονάδες 04)

γ)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$. (Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ϵ) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε. (Μονάδες 07)

15394 ΘΕΜΑ 4

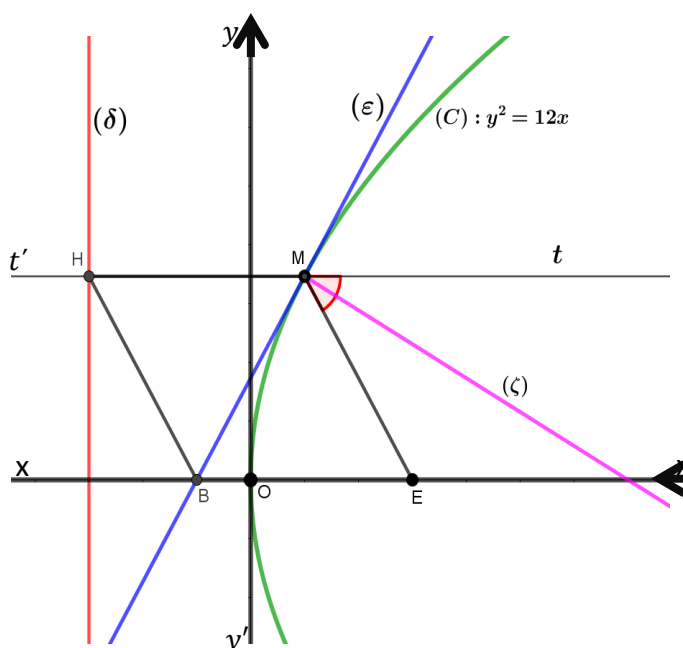
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ϵ) της (C) στο σημείο της $M(1,2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία $t't$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H .

α) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E . (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$. (Μονάδες 6)



18245 ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής C .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E . (Μονάδες 7)

18372 ΘΕΜΑ 4

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .

(Μονάδες 08)

γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x' , να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

18570 ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B

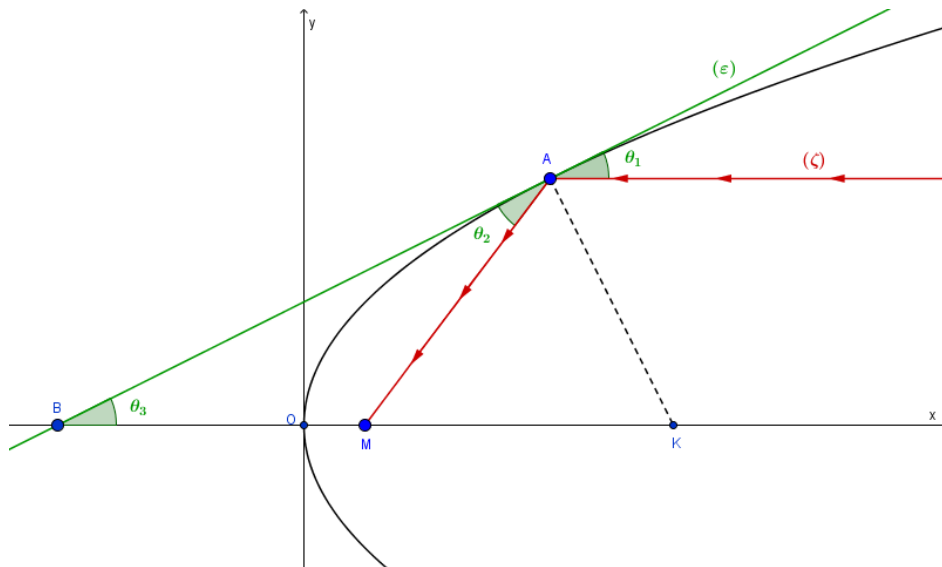
i. $35 < \mu < 15$. Να αποδείξετε ότι - (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB . (Μονάδες 09)

18870 ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M . Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:



α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής. (Μονάδες 06)

20092 ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

$$\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

α)

i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου M από την ε . (Μονάδες 07)

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ. (Μονάδες 05)

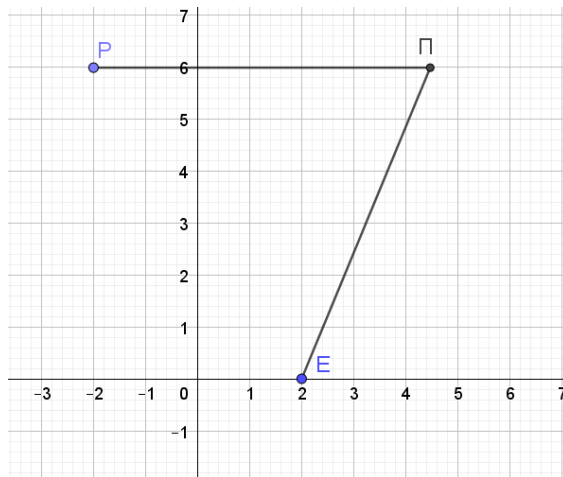
β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (Μονάδες 08)

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε ; (Μονάδες 05)

21653 ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox, Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa, \lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο $E(2,0)$ και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $P(-2, \lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(PE) = (PP)$.



- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2, \lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $PP \perp (\delta)$. (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa, \lambda)$ είναι παραβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 7)
- δ) Αν $y^2 = 8x$ η εξίσωση της παραβολής C να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του EP εφάπτεται της παραβολής C στο σημείο Π . (Μονάδες 8)

21690 ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε. (Μονάδες 8)
- β) Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M, \varepsilon)$ από την ευθεία είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{(y_0+2)^2+6}{5}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία. (Μονάδες 5)
- δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (Μονάδες 4)

21883 ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή $C: x^2=4y$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x-2$.

- α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε . (Μονάδες 8)
- γ) Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:
- i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ε είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$. (Μονάδες 6)

- ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ϵ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία .

(Μονάδες

6)

22275 ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ . (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

22465 ΘΕΜΑ 4

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον x' . Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x=-2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $\epsilon: y=x+2$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2,4)$. (Μονάδες 7)

