ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ

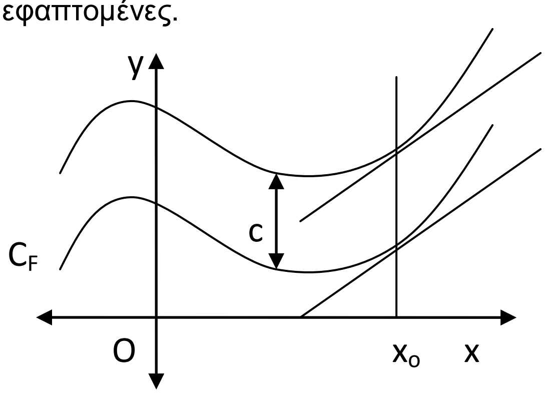
- Εάν f(x) συνεχής στο Δ και f΄(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε f σταθερή στο Δ, δηλαδή υπάρχει c∈R τέτοιο ώστε f(x)=c,
- Εάν f(x), g(x) συνεχής στο Δ και f΄(x)=g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε οι f,g διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα, δηλαδή υπάρχει c∈R τέτοιο ώστε f(x)-g(x)=c.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

I. Μια συνάρτηση F με F΄(x)=f(x) για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, λέγεται παράγουσα **ή** αρχική συνάρτηση της f,

II. μια συνάρτηση f έχει άπειρες αρχικές συναρτήσεις που έχουν τις εξής ιδιότητες:

- διαφέρουν μεταξύ τους κατά σταθερή ποσότητα c,
- εάν C_F είναι η γραφική παράσταση μιας αρχικής, τότε οι γραφικές παραστάσεις των άλλων αρχικών είναι μετατοπίσεις της C_F κατά c μονάδες στον άξονα των y,
- στα σημεία των γραφικών παραστάσεών τους με ίδια τετμημένη x_o έχουν παράλληλες εφαπτομένες.



III. ο παρακάτω πίνακας δίνει τις αρχικές F βασικών συναρτήσεων f:

f	F
0	c
1	x+c
x^{ν}	$\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$ +c
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$, x>0	lnx
ημx	-συνx
συνx	ημx
α^x , 0<α ≠1	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	εφx+c
$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	-σφx+c

επίσης χρησιμοποιούνται και οι σχέσεις:

1. $\frac{f'(x)}{f(x)}=[\ln f(x)]', \quad f(x)>0$

2. $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=[\sqrt{f(x)}]', \quad f(x)>0$

3. $e^{f(x)}f'(x)=\left[e^{f(x)}\right]'$

4. $f^{\nu}(x)f'(x)=\left[\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]'$

5. f΄(x)ημf(x)=[-συνf(x)]΄

6. f΄(x)συνf(x)=[ημf(x)]΄

7. $\alpha^{f(x)}f'(x)=\left[\frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha}\right]'$

8. $\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}=\left[\varepsilon\varphi f(x)\right]'$

9. $\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}=\left[-\sigma\varphi f(x)\right]'$

10. $\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\left[-\frac{1}{f(x)}\right]', f(x)\neq 0$

11. f΄(x)g(x)+f(x)g΄(x)=[f(x)g(x)]΄

12. $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$ με $g(x)\neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x)=2(\sigma\upsilon\nu^4x-\eta\mu^4x)+\eta\mu^2x-3\sigma\upsilon\nu^2x+4$

είναι σταθερή και να βρείτε την f.

2. Να υπολογίσετε το λ∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^6x+\eta\mu^6x+\lambda(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x)$ να είναι σταθερή και να βρείτε την f.

3. Εάν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f'(x)=g^2(x)$, $g'(x)=f^2(x)$, για κάθε x∈R, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^3(x)-g^3(x)$ είναι σταθερή.

4. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με f΄΄(x)=f(x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)= $\frac{3}{2}f^2(x)-\frac{3}{2}[f'(x)]^2$ είναι σταθερή.

5. Να βρεθεί συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R και ισχύει xf΄(x)=2f(x) για κάθε x∈R* και f(1)=2016.

6. Αν $f'(x)+e^x=2\sigma\upsilon\nu2x+\frac{x}{x^2+1}$ για κάθε x∈R, να βρείτε τον τύπο της f αν f(0)=0.

7. Έστω f: R→R με f΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈R. Να βρείτε την f(x) αν f(0)=1.

8. Να προσδιοριστεί συνάρτηση f τέτοια ώστε f΄(x)=e^x(ημx-συνx) για κάθε x∈R και f(π/2)=1.

9. Να βρείτε την συνάρτηση f: R→R με f(R)= R_+^*, $\frac{f'(x)}{f(x)}=1+e^x$ για κάθε x∈R και f(ln3)=3.

10. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν f ΄΄(x)=1 για κάθε x∈R, f(0)=1 και f(1)=0.

11. Να βρείτε συνάρτηση f με
- f΄΄(x)=e^x+2x για κάθε x∈R και
- η γραφική παράσταση αυτής τέμνει τον άξονα xx΄ στα σημεία με τετμημένες x_o=1 και x_1=0.

12. Η συνάρτηση f: (-π/2,π/2)→R είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με f΄(0)=0 και f΄΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈(-π/2, π/2). Να δείξετε ότι f(x)=κσυνx, κ σταθερά.

13. Δίνεται η συνάρτηση f:(0,+∞)→R με f΄(x)=2xf(x) για κάθε x∈(0,+∞).
- **i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)·e^{-x^2} είναι σταθερή.
- **ii.** Να βρείτε τον τύπο της f, αν f(1)=-1.

14. Δίνεται f: R*→R με $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}$ για κάθε x≠0. Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(\ln 2)=$ $=-\frac{2}{3}$.

15. Δίνεται f:R→R με $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$ για κάθε x≠0. Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(\ln 2)=2$.

16. Δίνεται f:R→R με f΄΄(x)≥0 για κάθε x∈R και f΄(-1)=f΄(1)=0. Να δείξετε ότι f(-1/2)=f(1/2).

17. Έστω f, g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο R, τέτοιες ώστε f(0)=g(0) και f΄΄(x)=g΄΄(x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι:
- υπάρχει c∈R τέτοιο ώστε f(x)-g(x)=cx για κάθε x∈R,
- αν $ρ_1$, $ρ_2$ με $ρ_1$<0<$ρ_2$ ρίζες της g(x) τότε η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [$ρ_1$, $ρ_2$].

18. Εάν f΄΄΄(x)=0 για κάθε x∈R, να βρείτε τον τύπο της f εάν f(1)=0, f(3)=2 και f(-1)=6.

19. Εάν f΄΄΄(x)=0 για κάθε x∈R, να βρείτε την f εάν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή Ο(0,0), και η εφαπτομένη στο σημείο της Μ(1,2) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των x γωνία π/4.

20. (ΕΜΕ) Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(x)>0 για κάθε x∈R, της οποίας η γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο της M(x,f(x)) έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε x∈R και ισχύει f(1)=9.

21. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και την F(x)=f^2(x)+(f΄(x))^2, για κάθε x∈R. Εάν f΄΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈R, να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση. Ποιος είναι ο τύπος της f εάν f(0)=f΄(0)=0;

22. (ΕΜΕ) Έστω f, g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο R, τέτοιες ώστε f΄΄(x)g(x)= =f(x)g΄΄(x) για κάθε x∈R, f΄(0)g(0)=f(0)g΄(0) και g(x)≠0 για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι υπάρχει λ∈R τέτοιος ώστε f(x)=λg(x) για κάθε x∈R.

23. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει f΄(x)<x για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι:

f(4)-f(2)<6.

24. Έστω f: R→R με f΄(x)=3f(x) για κάθε x∈R.

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{e^{3x}}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f,

b) Εάν f(x) είναι η λύση του (α) ερωτήματος, για την οποία f(0)=3, να λυθεί στο R η εξίσωση f^2(x)-4f(x)-5=0.

25. Να βρείτε τον τύπο της η συνάρτησης f:(1,+∞)→R με f΄(e)=-1, $\frac{f(x)}{f'(x)}+x\ln x=0$ για κάθε x>1 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο της M(e,f(e)) είναι κάθετη στην ευθεία (ε): x-y=2016.

26. Δίνεται η συνάρτηση g:(-π/2,π/2)→R με g΄(x)συνx+g(x)ημx=g(x)συνx για κάθε x∈(-π/2,π/2).
- **i.** Να δείξετε ότι $\left(\frac{g(x)}{συνx}\right)'=\frac{g(x)}{συνx}$ για κάθε x∈(-π/2,π/2).
- **ii.** Να βρείτε τον τύπο της g, αν g(0)=2016.

27. Δίνεται f: R→R με $\left(f(x)-e^x\right)\cdot\left(f'(x)-e^x\right)=0$ για κάθε x∈R και f(0)=2.
- **i.** Να δείξετε ότι $\left(f(x)-e^x\right)^2=1$.
- **ii.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)-e^x διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.
- **iii.** Να βρείτε τον τύπο της f.

28. Δίνεται η συνάρτηση f:[0,+∞)→R με f(1)=e και x(f΄(x)-f(x))=f(x) για κάθε x≥0.
- **i.** Να υπολογίσετε το f(0).
- **ii.** Να δείξετε ότι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.
- **iii.** Να βρείτε τον τύπο της f.

29. Δίνεται η συνάρτηση f:R→R με f(x+y)=f(x)+ +f(y) για κάθε x,y∈R.
- **i.** Να δείξετε ότι f(0)=0.
- **ii.** Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
- **iii.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0, με f΄(0)=2, τότε:
  - **α)** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f΄(x)=2 για κάθε x∈R.
  - **β)** Να βρείτε τον τύπο της f.

30. Δίνεται f:R→R με $f'(x+y)=\frac{1}{2}f(x)\cdot f(y)$ για κάθε x,y∈R. Η ευθεία (ε): y=2x+2 είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της M(0,f(0)).

i. Να βρείτε το f(0).

ii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

31. Έστω f: R→R με $f(x)\cdot f'(-x)=1$ για κάθε x∈R και f(0)=1. Να δείξετε ότι:

i. $f(-x)\cdot f'(x)=1$ για κάθε x∈R.

ii. $f(x)\cdot f(-x)=1$ για κάθε x∈R.

iii. $f(x)=e^x$ για κάθε x∈R.

32. Έστω f συνεχής στο R και ισχύει $(x-2)f'(x)= 2x^2-5x+2$, για κάθε x∈R. Να βρείτε την f εάν f(3)=7.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

33. (Θέμα 4ον α ερώτημα 2005) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε x∈R και f(0)=0. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

34. (Θέμα Δ 2010) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(0)=3, f(x)≠x και $f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}$ για κάθε x∈R.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, x∈R, είναι σταθερή. Μονάδες 6

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, x∈R.

Μονάδες 7

35. (Θέμα Γ 2013) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g:R→R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε

- $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x$ για κάθε x∈R
- f(0)=1 και
- $g(x)=x^3+\frac{3x^2}{2}-1$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, x∈R

Μονάδες 9

ii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(g(x))=1 Μονάδες 8

36. (Θέμα Δ1 2015) Θεωρούμε την συνάρτηση f:R→R, παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)=2$ για κάθε x∈R και
- f(0)=0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, x∈R. Μονάδες 5

…………………

37. φδσφαφδ