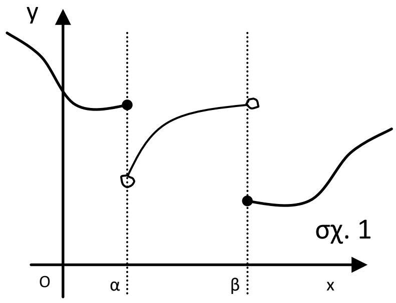
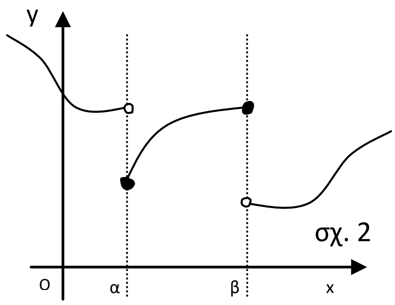
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Έστω f συνάρτηση. Θα λέμε ότι:

- η f είναι συνεχής στο (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) (σχ. 1),



- η f είναι συνεχής στο [α,β] όταν είναι συνεχής στο (α,β), και επιπλέον $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x) = f(a)$ και $\lim\limits_{x\to \beta^{-}} f(x) = f(\beta)$ (σχ. 2).



- ανάλογοι ορισμοί ισχύουν για την συνέχεια της συνάρτησης στα διαστήματα (α,β] και [α,β).

2. Μια συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο x_0, λέγεται <u>ασυνεχής</u> στο x_0. Μια συνάρτηση είναι ασυνεχής στο x_0, εάν:

i) η f δεν έχει όριο στο x_0,

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (μη πεπερασμένο όριο στο x_0,

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

3. Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Έτσι εάν η f συνεχής στο [α,β], έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $x_0\in$(α,β), δεν είναι κατ' ανάγκη f(α)f(β)<0. Πχ η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$ έχει ρίζα το 2∈(0,4), ενώ f(0)=6 και f(2)=2.

4. Όταν σε ένα θέμα ζητείται η ύπαρξη ενός ξ (x_0 ή γ κλπ) σε ένα διάστημα (α,β), ώστε να ισχύει μια ισότητα, τότε εφαρμόζουμε σε πρώτη φάση το Θ. Bolzano για μια συνάρτηση f στο διάστημα [α,β]. Για την επιλογή της συνάρτησης f ακολουθούμε γενικά τα εξής:

- Θέτουμε στη ζητούμενη σχέση όπου ξ (x_0 ή γ κλπ) το x και φέρνουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος,
- Θεωρούμε το $1^{ο}$ μέλος ως συνάρτηση και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για αυτή στο [α,β],
- Εάν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποιο από τα α, β απαλείφουμε πρώτα τους ανεπιθύμητους παρονομαστές και μετά θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση.

5. Εάν κατά την εφαρμογή του Θ. Bolzano σε ένα διάστημα [α,β] προκύπτει f(α)f(β)≤0, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- εάν f(α)f(β)=0 τότε f(α)=0 ή f(β)=0,
- εάν f(α)f(β)<0 τότε από Θ. Bolzano υπάρχει ξ∈(α,β) με f(ξ)=0.

Από τις δυο περιπτώσεις προκύπτει ότι υπάρχει ξ∈[α,β] με f(ξ)=0.

6. Εάν δεν μας δίνεται το διάστημα ύπαρξης ρίζας, τότε βρίσκουμε μόνοι μας ένα διάστημα [α,β], έτσι ώστε f(α)f(β)<0.

7. Εάν ζητείται η ύπαρξη περισσοτέρων σημείων $ξ_1$, $ξ_2$, …, $ξ_ν$, που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα σε διάστημα (α,β), χωρίζουμε το διάστημα σε ν ξένα μεταξύ τους διαστήματα και εφαρμόζουμε σε αυτά το Θ. Bolzano. Τα διαστήματα αυτά είτε δίνονται είτε προσδιορίζονται μετά από προσεκτική μελέτη δεδομένων και ζητούμενων.

8. Εάν μια συνάρτηση δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα Δ και είναι συνεχής σε αυτό, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. Έτσι μια συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Για το λόγο αυτό το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f βρίσκεται ως εξής:

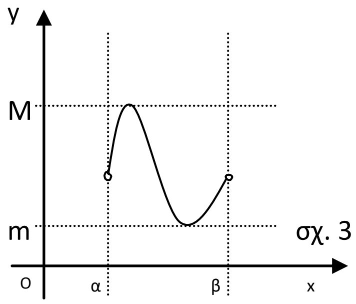
- Βρίσκουμε τις ρίζες της f αν υπάρχουν,
- κατασκευάζουμε τον βοηθητικό πίνακα με τις ρίζες της f,
- βάζουμε ως πρόσημο της f σε καθένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της, το πρόσημο της f σε ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του κάθε διαστήματος.

9. Εάν f ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β], και f(α)≠f(β), τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ f(α) και f(β), δηλαδή εάν **η**∈[f(α),f(β)], υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in$[α,β] με $f(x_0)$=**η** (Θ. ενδιαμέσων τιμών).

10. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης, είναι διάστημα (εάν είναι σταθερή, η εικόνα είναι μονοσύνολο).

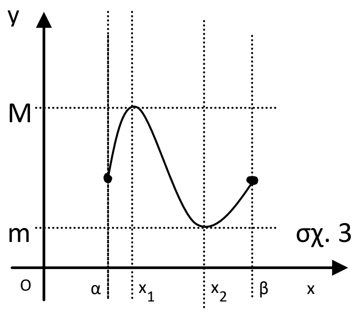
11. Δεν υπάρχει συνεχής μη σταθερή συνάρτηση f:R→Q, γιατί το Q δεν μπορεί να περιέχει την εικόνα f(R) του R που είναι διάστημα.

12. Η εικόνα ανοικτού διαστήματος δεν είναι υποχρεωτικά ανοικτό διάστημα. Πχ. στο παρακάτω σχ. 3 είναι f((α,β))=[m,M].



13. Η εικόνα κλειστού διαστήματος είναι κλειστό διάστημα.

14. Εάν f ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη M και μια ελάχιστη τιμή m. Υπάρχουν δηλ. δυο τουλάχιστον x_1, x_2 στο [α,β], τέτοια ώστε $f(x_1)=M$ και $f(x_2)=m$ (σχ. 4).



15. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f παίρνει την τιμή **η** σε ένα διάστημα [α, β], αρκεί να δείξουμε ότι m≤**η**≤M, όπου m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α, β].

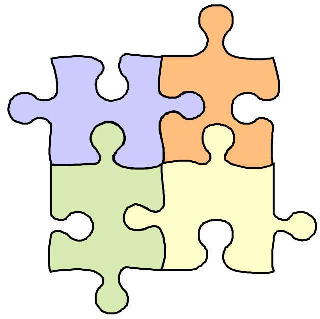
16. Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ=(α,β). Έστω A=$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και B=$\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$. Τότε η εικόνα f(Δ) του Δ είναι:

- f(Δ)=(A,B) εάν f ↗ στο Δ,
- f(Δ)=(B,A) εάν f ↘ στο Δ ,

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε εάν αντί του (α,β) έχουμε τα διαστήματα [α,β], [α,β), (α,β], (α,+∞), [α,+∞), (-∞,β), (-∞,β]

17. Η χρήση του Θ. Bolzano, δεν είναι πάντα ο μόνος (ή ο συντομότερος τρόπος) για να δείξουμε την ύπαρξη ριζών. Η παρατηρητικότητα και η άμεση επίλυση, μερικές φορές πλεονεκτούν. (πχ. άσκ. 38ii, 39)

18. Για να δείξουμε την ύπαρξη ρίζας σε σύνολο A μιας συνάρτησης, και δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στο A, τότε μπορεί να εφαρμόζεται σε κάποιο υποσύνολο B του A (άσκ. 35).



ΣΥΝΕΧΕΙΑ - ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

1. Εάν $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$, για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι η **f** είναι συνεχής στο $x_0=0$.
2. Να υπολογίσετε τα **α, β**$\in$**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1}, & \text{αν } x\neq 1 \\ 4, & \text{αν } x=1 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο **R**.
3. Να υπολογίσετε τα **α, β**$\in$**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2-(\beta-2)x-6}{x-2}, & \text{αν } x\neq 2 \\ 9, & \text{αν } x=2 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο **R**.
4. Να υπολογίσετε τα **α, β, γ**$\in$**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}, & \text{αν } x\neq 1 \\ 7, & \text{αν } x=1 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο **R**.
5. Να υπολογίσετε τα **α, β**$\in$**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x-\beta\,\eta\mu 2x}{x}, & \text{αν } x<0 \\ \alpha-1, & \text{αν } x=0 \\ \dfrac{2-\sqrt{4+x}}{\beta x}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο $x_0=0$.
6. Εάν η **f** είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $|xf(x)-\eta\mu x| \le x^4\,\eta\mu\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x\in R^*$, να υπολογίσετε το **f(0)**.
7. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$, τέτοιο ώστε $\xi^4=11-2\xi$.
8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^{2\kappa}+1}{x-\alpha}+\dfrac{x^{2\lambda}+1}{x-\beta}=0$ με $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$ και $\kappa, \lambda \in N^*$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα **(α,β)**.
9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\eta\mu x}{4x-\pi}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{3x-\pi}=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα **(π/4,π/3)**.
10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\alpha}{x-\lambda}+\dfrac{\beta}{x-\mu}+\dfrac{\gamma}{x-\nu}=0$ όπου **α, β, γ > 0** και **λ<μ<ν** έχει δυο ακριβώς πραγματικές άνισες ρίζες στα διαστήματα **(λ,μ)** και **(μ,ν)**.
11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4=11-2x$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα **(-2,2)**.
12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+x\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα **(-π/2,π/2)**.
13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^{10}-3x^7+4x^5-7x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

14. Να δείξετε ότι η εξίσωση **$συνx(1-4συνx)=4ημ^2x-x$** έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα **(π,2π)**.

15. Να δείξετε ότι η εξίσωση **$x^2+xe^{ημx}=συνx$** έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-{}^{π}/_{2},0)$ και $(0,{}^{π}/_{2})$.

16. Εάν **$f:[α,β]\to[α,β]$** είναι συνεχής στο **[α,β]**, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον **$x_0\in[α,β]$,** τέτοιο ώστε **$f(x_0)=x_0$**.

17. Έστω **f**, **g** συνεχείς στο **[α,β]** και τιμές στο **[α,β]**, τέτοιες ώστε **g(α)=α** και **g(β)=β**. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **f(x)=g(x)** έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο **[α,β]**.

18. Έστω **f**, **g** συνεχείς στο **[α,β]** και **f(α)+f(β)=g(α)+g(β)**. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των **f** και **g** έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη **$x_0\in[α,β]$**.

19. Εάν **f** είναι συνεχής στο **[α,β]**, **$f(α)\neq f(β)$** και **κ**, **λ** θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον **$ξ\in(α,β)$**, τέτοιο ώστε **κf(α)+λf(β)=(κ+λ)f(ξ)**.

20. Έστω **$f:R\to R$** με **$f(x)=x^2+3x-7$** και **$g:R\to R$** με **g(x)=f(x)-λx** όπου **$λ\in R$**. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **g(x)=0** έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο **$[ρ_1,ρ_2]$** όπου **$ρ_1,ρ_2$** είναι οι ρίζες της f(x)=0, με **$ρ_1 < ρ_2$** .

21. Έστω **$f:A\to R$** με **$f(x)=x^3-7x+5$** και **A=[-3,-2]**. Να αποδείξετε ότι:

i) η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο **A**,

ii) η εξίσωση **f(x)=0** έχει μια ακριβώς ρίζα στο **(-3,-2)**.

22. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{5}{x}+7=3\sqrt{x}$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα.

23. **i)** να αποδείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση **$f:A\to R$** έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα στο **A**, δηλαδή η **C_f** τέμνει τον άξονα **x΄Ox** σε ένα το πολύ σημείο,

ii) να δείξετε ότι η εξίσωση **$3^x+5^x=7^x$** έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

iii) ομοίως η εξίσωση **$x^2+xe^x+\ln x=4$**.

24. Θεωρούμε τις γραμμές **(c)** και **(ε)** που ορίζουν οι εξισώσεις **(c): $y=x^3+x^2$** και **(ε): y=5x-3**. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω γραμμές τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη μεταξύ **-4** και **-2**.

25. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{2x^3+x-1}=\dfrac{2}{x}$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα.

26. Να δείξετε ότι η εξίσωση **$x^{v}e^{x}=1$** έχει μοναδική ρίζα στο **(0,1)**.

27. Να βρείτε το σύνολο τιμών της **$f:[-1,2]\to R$**, με **$f(x)=x^2+3|x|$**.

28. Εάν **α,β>0**, να δείξετε ότι η εξίσωση **ασυνx+β=x** έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα, που δεν υπερβαίνει το **α+β**.

29. Αν **f** συνεχής στο **[0,1]** και **$0\leq f(x)\leq 1$**, να δείξετε ότι υπάρχει **$x_0\in[0,1]$,** τέτοιο ώστε **$f^2(x_0)+f(x_0)=x_0^2+x_0$**.

30. Έστω **$f:[π,2π]\to R$**, με **f(x)=x+συνx- 4**.

i) Να δείξετε ότι η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο **[π,2π]**,

ii) να βρείτε το σύνολο τιμών της και

iii) να δείξετε ότι η εξίσωση **συνx=4-x** έχει ακριβώς μια ρίζα στο **[π,2π]**.

31. Να βρείτε το πρόσημο της **$f(x)=x^3-4x^2-5x$**.

32. Έστω **f** συνεχής στο **[-3,3]**, **f(1)>0** και **$4x^2+9f^2(x)=36$**, για κάθε **$x\in(-3,3)$**. Να δείξετε ότι **f(x)>0** για κάθε **$x\in(-3,3)$**.

33. Έστω **f: $[α,β]\to R$**, συνεχής στο **[α,β]**, τέτοια ώστε **$α^2f(β)+β^2f(α)=0$**. Να αποδείξετε ότι αν **$αβ\neq0$**, τότε η εξίσωση **f(x)=0** έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο **[α,β]**.

34. Έστω **f: $[α,β]\to R$**, συνεχής στο **[α,β]**, τέτοια ώστε **κf(α)+λf(β)=0**, όπου κ, λ θετικοί πραγματικοί. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **f(x)=0** έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο **[α,β]**.

35. Εάν **f** συνεχής στο διάστημα **Δ** και **$α,β,γ,δ\in Δ$** με **α<γ<δ<β**, να δείξετε ότι:

i) υπάρχει **$ξ\in[α,β]$** τέτοιο ώστε $f(ξ)=\dfrac{f(α)+2f(β)}{3}$,

ii) υπάρχει **$x_0\in(α,β)$** τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(γ)+f(δ)}{2}$,

iii) υπάρχει $t\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(t)=\dfrac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\beta)}{6}$.

36. Θεωρούμε μια μη σταθερή συνάρτηση **f**, συνεχή στο διάστημα **[α,β]** και τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ του **[α,β]**.Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$, $\nu\in N^*$.

37. **i)** υπάρχει συνεχής συνάρτηση που να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές;

ii) εάν **f** συνεχής στο **R**, **f(1)=2** και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, να δείξετε ότι **f(x)=2** για κάθε $x\in R$.

38. Αν **f** συνεχής στο **[0,1]** και **f(0)=f(1)**, να δείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in[0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{2})$,

ii) υπάρχει $x_1\in[0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(x_1+\frac{1}{3})$.

39. Εάν $\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0$, να δείξετε ότι $\beta^2\geq 4\alpha\gamma$.

40. Εάν $f:[0,2]\to R$, συνεχής με **f(0)=f(2)**, να δείξετε ότι υπάρχουν $x_0, y_0\in[0,2]$, με $|x_0-y_0|=1$ τέτοια ώστε $f(x_0)=f(y_0)$.

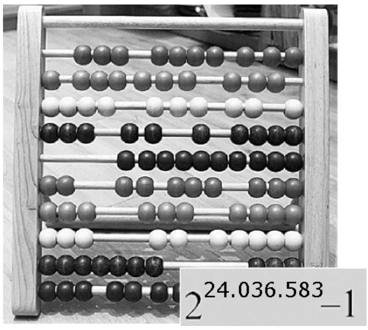
41. Έστω **f** συνεχής στο **0** και για κάθε $x,y\in R$ ισχύει **f(x+y)=f(x)συνy+f(y)συνx**. Να δείξετε ότι η **f** είναι συνεχής στο **R**.

42. Έστω $f:R\to R$, και για κάθε $x,y\in R$ ισχύει **f(x+y)=f(x)+f(y)**. Να δείξετε ότι

i) αν η **f** είναι συνεχής στο **0,** τότε η **f** είναι συνεχής στο **R**.

ii) αν η **f** είναι συνεχής στο $\alpha\in R$, τότε η **f** είναι συνεχής στο **R**.

43. Έστω $f:R^*\to R$, και για κάθε $x,y\in R^*$ ισχύει **f(xy)=f(x)+f(y)**. Να δείξετε ότι αν η **f** είναι συνεχής στο **1,** τότε η **f** είναι συνεχής στο R^*.



44.