ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. *Ορισμός*: Έστω f: Δ→R και $x_0 \in R$. Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1)

όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, λέγεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, ή $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

2. Πολλές φορές αντί του παραπάνω ορίου, χρησιμοποιούμε τις μορφές:

α) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, εάν στην (1) θέσουμε $x=x_0+h$. (Με απόδειξη).

β) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0(h-1)}$, εάν στην (1) θέσουμε $x=x_0h$. (Με απόδειξη).

γ) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, εάν στην (1) θέσουμε $\Delta f(x)=\Delta y=f(x)-f(x_0)$ και $\Delta x=x-x_0$..

3. Ως γνωστόν το όριο δεν εξαρτάται από το γράμμα της μεταβλητής. Άρα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{t\to x_0}\dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$.

4. Η παράγωγος μιας συνάρτησης έχει νόημα μόνο για τα σημεία του πεδίου ορισμού της Δ. Έτσι:

i) Εάν $Δ=[x_0,α)$, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$. Το όριο αυτό λέγεται και δεξιά **πλευρική** παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f_δ'(x_0)$.

ii) Εάν $Δ=(α,x_0]$, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$. Το όριο αυτό λέγεται και αριστερή **πλευρική** παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f_α'(x_0)$.

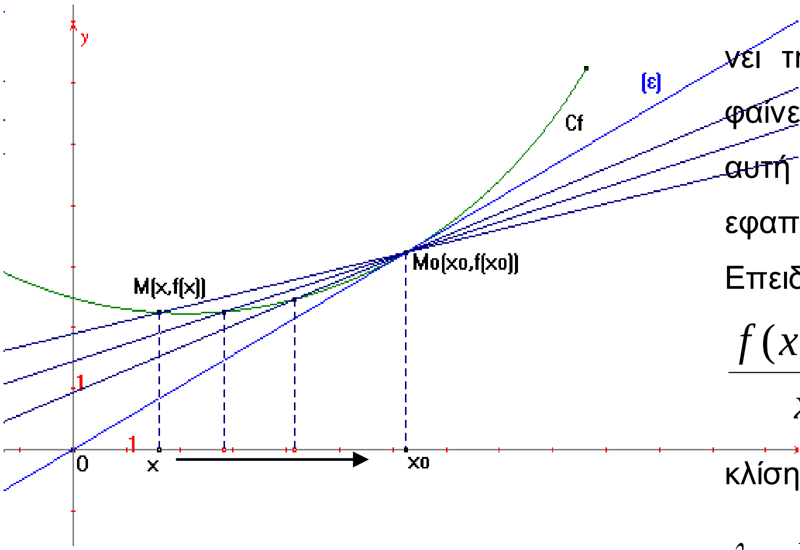
iii) Εάν το x_0 δεν είναι άκρο διαστήματος, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, εάν $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$. Την ιδιότητα αυτή την χρησιμοποιούμε **<u>υποχρεωτικά</u>** όταν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο συνάρτησης σε σημείο που αλλάζει ο πολλαπλός τύπος της.

5. Στην περίπτωση που $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι συνεχής στο x_0.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ η συνάρτηση $f(x)=|x|$, είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.
Αν όμως μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο x_0, δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

7. Σε περιπτώσεις που δεν γνωρίζουμε τον τύπο μιας συνάρτησης, αλλά δίνεται μια συναρτησιακή σχέση, τότε τα προβλήματα παραγώγων λύνονται με τον ορισμό, ή με κάποιον από τους τύπους της παρατήρησης (2) του παρόντος φυλλαδίου, που ταιριάζει με την συναρτησιακή σχέση της άσκησης.

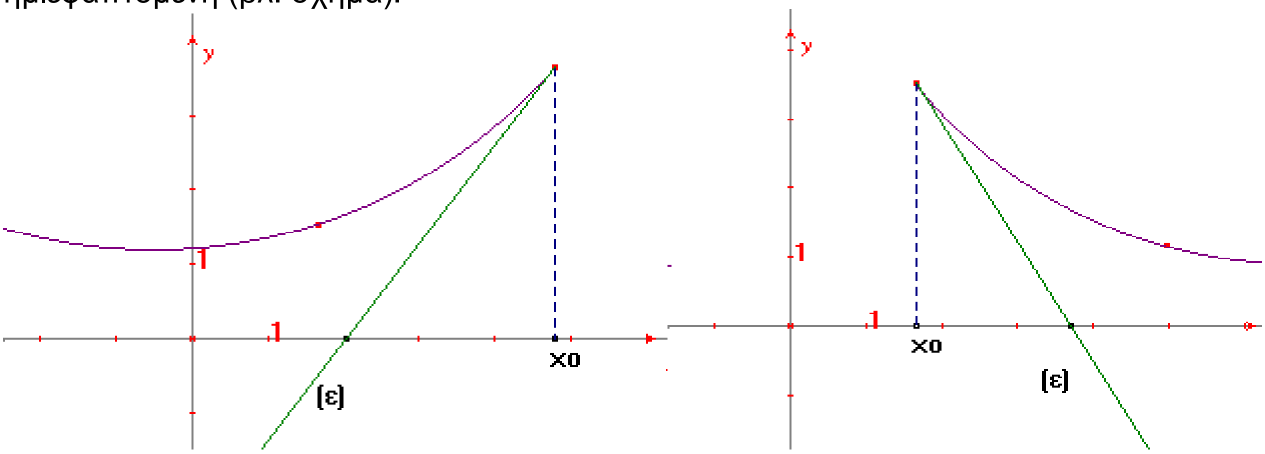
8. *<u>Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου συνάρτησης</u>*: Όταν $x \to x_0$, τότε $M \to M_0$ και η ευθεία MM_0 παίρνει την οριακή θέση (ε) όπως φαίνεται στο σχήμα. Την οριακή αυτή θέση την ονομάζουμε εφαπτομένη της C_f στο M_0. Επειδή η MM_0 έχει κλίση $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, η (ε) θα έχει κλίση



$$\lambda_\varepsilon = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

9. *<u>Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M_0(x_0,f(x_0))$</u>*: $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$ **(1)**

10. Εάν το x_0 είναι άκρο διαστήματος, τότε παραγωγίζεται (πλευρική παράγωγος) και υπάρχει ημιεφαπτομένη (βλ. σχήμα).



11. Για να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης, όταν δίδεται η συνάρτηση και το σημείο επαφής $M_0(x_0,f(x_0))$, βρίσκουμε τα $f(x_0)$, $f'(x)$, $f'(x_0)$ και εφαρμόζουμε τον τύπο (1).

12. να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης, όταν δίδεται η συνάρτηση και δεν δίδεται το σημείο επαφής $M_0(x_0,f(x_0))$, τότε συνδυάζουμε τους τύπους:

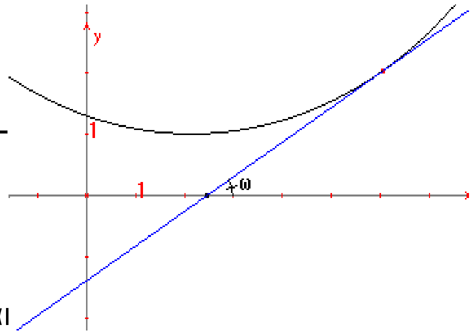
1) $\lambda=f'(x_0)$.

2) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2=-1$.

3) λ=εφω όπου εφω η κλίση της εφαπτομένης.

4) Μας δίνεται ένα σημείο της εφαπτομένης, διαφορετικό από το σημείο επαφής. Αντικαθιστούμε τις συν/νες του στην διαμορφωμένη εξίσωση της εφαπτομένης που έχει άγνωστο το x_0.

5) Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ είναι $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.



13. Μια συνάρτηση δεν έχει εφαπτομένη σε σημείο της $M_0(x_0,f(x_0))$, όταν δεν παραγωγίζεται στο x_0.

Ασκήσεις στην εισαγωγή των παραγώγων

1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in R$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}4x^3-(2\alpha+1)x, & x\geq 1\\ (\alpha^2+3)x-4\alpha, & x<1\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

2. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta\in R$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2\alpha x+\beta, & x\geq 2\\ \sqrt{x^2+5}+2, & x<2\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$.

3. Εάν $f(x_o)=1$ και $f\,'(x_o)=668$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{3f(x)-3}{x-x_o}=2004\ .$$

4. Εάν f παραγωγίσιμη στο 2, να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}=f(2)-2f'(2).\ .$$

5. Εάν f παραγωγίσιμη στο x_o, να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_o}\frac{xf(x_o)-x_of(x)}{x-x_o}=f(x_o)-x_of'(x_o).$$

6. Εάν f παραγωγίσιμη στο α, να υπολογίσετε τα όρια

i) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x^3-\alpha^3}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f^3(x)-f^3(\alpha)}{x-\alpha}$

7. Εάν $f(0)=2$ και $f\,'(0)=5$, να υπολογίσετε την $g'(0)$, όταν:

i) $g(x)=x^3f(x)-3x^2$ ii) $g(x)=f^2(x)-xf(x)$

8. Έστω $f: R\to R$ με $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο R και μάλιστα $f\,'(x_o)=f\,'(0)$, για κάθε $x_o\in R$.

9. Έστω $f: R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ και $f(0)\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε το $f(0)$

β) Να αποδείξετε ότι $f\,'(x_o)=f(x_o)f\,'(0)$, για κάθε $x_o\in R$.

10. Έστω $f,g: R\to R$ παραγωγίσιμες στο $\alpha\in R$ με $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι $f\,'(\alpha)=g'(\alpha)$.

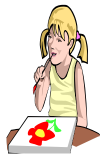
11. Για την συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει $g(x)-x^2\leq f(x)\leq g(x)+x^2$, για κάθε $x\in R$, όπου g συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0.

Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_o=0$ και είναι $f'(0)=g'(0)$.

12. Αν f παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2004$, να δείξετε ότι $f'(0)=2004$.

13. **__ΕΜΕ:__**

Αν $|f(x)| \le x^2$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $f'(0)=0$.



14. Έστω $f: R \to R$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

α) $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$,

β) $f(x)=1+xg(x)$ για κάθε $x\in R$, όπου g συνάρτηση με $\lim_{x\to 0}g(x)=1$,

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

15. Έστω $f: R \to R$ με $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^{\nu}$ για κάθε $x,y\in R$, $\nu\in N^*$.

α) Να δείξετε ότι αν $\nu=2$ η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=0$,

β) Να δείξετε ότι αν $\nu>2$ η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=0$,

γ) Αν $\nu=1$ είναι παραγωγίσιμη ;

16. **__ΕΜΕ__**

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $x_o\in R$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-2x+3}{x-x_o}=0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-3$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$

17. **__Οικονομικό (4η δέσμη) 1983:__**

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(x_o-\varepsilon, x_o+\varepsilon)$.

i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της f στο σημείο x_o,

ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σε ένα σημείο $M(x_o, f(x_o))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο $y=f(x)$, όταν $f'(x_o)\in R$,

iv) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης στο σημείο $M(1,1)$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο $y=x^3$.

18. EME:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = |x-1|+2$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

19. Oxford I.P. 1990:

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,β). Υποθέτουμε ότι $x_o \in (\alpha,\beta)$. Θεωρούμε και την συνάρτηση φ με

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in (\alpha, x_o) \\ g(x), & \text{αν } x \in [x_o, \beta) \end{cases}.$$

i) Αν $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$, να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o,

ii) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, τότε $f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$,

Β. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ώστε η συνάρτηση φ με $\phi(x) = \begin{cases} \alpha(x+1), & \text{αν } x \in (-3,0) \\ 2e^{\beta x}, & \text{αν } x \in [0,4) \end{cases}$, να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & \text{αν } x \in (-\infty,1] \\ \sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x \in (1,+\infty) \end{cases}$.

Να προσδιοριστούν οι $\alpha,\beta \in R$, ώστε να υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο 1.

21. i) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,\text{αν } x \le 2 \\ \alpha x+\beta & ,\text{αν } x > 2 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in R$, ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο 2,

ii) Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ, ώστε η συνάρτηση f με τύπο $\mathbf{f(x) = e^{\lambda|x|+\mu}}$, $\lambda,\mu \in R$, να είναι παραγωγίσιμη στο x=0.

22. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{αν } x \in (-\infty\ 0] \\ 1+\ln\dfrac{1+x}{1-x} & ,\text{αν } x \in (0,1) \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο 0,

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f'(x)=0$ στο $(0,1)$.

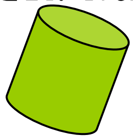
23. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \Delta \to R$, γνήσια μονότονη στο διάστημα Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in \Delta$, $f'(x_o) \neq 0$ και $f^{-1}: f(\Delta) \to R$

η αντίστροφή της συνεχής στο f(Δ), τότε και η f^{-1} παραγωγίζεται στο $y_o=f(x_o)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(y_o)=\frac{1}{f'(x_o)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

24. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(1)=e$ και $f(x+y)=f(x)f(y)$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:

i) $f(x)>0$, για κάθε $x\in R$,



ii) $f(0)=1$,

iii) Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, τότε είναι συνεχής και στο R,

iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, τότε είναι παραγωγίσιμη και στο R.