ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Ένα σημείο Α κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x$, και όταν βρίσκεται στο σημείο (2,0) το x αυξάνεται με ρυθμό $dx/dt = 3cm/sec$.

i. Να βρεθεί το dy/dt και να ερμηνευθεί το αποτέλεσμα .

ii. Μετά να βρεθεί σε ποια θέση οι δύο ρυθμοί μεταβολής είναι ίσοι.

Λύση:

i. $y(t) = x^2(t) - 2x(t)$.............................(1)

Την χρονική στιγμή t_0 που το κινητό διέρχεται από το σημείο (2,0) είναι:

$x(t_0)=2cm$.

$x'(t_0)=3cm/sec$.

$(1) \Leftrightarrow y'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) - 2x'(t)$.............(2)

η οποία για $t=t_0$ γίνεται:

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= 2x(t_0)\cdot x'(t_0) - 2x'(t_0) \\ &= 2\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3 \\ &= 12-6 \\ &= 6cm/sec. \end{aligned}$$

Το y αυξάνεται με ρυθμό 6cm/sec.

ii. $$(2) \overset{x'(t)=y'(t)}{\Leftrightarrow} x'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) - 2x'(t)$$

$$\Leftrightarrow x'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) - 2x'(t)$$

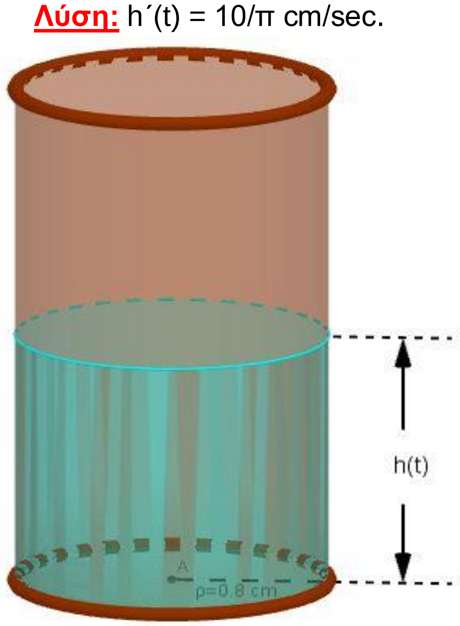
$$\Leftrightarrow x'(t)\cdot(2x(t)-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x'(t)=0 \text{ ή } x(t)=3/2.$$

Επειδή το κινητό Α κινείται και μάλιστα όχι παράλληλα στον άξονα των y΄Oy, είναι $x'(t)\neq 0$, οπότε $x(t)=3/2$ και από την (1) βρίσκουμε $y(t) = -3/4$.

2. Το ύψος του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο ανεβαίνει με ρυθμό 10/π cm/sec. Αν η ακτίνα της βάσης του δοχείου είναι 80cm , να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει ο όγκος του νερού.

Λύση: $h'(t) = 10/\pi$ cm/sec.



Ο όγκος κυλίνδρου δίνεται από την σχέση $V=E_\beta\cdot h=\pi\rho^2 h$.

Άρα $$\begin{aligned} V(t) &= \pi\rho^2 h(t) \\ &= \pi\cdot 80^2 h(t). \\ &= 6400\pi h(t). \end{aligned}$$

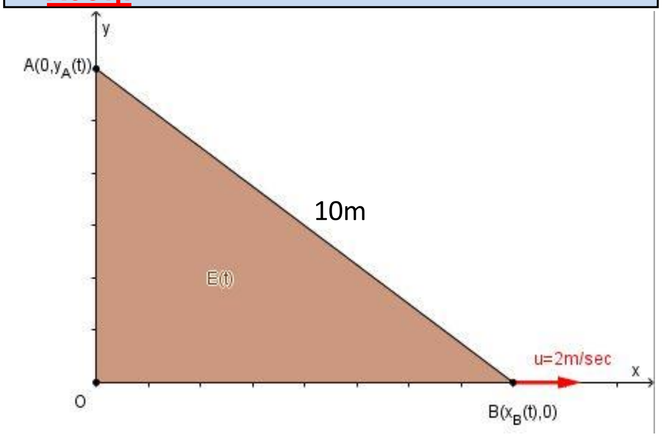
$$\begin{aligned} V'(t) &= 6400\pi h'(t) \\ &= 6400\pi\cdot 10/\pi \\ &= 64000cm^3/sec. \end{aligned}$$

3. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy ,Ox αντίστοιχα . Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 2m/sec πάνω στον άξονα Ox (σχήμα).

i. Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου t.

ii. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m.

Λύση:



i. Η τετμημένη x_B του σημείου Β, δίνεται σε συνάρτηση με τον χρόνο t από την σχέση $x_B(t)=ut \Leftrightarrow x_B(t)=2t$.........................(1)

Εφαρμόζοντας Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB βρίσκουμε ότι η τεταγμένη y_A του σημείου Α είναι $y_A(t)=\sqrt{100-x_B^2(t)}$

$$=\sqrt{100-4t^2} \quad ....(2)$$

Το εμβαδόν Ε του τριγώνου είναι:

$E(t)=\frac{1}{2}\cdot x_B(t)\cdot y_A(t)$ η οποία λόγω των (1) και (2) γίνεται $E(t)=t\cdot\sqrt{100-4t^2}$ ....(3) με $0\le t\le 5$.

ii. $$E'(t)=\sqrt{100-4t^2}+t\cdot\frac{1}{2\sqrt{100-4t^2}}\cdot(100-4t^2)'$$

$$=\sqrt{100-4t^2}-\frac{4t^2}{\sqrt{100-4t^2}}$$

$$=\frac{100-8t^2}{\sqrt{100-4t^2}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Η σχέση (2) για $y_A(t)$=6m, δίνει t=4sec.

Η σχέση (4) για t=4sec δίνει:

$E'(4)=-\frac{14}{3}m^2/\sec$.

4. Ένα σημείο κινείται στην παραβολή $y=2x^2+3x$. Να βρεθεί το σημείο, αν είναι γνωστό ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι επταπλάσιος από τον ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του.

Λύση: $y(t)=2x^2(t)+3x(t)$. ………………(1)

$y'(t)=4x(t)\cdot x'(t)+3x'(t)$.

Στην τελευταία αντικαθιστούμε $y'(t)=7x'(t)$ και βρίσκουμε:

$7x'(t)=4x(t)\cdot x'(t)+3x'(t)$ και επειδή $x'(t)\neq 0$

$7=4x(t)+3 \Leftrightarrow x(t)=1$.

Η σχέση (1) για x(t)=1 δίνει y(t)=5.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το (1,5).

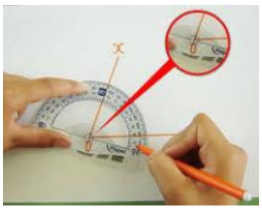
5. Δίνεται η συνάρτηση f(θ)=2συν2θ, θ∈R. Εάν το θ αυξάνεται σταθερά με τον χρόνο 2,5 rad/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f(θ) ως προς τον χρόνο, όταν η γωνία θ ισούται με $\frac{7\pi}{12}$ rad.

Λύση:

f(θ(t))=2συν2θ(t)

f΄(θ(t))=-2ημ2θ(t)·2θ΄(t)

στην οποία αν θέσουμε θ΄(t)=2,5 rad/sec και $\theta(t)=\frac{7\pi}{12}$ rad, βρίσκουμε:



$f'(\theta(t))=-2ημ\frac{7\pi}{6}\cdot 2\cdot 2{,}5$

$=-2ημ\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot 5$

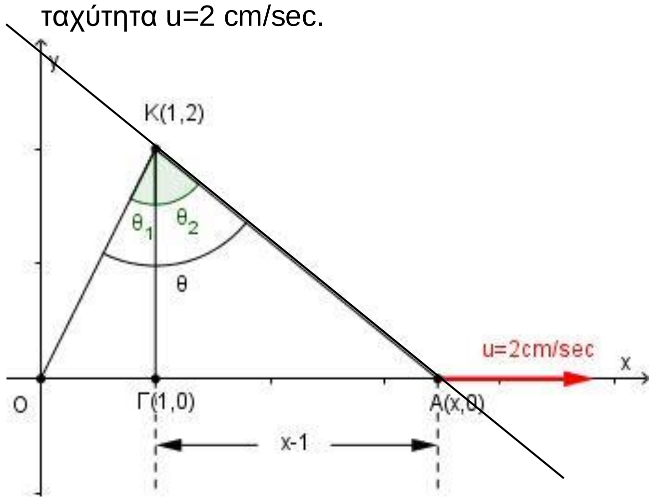
$=10ημ\frac{\pi}{6}$

$=10\cdot\frac{1}{2}$

=5 μονάδες/sec.

6. Μια ευθεία κινείται γύρω από το σημείο Κ(1,2) και τέμνει τον θετικό ημιάξονα Οx σ' ένα σημείο Α. Αν το σημείο Α κινείται με σταθερή ταχύτητα 2cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=O\hat{K}A$ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $A_0(5/3, 0)$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι ο χρόνος μετράει από την στιγμή που η ευθεία έχει την θέση ΚΓ και το Γ κινείται προς τα θετικά του άξονα x΄Οx με ταχύτητα u=2 cm/sec.



Τότε (ΓΑ)=x-1=ut=2t.

Επειδή $\theta(t)=\theta_1(t)+\theta_2(t)$και η γωνία $\theta_1(t)$ δεν μεταβάλλεται, $\theta'(t)=\theta'_1(t)+\theta'_2(t)=\theta'_2(t)$, ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ_2.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(\theta_2(t))=εφ\theta_2(t)$.

Τότε $f(\theta_2(t))=εφ\theta_2(t)=\frac{(ΓΑ)}{(ΓΚ)}=\frac{x-1}{2}=\frac{2t}{2}=t$.

Άρα $\left(f(\theta_2(t))\right)'=(t)'=1$……………………..(1)

και $\left(f(\theta_2(t))\right)'=(εφ\theta_2(t))'$

$$=\frac{1}{συν^2(\theta_2(t))}\cdot\theta'_2(t)$$

$$=\frac{(ΑΚ)^2}{(ΓΚ)^2}\cdot\theta'_2(t)$$

$$=\frac{(x-1)^2+4}{4}\cdot\theta'_2(t)\ldots\ldots\ldots(2)$$

Εάν στην (2) θέσουμε $\left(f(\theta_2(t))\right)'=1$ και $x=5/3$, βρίσκουμε $\theta'_2(t)=0{,}9$ rad/sec.

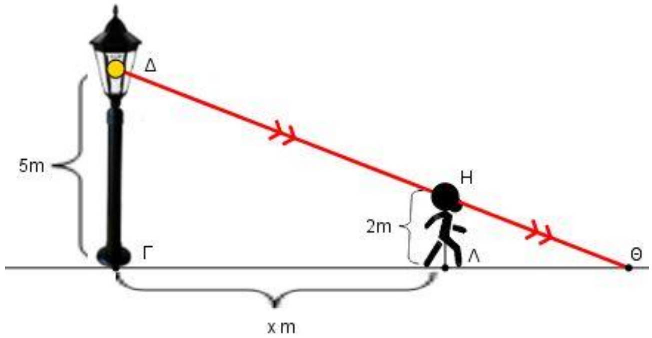
7. Μια λάμπα που φωτίζει το δρόμο βρίσκεται σε ύψος 5m. Ένας άνθρωπος ύψους 2m απομακρύνεται από αυτήν με ταχύτητα 4m/sec.

i. Να βρείτε το μήκος της σκιάς του σε συνάρτηση με την απόσταση x του ανθρώπου από την βάση της κολώνας.

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της σκιάς του ανθρώπου.

Λύση:

i. Η σκιά μήκους (ΘΛ) στο παρακάτω σχήμα, υπολογίζεται με αναλογίες στα όμοια τρίγωνα ΗΘΛ και ΓΔΘ:



$$\frac{(\Theta\Lambda)}{(\Theta\Gamma)}=\frac{(\text{Η}\Lambda)}{(\Delta\Gamma)}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x+f(x)}=\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5f(x)=2x+2f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2x}{3}\text{m.}$$

ii. $f(x(t))=\frac{2x(t)}{3}$.

$$f'(x(t))=\frac{2x'(t)}{3}=\frac{2}{3}\cdot 4\text{m/sec}$$

$$=\frac{8}{3}\text{m/sec.}$$

8. Αν ένα σημείο Α$(x(t),y(t))$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{5}{3}x^3$ και την χρονική στιγμή t_0 διέρχεται από το σημείο με τετμημένη -1 m και η ταχύτητα της τετμημένης πάνω στον άξονα των x είναι 5m/sec ενώ η επιτάχυνσή του είναι 1 $m/_{sec^2}$

τότε να βρείτε:

i. Την τεταγμένη του σημείου την χρονική στιγμή t_0.

ii. Την ταχύτητα της τεταγμένης την χρονική στιγμή t_0.

iii. Την επιτάχυνση της τεταγμένης την χρονική στιγμή t_0.

Λύση:

i. $x(t_0)=-1$m.

$$f(x(t_0))=\frac{5}{3}x^3(t_0)$$

$$=\frac{5}{3}(-1)^3$$

$$=-\frac{5}{3}\text{m.}$$

ii. $u_x(t_0)=x'(t_0)=5$m/sec.

$$f(x(t))=\frac{5}{3}x^3(t)$$

$$f'(x(t))=\frac{5}{3}\cdot 3x^2(t)\cdot x'(t)$$

$$f'(x(t))=5x^2(t)\cdot u_x(t)$$

$$f'(x(t_0))=5x^2(t_0)\cdot u_x(t_0)$$

$$=5\cdot(-1)^2\cdot 5$$

$$=25\text{m/sec.}$$

iii. $\alpha_x(t_0)=1\text{m/sec}^2$.

$\alpha_y(t)=f''(x(t))$

$$=\left(5x^2(t)\cdot u_x(t)\right)'$$

$$=10x(t)\cdot x'(t)\cdot u_x(t)+5x^2(t)\cdot u_x'(t)$$

$$=10x(t)\cdot u_x^2(t)+5x^2(t)\cdot a_x(t)$$

οπότε

$$\alpha_y(t_0)=10x(t_0)\cdot u_x^2(t_0)+5x^2(t_0)\cdot a_x(t_0)$$

$$=10\cdot(-1)\cdot 5^2+5\cdot(-1)^2\cdot 1$$

$$=-250+5$$

$$=-245\text{m/sec}^2.$$

9. (ΕΜΕ 2008) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x+1)-7}{x-1}=10.$$

i. Να αποδείξετε ότι: α) f(3) = 7

β) f΄(3) = 5.

ii. Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Μ$(3,f(3))$.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση y=5x-8.

β) Ένα σημείο Σ, που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία (ε). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

Λύση:

i. Θέτουμε $g(x)=\frac{f(2x+1)-7}{x-1}$. Τότε

$f(2x+1)=(x-1)\cdot g(x)+7$,

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=10$ και

$$\lim_{x\to 1}f(2x+1)=\lim_{x\to 1}[(x-1)\cdot g(x)+7]$$

$=0\cdot 10+7=7$……………..(1)

Θέτουμε 2x+1=u.

$\lim\limits_{x\to 1}u=3$, οπότε η (1) γίνεται:

$\lim\limits_{u\to 3}f(u)=7$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, $f(3)=\lim\limits_{u\to 3}f(u)=7$.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-7}{x-3}$$

Θέτω x=2u+1.

Τότε u=$\frac{x-1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 3}u=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{2}=1$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{f(2u+1)-7}{2u+1-3}$$
$$= \lim_{u \to 1} \frac{f(2u+1)-7}{2u-2}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{u \to 1} \frac{f(2u+1)-7}{u-1}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

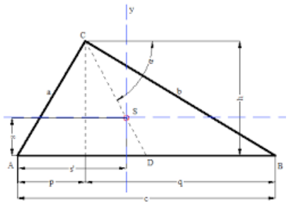
ii. **α)** Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

y-f(3)=f΄(3)(x-3) ⇔ y-7=5(x-3)

⇔ y=5x-8.

β) $\vec{O\Sigma}$ =(x,y)=(x,5x-8) και $\vec{OM}$ =(3,7).

(ΟΜΣ)= $\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x & 5x-8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right|$



= $\frac{1}{2}$ |7x-15x+24|

= $\frac{1}{2}$ |-8x+24|

=4|-x+3|

=4(x-3) ………………γιατί x>3.

Έστω Ε(x(t))=4(x(t)-3).

Ε΄(x(t))=4x΄(t)

=4·2

=8m^2/sec.

10. ….