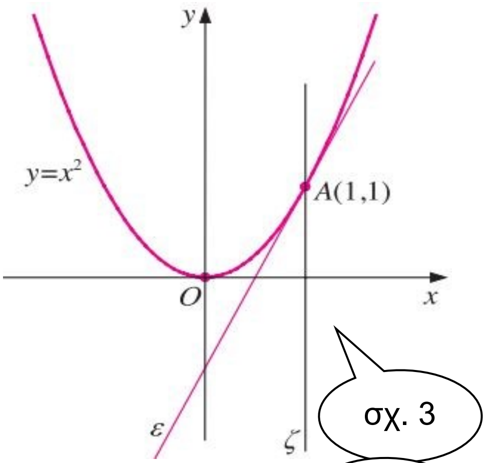
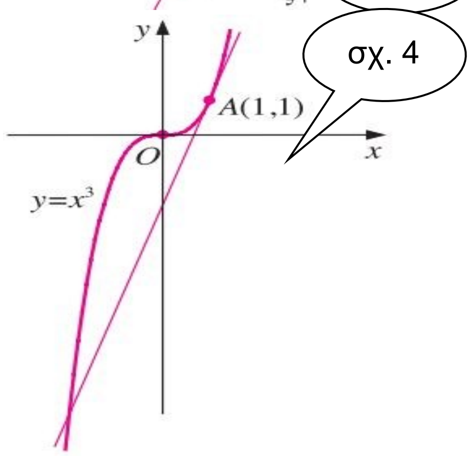
ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

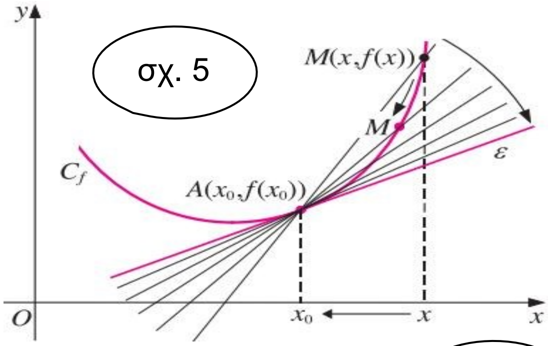
1. <u>Ορισμός</u>: Έστω f: Δ→IR και $x_0 \in$Δ.
Το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1)όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, λέγεται **παράγωγος αριθμός της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Τότε η συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη στο σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της,
2. Πολλές φορές αντί του παραπάνω ορίου, χρησιμοποιούμε τις μορφές:
   α) $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, εάν στην (1) θέσουμε $x=x_0+h$. (Με απόδειξη).
   β) $f'(x_0)=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0(h-1)}$, εάν στην (1) θέσουμε $x=x_0h$. (Με απόδειξη).
   γ) $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, εάν στην (1) θέσουμε $\Delta f(x)=\Delta y=f(x)-f(x_0)$ και $\Delta x=x-x_0$..
3. Ως γνωστόν το όριο δεν εξαρτάται από το γράμμα της μεταβλητής. Άρα $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$.
4. Η παράγωγος μιας συνάρτησης έχει νόημα μόνο για τα σημεία του πεδίου ορισμού της Δ. Έτσι:
   i) Εάν Δ=$[x_0,α)$, τότε $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in$IR. Το όριο αυτό λέγεται και **δεξιά πλευρική παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται ***$f_δ'(x_0)$***.
   ii) Εάν Δ=$(α,x_0]$, τότε $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$. Το όριο αυτό λέγεται και **αριστερή πλευρική παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται ***$f_α'(x_0)$***.
   iii) Εάν το x_0 δεν είναι άκρο διαστήματος, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, εάν $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ IR. Την ιδιότητα αυτή την χρησιμοποιούμε **<u>υποχρεωτικά</u>** όταν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο συνάρτησης σε σημείο που αλλάζει ο πολλαπλός τύπος της.
5. Στην περίπτωση που $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
6. <u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση S(t) που καθορίζει τη θέση ενός σώματος τη χρονική στιγμή t, ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.
7. <u>Ορισμός</u>: **Μέση ταχύτητα** του κινητού στο χρονικό διάστημα $\Delta t=t-t_0$, ονομάζεται το πηλίκο $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{μετατόπιση}{χρόνος}$.
8. <u>Ορισμός</u>: Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $u(t_0)$. Δηλαδή $u(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=S'(t_0)$.
9. Ο ισχυρισμός: «*Εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του Α ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο. Ο ορισμός αυτός μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη*» είναι εσφαλμένος, γιατί έτσι η καμπύλη $y=x^2$ θα είχε στο σημείο της Α(1,1) δύο εφαπτόμενες ε και ζ (σχ. 3), ενώ η καμπύλη $y=x^3$ δεν θα είχε καμιά εφαπτόμενη (σχ. 4).

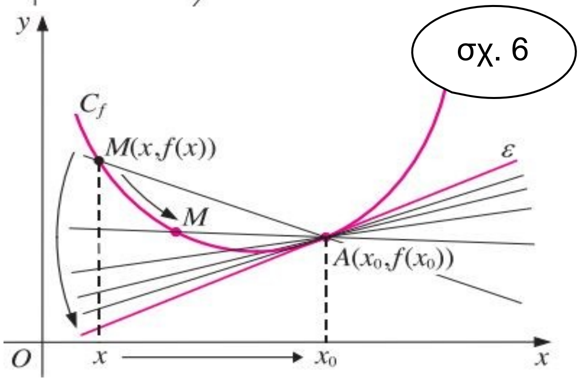




10. <u>*Ορισμός εφαπτόμενης καμπύλης*</u>: Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός *λ*, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της *Α*, την ευθεία *ε* που διέρχεται από το *Α* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*.

11. <u>*Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου συνάρτησης και εξίσωση εφαπτόμενης καμπύλης*</u>: Έστω *f* μία συνάρτηση και *A*(x_0,f(x_0)) ένα σταθερό σημείο της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης. Έστω επίσης ένα άλλο σημείο M(x,f(x)) το οποίο μπορεί να κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Καθώς το x τείνει στο x_0 με x>x_0 (σχ. 5) η τέμνουσα *AM* φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση *ε*.





Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με x<x_0 (σχ. 6).

Η ευθεία AM έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Η οριακή θέση ε της *AM* θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ εφόσον υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

<u>*Εξίσωση εφαπτομένης*</u>: y-f(x_0)=f΄(x_0)(x-x_0).

12. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν ορίζουμε εφαπτομένη της C_f στο σημείο *A*(x_0,f(x_0)).

13. <u>*Παράγωγος και συνέχεια*</u>: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

<u>***Απόδειξη***</u>: Για x≠x_0 έχουμε:

f(x)-f(x_0)=$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot$(x-$x_0$), οπότε:

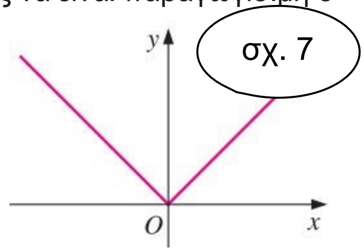
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

=f΄(x_0)·0

=0.

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

14. Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Πχ η συνάρτηση f(x)=|x| είναι συνεχής στο σημείο A(0,0), γιατί $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ =0=f(0),



ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, γιατί $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}$=1

ενώ $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x<0}}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}$= -1 (σχ. 7).

15. Εάν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

16. <u>*Ορισμός*</u>: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *A*. Η συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη στο *A*** ή απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0∈A.

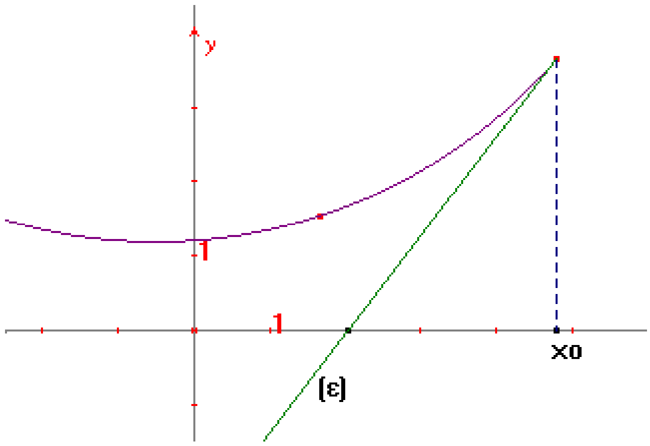
17. <u>*Ορισμός*</u>: Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη στο (α,β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0∈(α,β).

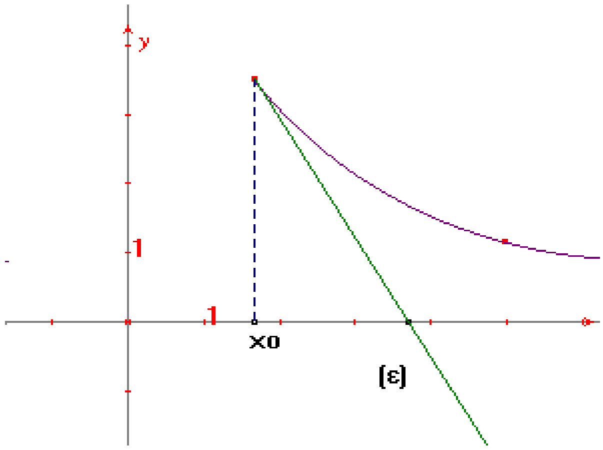
18. <u>*Ορισμός*</u>: Μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη στο [α,β]** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0∈(α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

<u>*Ορισμός*</u>: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *A* και A_1 το σύνολο των σημείων του *A* στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε x∈A_1 στο *f* ΄(x), ορίζουμε τη συνάρτηση η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της** f ή απλά **παράγωγος της** f.

19. Σε περιπτώσεις που δεν γνωρίζουμε τον τύπο μιας συνάρτησης, αλλά δίνεται μια συναρτησιακή σχέση, τότε τα προβλήματα παραγώγων λύνονται με τον ορισμό, ή με κάποιον από τους τύπους της παρατήρησης (2) του παρόντος φυλλαδίου, που ταιριάζει με την συναρτησιακή σχέση της άσκησης.

20. Εάν το x_0 είναι άκρο διαστήματος, τότε παραγωγίζεται (πλευρική παράγωγος) και υπάρχει ημιεφαπτομένη (βλ. σχήματα παρακάτω).





21. Για να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης, όταν δίδεται η συνάρτηση και το σημείο επαφής $M_0(x_0,f(x_0))$, βρίσκουμε τα $f(x_0)$, $f'(x)$, $f'(x_0)$ και εφαρμόζουμε τον τύπο της παρατήρησης 11.

22. Για να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης, όταν δίδεται η συνάρτηση και δεν δίδεται το σημείο επαφής $M_0(x_0,f(x_0))$, τότε βρίσκουμε το x_0 με κάποιον από τους παρακάτω τύπους, ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης:

- ***a.*** $\lambda=f'(x_0)$.
- ***b.*** $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2=-1$.
- ***c.*** λ=εφω όπου ω η γωνία που σχηματίζει η ζητούμενη εφαπτομένη με τον θετικό ημιάξονα Ox.
- ***d.*** Μας δίνεται ένα σημείο της εφαπτομένης, διαφορετικό από το σημείο επαφής. Αντικαθιστούμε τις συν/νες του δοθέντος σημείου στην εξίσωση της εφαπτομένης και προκύπτει εξίσωση που έχει άγνωστο το x_0.
- ***e.*** Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, είναι $\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

23. Μια συνάρτηση δεν έχει εφαπτομένη σε σημείο της $M_0(x_0,f(x_0))$, όταν δεν παραγωγίζεται στο x_0.

<u>Ασκήσεις στην εισαγωγή των παραγώγων</u>

1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in R$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3-(2\alpha+1)x, & x \geq 1 \\ (\alpha^2+3)x-4\alpha, & x<1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

2. Να υπολογίσετε τα α,β∈R τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha x + \beta, & x \geq 2 \\ \sqrt{x^2+5} + 2, & x < 2 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο x_o=2.

3. Εάν $f(x_o)$=1 και $f'(x_o)$=668 , να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o} \frac{3f(x)-3}{x-x_o} = 2004.$$

4. Εάν f παραγωγίσιμη στο 2, να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 2} \frac{xf(2)-2f(x)}{x-2} = f(2) - 2f'(2)..$$

5. Εάν f παραγωγίσιμη στο x_o, να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o} \frac{xf(x_o) - x_o f(x)}{x - x_o} = f(x_o) - x_o f'(x_o).$$

6. Εάν f παραγωγίσιμη στο α, να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x^3-\alpha^3}$

ii) $\lim_{x\to\alpha} \frac{f^3(x)-f^3(\alpha)}{x-\alpha}$

7. Εάν f(0)=2 και f΄(0)=5, να υπολογίσετε την g΄(0),όταν:

i) $g(x)=x^3f(x)-3x^2$ ii) $g(x)=f^2(x)-xf(x)$

8. Έστω f:IR→IR με f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y∈IR . Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο R και μάλιστα $f'(x_o)$= f΄(0), για κάθε x_o∈IR.

9. Έστω f:IR→IR παραγωγίσιμη στο 0 και f(x+y)=f(x)f(y) για κάθε x,y∈IR και f(0)≠0.

α) Να υπολογίσετε το f(0)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=f(x_o)f'(0)$, για κάθε x_o∈IR.

10. Έστω f,g: R →R παραγωγίσιμες στο α∈IR με f(α)=g(α) και f(x) ≤ g(x) για κάθε x∈IR. Να αποδείξετε ότι f΄(α)=g΄(α).

11. Για την συνάρτηση f:IR→IR ισχύει:

$g(x)-x^2 \leq f(x) \leq g(x)+x^2$,για κάθε x∈IR ,

όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0.

Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο x_o=0 και είναι f΄(0)=g΄(0).

12. Αν f παραγωγίσιμη στο x_o=0 και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 2004$, να δείξετε ότι f΄(0)=2004.

13. <u>ΕΜΕ:</u>

Αν |f(x)| ≤ x^2 για κάθε x∈IR , να δείξετε ότι f΄(0)=0.

14. Έστω f: IR →IR με τις παρακάτω ιδιότητες:

α) f(x+y)=f(x)f(y) για κάθε x,y∈IR ,

β) f(x)=1+xg(x) για κάθε x∈IR ,όπου g συνάρτηση με $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$,

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR.

15. Έστω f: IR →IR με $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^v$ για κάθε x,y∈IR, v∈IN*.

α) Να δείξετε ότι αν v=2 η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με f΄(x)=0,

β) Να δείξετε ότι αν v>2 η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με f΄(x)=0,

γ) Αν v=1 είναι παραγωγίσιμη ;

16. <u>ΕΜΕ</u> Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο x_o∈R τέτοια ώστε $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-2x+3}{x-x_o} = 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε):y=2x-3 εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της f στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$

17. <u>Οικονομικό (4η δέσμη) 1983:</u>

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(x_o-\varepsilon, x_o+\varepsilon)$.

i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της f στο σημείο x_o,

ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σε ένα σημείο $M(x_o,f(x_o))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο y=f(x), όταν $f'(x_o)$∈R,

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης στο σημείο M(1,1) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο $y=x^3$.

18. <u>ΕΜΕ:</u>

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f: IR→IR με

f(x)= |x-1 |+2

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

19. Oxford I.P. 1990:

A. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β) συναρτήσεις f και g. Υποθέτουμε ότι x_o∈(α,β). Θεωρούμε και την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in (\alpha, x_o) \\ g(x), & \text{αν } x \in [x_o, \beta) \end{cases}$.

i) Αν $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$, να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o,

ii) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, τότε $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$,

B. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x+1), & \text{αν } x \in (-3,0) \\ 2e^{\beta x}, & \text{αν } x \in [0,4) \end{cases}$, να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

Να προσδιοριστούν οι α,β∈IR , ώστε να υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο 1.

21. **i)** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,\text{αν } x \le 2 \\ αx + β & ,\text{αν } x > 2 \end{cases}$. Να βρεθούν τα α,β∈IR , ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο 2,

ii) Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η συνάρτηση f με τύπο **f(x)** = $e^{λ|x|+μ}$, λ,μ∈IR , να είναι παραγωγίσιμη στο x=0.

22. Δίνεται η συνάρτηση f με $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1} & ,\text{αν } x \in (-\infty\ 0] \\ \mathbf{1} + \boldsymbol{ln}\frac{\mathbf{1}+x}{\mathbf{1}-x} & ,\text{αν } x \in (\mathbf{0},\mathbf{1}) \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο 0.

ii) Να λυθεί η εξίσωση f΄(x)=0 στο (0,1).

23. Θεωρούμε την συνάρτηση f:Δ→IR , γνήσια μονότονη στο διάστημα Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o∈Δ, $f΄(x_o)\neq 0$ και f^{-1}:f(Δ)→ IR η αντίστροφή της συνεχής στο f(Δ), τότε και η f^{-1} παραγωγίζεται στο $y_o=f(x_o)$ και ισχύει

$$(\mathbf{f^{-1}})΄(\mathbf{y_o}) = \frac{\mathbf{1}}{f΄(x_o)} = \frac{\mathbf{1}}{f΄(f^{-1}(y_o))}$$

24. Θεωρούμε την συνάρτηση f: IR →IR , με f(1)=e και f(x+y)=f(x)f(y), για κάθε x∈IR. Να δείξετε ότι:

i) f(x) > 0, για κάθε x∈IR,

ii) f(0)=1,

iii) Αν η f είναι συνεχής στο x_o=0, τότε είναι συνεχής και στο IR,

iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0, τότε είναι παραγωγίσιμη και στο IR.

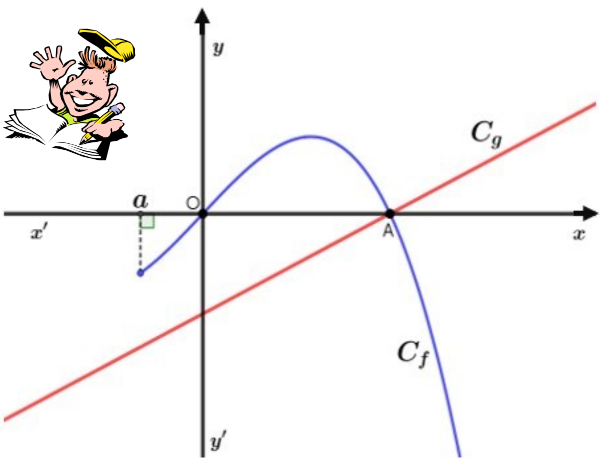
25. 24756-2: Έστω συνάρτηση $\boldsymbol{f}$: IR → IR με f(0)=0 και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}$. (Μονάδες 8)

26. 25234-2: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση **f** : [**α** ,+∞) → IR και την συνάρτηση $\mathbf{g(x)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, x∈ IR. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A.

α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}$. (Μονάδες 9)

27. 27315-2: Δίνεται η συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ & \boldsymbol{και} \\ \boldsymbol{αx^2 - 4}, & \text{αν } x \ge 2 \end{cases} \quad \text{με α} \in \text{IR}.$$

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο x_0 =2, δηλαδή τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

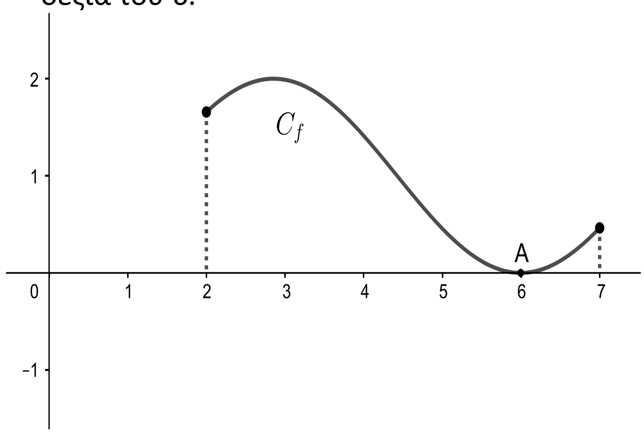
Μονάδες 12

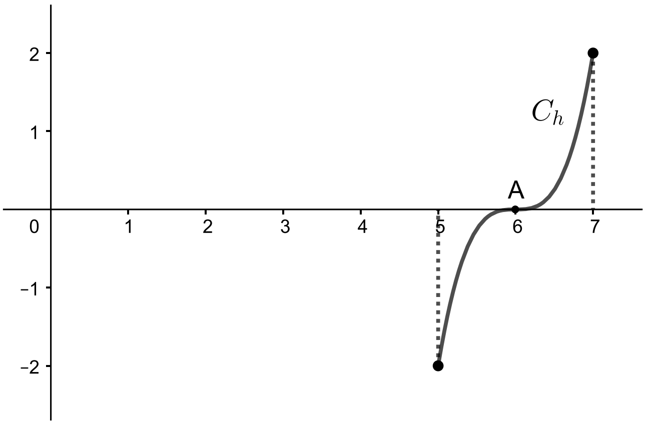
β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0 =2.

Μονάδες 7

γ) Αν α = 2, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f. Μονάδες 6

28. 36840 ΘΕΜΑ 2: Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{h}$. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $\boldsymbol{x'x}$ στο σημείο του Α(6,0). Γνωρίζουμε ότι η $\boldsymbol{f}$ παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η $\boldsymbol{h}$ παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h. Μονάδες 6

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ Μονάδες 7

ii. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{h(x)}$ Μονάδες 7

iii. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{f(x)}{x-6}$ Μονάδες 5

29. END.