ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ

1. *Θεώρημα*: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- η f είναι συνεχής στο *Δ* και
- $f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του *Δ*, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ* .

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ....(1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi) = 0$ οπότε λόγω της (1), είναι $f(x_2)-f(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$.

- Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

2. Το προηγούμενο θεώρημα, ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Πχ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & \alpha\nu\ x>0\\ -1, & \alpha\nu\ x<0\end{cases}$ έχει $f'(x)=0$ στην ένωση $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3. *Πόρισμα*: Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

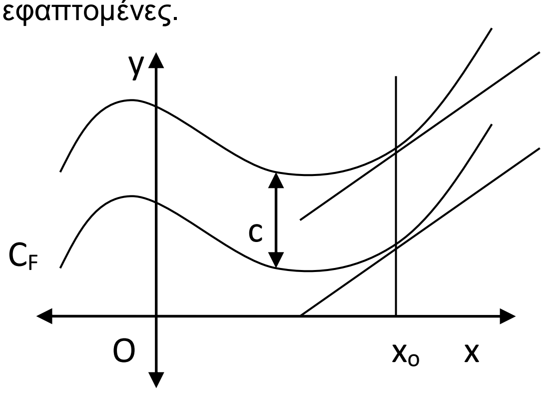
- οι f, g είναι συνεχείς στο *Δ* και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του *Δ*, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση f – g είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x) = 0$.
Επομένως, η συνάρτηση f - g είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:
$f(x) - g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

4. Μια συνάρτηση F με $F'(x)=f(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, λέγεται <u>παράγουσα</u> **ή** <u>αρχική</u> συνάρτηση της f,

5. Μια συνάρτηση f έχει άπειρες αρχικές συναρτήσεις που έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Διαφέρουν μεταξύ τους κατά σταθερή ποσότητα c,
- Εάν C_F είναι η γραφική παράσταση μιας αρχικής, τότε οι γραφικές παραστάσεις των άλλων αρχικών είναι μετατοπίσεις της C_F κατά c μονάδες στον άξονα των y,
- Στα σημεία των γραφικών παραστάσεών τους με ίδια τετμημένη x_o έχουν παράλληλες εφαπτομένες.



6. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις αρχικές συναρτήσεις F, βασικών συναρτήσεων f:

f	F
0	c
1	x+c
x^ν	$\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}+c$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$ +c
e^x	e^x
$\dfrac{1}{x}$, x>0	lnx
ημx	-συνx
συνx	ημx
α^x , $0<\alpha \neq 1$	$\dfrac{\alpha^x}{\ln a}$
$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	εφx+c
$\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	-σφx+c

7. Επίσης χρησιμοποιούνται και οι σχέσεις:

i. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=[\ln f(x)]', \quad f(x)>0$

ii. $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=[\sqrt{f(x)}]', \quad f(x)>0$

iii. $e^{f(x)}f'(x)=\left[e^{f(x)}\right]'$

iv. $f^{\nu}(x)f'(x)=\left[\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]'$

v. $f'(x)\eta\mu f(x)=[-\sigma\upsilon\nu f(x)]'$

vi. $f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)=[\eta\mu f(x)]'$

vii. $\alpha^{f(x)}f'(x)=\left[\dfrac{a^{f(x)}}{\ln a}\right]'$

viii. $\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}=[\varepsilon\varphi f(x)]'$

ix. $\dfrac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}=[-\sigma\varphi f(x)]'$

x. $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\left[-\dfrac{1}{f(x)}\right]'$, $f(x)\neq 0$

xi. f΄(x)g(x)+f(x)g΄(x)=[f(x)g(x)]΄

xii. $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$ με $g(x)\neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$f(x)=2(\sigma\upsilon\nu^4x-\eta\mu^4x)+\eta\mu^2x-3\sigma\upsilon\nu^2x+4$
είναι σταθερή και να βρείτε την f.

2. Να υπολογίσετε το λ∈R, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^6x+\eta\mu^6x+\lambda(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x)$ να είναι σταθερή και να βρείτε την f.

3. Εάν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f'(x)=g^2(x)$, $g'(x)=f^2(x)$, για κάθε x∈R, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^3(x)-g^3(x)$ είναι σταθερή.

4. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με f΄΄(x)=f(x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)= $\frac{3}{2}f^2(x)-\frac{3}{2}[f'(x)]^2$ είναι σταθερή.

5. Να βρεθεί συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R και ισχύει xf΄(x)=2f(x) για κάθε x∈R* και f(1)=2016.

6. Αν $f'(x)+e^x=2\sigma\upsilon\nu 2x+\dfrac{x}{x^2+1}$ για κάθε x∈R, να βρείτε τον τύπο της f αν f(0)=0.

7. Έστω f: R→R με f΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈R. Να βρείτε την f(x) αν f(0)=1.

8. Να προσδιοριστεί συνάρτηση f τέτοια ώστε $f'(x)=e^x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε x∈R και f(π/2)=1.

9. Να βρείτε την συνάρτηση f: R→R με f(R)=R_+^*, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1+e^x$ για κάθε x∈R και f(ln3)=3.

10. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν f ΄΄(x)=1 για κάθε x∈R, f(0)=1 και f(1)=0.

11. Να βρείτε συνάρτηση f με
- $f''(x)=e^x+2x$ για κάθε x∈R και
- η γραφική παράσταση αυτής τέμνει τον άξονα xx΄ στα σημεία με τετμημένες $x_0=1$ και $x_1=0$.

12. Η συνάρτηση f: (-π/2,π/2)→R είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με f΄(0)=0 και f΄΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈(-π/2, π/2). Να δείξετε ότι f(x)=κσυνx, κ σταθερά.

13. Δίνεται η συνάρτηση f:(0,+∞)→R με f΄(x)=2xf(x) για κάθε x∈(0,+∞).

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-x^2}$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f, αν f(1)=-1.

14. Δίνεται f: R*→R με $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}$ για κάθε x≠0. Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(\ln 2)=-\dfrac{2}{3}$.

15. Δίνεται f:R→R με $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$ για κάθε x≠0. Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(\ln 2)=2$.

16. Δίνεται f:R→R με f΄΄(x)≥0 για κάθε x∈R και f΄(-1)=f΄(1)=0. Να δείξετε ότι f(-1/2)=f(1/2).

17. Έστω f, g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο R, τέτοιες ώστε f(0)=g(0) και f΄΄(x)=g΄΄(x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι:
- υπάρχει c∈R τέτοιο ώστε f(x)-g(x)=cx για κάθε x∈R,
- αν ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<0<\rho_2$ ρίζες της g(x) τότε η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

18. Εάν f΄΄΄(x)=0 για κάθε x∈R, να βρείτε τον τύπο της f εάν f(1)=0, f(3)=2 και f(-1)=6.

19. Εάν f΄΄΄(x)=0 για κάθε x∈R, να βρείτε την f εάν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή Ο(0,0), και η εφαπτομένη στο σημείο της Μ(1,2) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα των x γωνία π/4.

20. (ΕΜΕ) Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(x)>0 για κάθε x∈R, της οποίας η γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο της M(x,f(x)) έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε x∈R και ισχύει f(1)=9.

21. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και την $F(x)=f^2(x)+(f'(x))^2$, για κάθε x∈R. Εάν f΄΄(x)+f(x)=0 για κάθε x∈R, να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση. Ποιος είναι ο τύπος της f εάν f(0)=f΄(0)=0;

22. (ΕΜΕ) Έστω f, g συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο R, τέτοιες ώστε f΄΄(x)g(x)= =f(x)g΄΄(x) για κάθε x∈R, f΄(0)g(0)=f(0)g΄(0) και g(x)≠0 για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι υπάρχει λ∈R τέτοιος ώστε f(x)=λg(x) για κάθε x∈R.

23. (ΕΜΕ) Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει f΄(x)<x για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι:
f(4)-f(2)<6.

24. Έστω f: R→R με f΄(x)=3f(x) για κάθε x∈R.

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{e^{3x}}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f,

b) Εάν f(x) είναι η λύση του (α) ερωτήματος, για την οποία f(0)=3, να λυθεί στο R η εξίσωση $f^2(x)-4f(x)-5=0$.

25. Να βρείτε τον τύπο της η συνάρτησης f:(1,+∞)→R, $\frac{f(x)}{f'(x)}+x\ln x=0$ για κάθε x>1 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο της M(e,f(e)) είναι κάθετη στην ευθεία (ε): x-y=2016.

26. Δίνεται η συνάρτηση g:(-π/2,π/2)→R με g΄(x)συνx+g(x)ημx=g(x)συνx για κάθε x∈(-π/2,π/2).

- **i.** Να δείξετε ότι $\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$ για κάθε x∈(-π/2,π/2).
- **ii.** Να βρείτε τον τύπο της g, αν g(0)=2016.

27. Δίνεται f: R→R με $\left(f(x)-e^x\right)\cdot\left(f'(x)-e^x\right)=0$ για κάθε x∈R και f(0)=2.

- **i.** Να δείξετε ότι $\left(f(x)-e^x\right)^2=1$.
- **ii.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.
- **iii.** Να βρείτε τον τύπο της f.

28. Δίνεται η συνάρτηση f:[0,+∞)→R με f(1)=e και x(f΄(x)-f(x))=f(x) για κάθε x≥0.

- **i.** Να υπολογίσετε το f(0).
- **ii.** Να δείξετε ότι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.
- **iii.** Να βρείτε τον τύπο της f.

29. Δίνεται η συνάρτηση f:R→R με f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x,y∈R.

- **i.** Να δείξετε ότι f(0)=0.
- **ii.** Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
- **iii.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με f΄(0)=2, τότε:
  - **α)** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f΄(x)=2 για κάθε x∈R.
  - **β)** Να βρείτε τον τύπο της f.

30. Δίνεται f:R→R με f΄(x+y)=$\frac{1}{2}$f(x)·f(y) για κάθε x,y∈R. Η ευθεία (ε): y=2x+2 είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της M(0,f(0)).

- **i.** Να βρείτε το f(0).
- **ii.** Να βρεθεί ο τύπος της f.

31. Έστω f: R→R με f(x)·f΄(-x)=1 για κάθε x∈R και f(0)=1. Να δείξετε ότι:

- **i.** f(-x)·f΄(x)=1 για κάθε x∈R.
- **ii.** f(x)·f(-x)=1 για κάθε x∈R.
- **iii.** $f(x)=e^x$ για κάθε x∈R.

32. Έστω f συνεχής στο R και ισχύει (x-2)f΄(x)= $2x^2-5x+2$, για κάθε x∈R. Να βρείτε την f εάν f(3)=7.

33. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: R→R, με f(x)≠1 για κάθε x∈R και f΄(x)=f(x)(1-f(x)) για κάθε x∈R.

- **i.** Να δείξετε ότι $\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right)'=\frac{f(x)}{1-f(x)}$.
- **ii.** Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, εάν f(0)=$^1/_2$.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ</u>

34. (Θέμα 4ον α ερώτημα 2005) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε x∈R και f(0)=0. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

35. (Θέμα Δ 2010) Δίνεται μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(0)=3, f(x)≠x και $f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}$ για κάθε x∈R.

- **i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, x∈R, είναι σταθερή. Μονάδες 6
- **ii.** Να δείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, x∈R. Μονάδες 7

36. (Θέμα Γ 2013) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g:R→R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε

- (f(x)+x)(f΄(x)+1)=x για κάθε x∈R
- f(0)=1 και
- $g(x)=x^3+\frac{3x^2}{2}-1$.

- **i.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, x∈R. Μονάδες 9
- **ii.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(g(x))=1 Μονάδες 8

37. (Θέμα Δ1 2015) Θεωρούμε την συνάρτηση f:R→R, παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)=2$ για κάθε x∈R και
- f(0)=0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, x∈R. Μονάδες 5

…………………

38. END.