

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

2^{ον} ΠΑΡΑΒΟΛΗ

- 1) Να βρεθεί το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ϵ): $2x+3y+\mu=0$ να εφάπτεται της παραβολής $x^2=-6y$.
- 2) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2x$, που διέρχεται από το σημείο $A(-4,-1)$.
- 3) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (δ) της παραβολής (c): $y^2=5x$, που είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ): $3x+2y-1=0$.
- 4) Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$.
- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της που είναι κάθετη στην ευθεία $3x+y+3=0$.
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της που διέρχονται από το σημείο $A(-2,1)$.
- 5) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής $y^2=16x$, που απέχουν από την κορυφή της απόσταση $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
- 6) Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$ και από σημείο M του επιπέδου οι δυο εφαπτόμενες της. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M , ώστε οι δυο εφαπτόμενες να είναι κάθετες μεταξύ τους.
- 7) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που εφάπτεται της ευθείας (ϵ): $y=4x+1$.
- 8) i) Βρείτε τον γ.τ. των σημείων $M(2\rho t^2, 2\rho t)$, όπου ρ =σταθ. πραγμ. αριθ., όταν το t μεταβάλλεται, ii) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω γ.τ. που διέρχονται από το σημείο $A(3,4)$, αν $\rho=2$,
- 9) Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$, ώστε μια ευθεία παράλληλη στην (ϵ): $x+2y+1=0$ να είναι κοινή εφαπτομένη της παραβολής $y^2=4x$ και της καμπύλης (c) που ορίζεται από τα σημεία $M(a+\sqrt{5} \cos t, -2+\sqrt{5} \eta \mu t)$, όταν το t μεταβάλλεται.
- 10) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων της παραβολής $y^2=3x$ και του κύκλου $x^2+y^2=4$.
- 11) α) Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη (ϵ) της παραβολής $y^2=2px$ σε τυχαίο της σημείο $M_1(x_1, y_1)$ εκτός της κορυφής της, γράφεται στην μορφή $y=\lambda x + \frac{\rho}{2\lambda}$, $\lambda \neq 0$.
- β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ): $y=mx + \frac{15}{4m}$ είναι εφαπτομένη της παραβολής $y^2=15x$, για κάθε $m \in \mathbb{R}^*$.
- γ) Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες της παραβολής $y^2=15x$ και της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=16$.
- 12) Να δείξετε ότι αν P τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2=2px$, τότε ο κύκλος διαμέτρου EP , όπου E η εστία της, εφάπτεται στον άξονα $y'Oy$.
- 13) Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$ και σημείο της $M(x_1, y_1)$, με $0 \neq x_1 \neq p/2$. Ευθύγραμμο τμήμα MM' έχει τα άκρα του στην παραβολή και διέρχεται από την εστία E (χορδή της παραβολής). Φέρνουμε την εφαπτομένη (ϵ) της παραβολής στο M που τέμνει τον άξονα $x'Ox$ στο Γ , τον άξονα $y'Oy$ στο A και την διευθετούσα (δ) στο B . Εάν $ML \perp (\delta)$, $MD \perp x'Ox$, $MZ \perp (\epsilon)$ και $M'\Lambda' \perp (\delta)$, να δείξετε ότι:
- i) $(O\Gamma)=(O\Delta)$,
- ii) $(E\Gamma)=(EM)=(EZ)=(M\Lambda)=(\Gamma\Lambda)$,
- iii) $(\Delta Z)=2(OE)$,
- iv) $(B\Lambda)=(B\Lambda')$,
- v) τα σημεία M, O, Λ' είναι συνευθειακά,
- vi) τα σημεία M', O, Λ είναι συνευθειακά,
- vii) τα σημεία E, A, Λ είναι συνευθειακά,
- viii) $\Lambda'E // (\epsilon)$
- ix) $EA \perp AM$, $BE \perp EM$, $\Lambda E \perp \Lambda' E$ και $BM \perp BM'$
- x) η BM' είναι εφαπτομένη της παραβολής,
- xi) τα τετράπλευρα $EB\Lambda M$, $EABK$, $EB\Lambda'M'$ και $EAM\Delta$ είναι εγγράφιμα σε κύκλο,
- xii) ο κύκλος διαμέτρου MM' εφάπτεται της διευθετούσας στο B και
- xiii) όταν το M κινείται πάνω στην παραβολή, το μέσο Θ του MM' κινείται στην γραμμή με εξίσωση
- $$y^2 = \rho \left(x - \frac{\rho}{2} \right).$$
- 14) Δίνονται οι παραβολές (c_1): $y^2=2px$ και (c_2): $x^2=2py$, με $\rho > 0$ που τέμνονται στο A . Η εφαπτομένη (ϵ_1) της (c_1) στο A τέμνει την (c_2) στο Γ και η εφαπτομένη (ϵ_2) της (c_2) στο A τέμνει την (c_1) στο B . Να δείξετε ότι η $B\Gamma$ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο παραβολών.
- 15) Από σημείο A εκτός της παραβολής, φέρνουμε τις εφαπτόμενες AB και AB' . Εάν E η εστία της, να δείξετε ότι $\frac{(AB)^2}{(AB')^2} = \frac{(EB)}{(EB')}$.



- 16)** Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο. Εάν θ η γωνία που σχηματίζει η OM με τον θετικό ημιάξονα Ox , να βρείτε τον γ.τ. των σημείων M , όταν το θ μεταβάλλεται, με $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, για τα οποία το πηλίκο $\frac{x}{2\sigma\phi^2\theta}$ είναι σταθερό.
- 17)** Δίνεται η παραβολή $y^2=2\rho x$ και η εστία της Γ . Αν Δ τυχαίο σημείο της, να δείξετε ότι $|\vec{\Gamma\Delta}| = \frac{\rho}{1-\sigma\upsilon\eta\theta}$, όπου $\theta = \gamma\omega\nu(\vec{\Gamma\Delta}, Ox)$.
- 18)** Πάνω στον άξονα $y'Oy$ δίνεται σταθερό σημείο $A(0,\alpha)$ και στον άξονα $x'Ox$ μεταβλητό σημείο $H(t,0)$. Η κάθετη από το O στην AH τέμνει την ευθεία $x=t$ στο M . Να βρεθεί ο γ.τ. του κέντρου βάρους N του τριγώνου OHM .
- 19)** Να δείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τρεις εφαπτόμενες μιας παραβολής βρίσκεται στην διευθετούσα της.

