

## ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Ένα σημείο A κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2 - 2x$ , και όταν βρίσκεται στο σημείο (2,0) το x αυξάνεται με ρυθμό  $dx/dt = 3\text{cm/sec}$ .
  - i. Να βρεθεί το  $dy/dt$  και να ερμηνευθεί το αποτέλεσμα.
  - ii. Μετά να βρεθεί σε ποια θέση οι δύο ρυθμοί μεταβολής είναι ίσοι.
2. Το ύψος του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο ανεβαίνει με ρυθμό  $10/\pi \text{ cm/sec}$ . Αν η ακτίνα της βάσης του δοχείου είναι 80cm, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει ο όγκος του νερού.
3. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy, Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα  $u = 2\text{m/sec}$  και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση  $s(t)=u(t)$ , όπου t ο χρόνος σε sec,  $0 \leq t \leq 5$ .
  - i. Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου t.
  - ii. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m.
4. Ένα σημείο κινείται στην παραβολή  $y=2x^2+3x$ . Να βρεθεί το σημείο, αν είναι γνωστό ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι επταπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.
5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(\theta)=2\text{cun}2\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Εάν το  $\theta$  αυξάνεται σταθερά με τον χρόνο 2,5 rad/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f(\theta)$  ως προς τον χρόνο, όταν η γωνία  $\theta$  ισούται με  $\frac{7\pi}{12}$  rad.
6. Μια ευθεία κινείται γύρω από το σημείο K(1,2) και τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σ' ένα σημείο A. Αν το σημείο A κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta = \widehat{OKA}$  ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή  $t_0$  που το σημείο A βρίσκεται στη θέση  $A_0(5/3, 0)$ .
7. Μια λάμπα που φωτίζει το δρόμο βρίσκεται σε ύψος 5m. Ένας άνθρωπος ύψους 2m απομακρύνεται από αυτήν με ταχύτητα 4m/sec.
  - i. Να βρείτε το μήκος της σκιάς του σε συνάρτηση με την απόσταση x του ανθρώπου από την βάση της κολώνας.
  - ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της σκιάς του ανθρώπου.

8. Αν ένα σημείο  $A(x(t),y(t))$  κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{5}{3}x^3$  και την χρονική στιγμή  $t_0$  διέρχεται από το σημείο με τετμημένη -1 m και η ταχύτητα της τετμημένης πάνω στον άξονα των x είναι 5m/sec ενώ η επιτάχυνσή του είναι  $1 \frac{m}{\text{sec}^2}$

τότε βρείτε:

- i. Την τεταγμένη του σημείου την χρονική στιγμή  $t_0$ .
  - ii. Την ταχύτητα της τεταγμένης την χρονική στιγμή  $t_0$ .
  - iii. Την επιτάχυνση της τεταγμένης την χρονική στιγμή  $t_0$ .
9. (EME 2008) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1) - 7}{x-1} = 10.$$

- i. Να αποδείξετε ότι: α)  $f(3) = 7$   
β)  $f'(3) = 5$ .
- ii. Έστω  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της  $M(3, f(3))$ .
  - α) Να αποδείξετε ότι η  $(\varepsilon)$  έχει εξίσωση  $y=5x-8$ .
  - β) Ένα σημείο Σ, που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία  $(\varepsilon)$ . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMS.

10. s