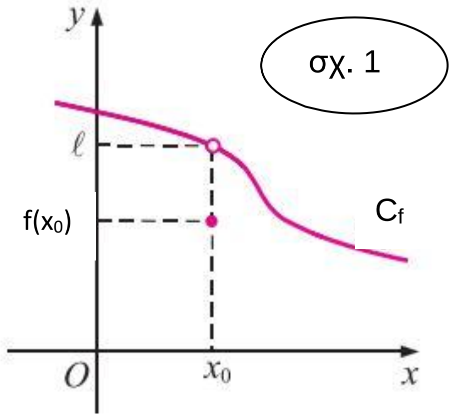
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής στο x_0**, όπου x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, εάν $\lim_{x\to x_0} f(x)$ = $f(x_0)$.

2. *Περιπτώσεις ασυνέχειας*: Μια συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο x_0, λέγεται **ασυνεχής στο x_0**. Μια συνάρτηση είναι ασυνεχής στο x_0, εάν:

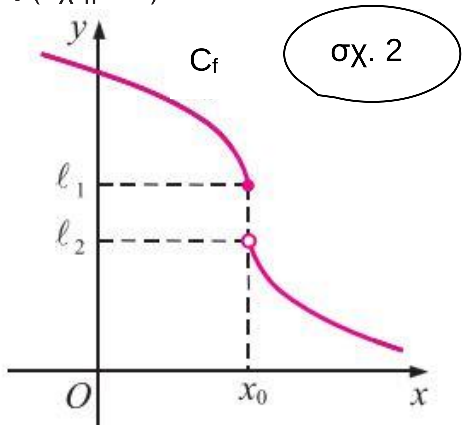
☛ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$ (σχήμα 1) .



Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$,

είναι $2=\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)=3$.

☛ Δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο x_0 (σχήμα 2).



Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ 2\text{-}x, & x > 0 \end{cases}$ δεν έχει όριο στο 0 γιατί:

$$1=\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) =2.$$

☛ Το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, γιατί $\lim_{x\to 0} f(x) =+\infty$.

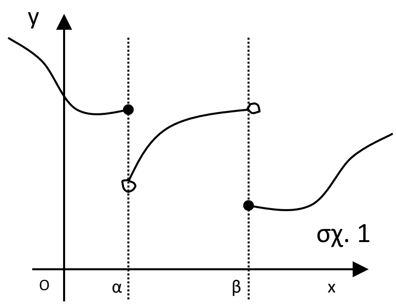
3. *Ορισμός*: Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, **συνεχής συνάρτηση.**

4. *Παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων*: Οι πολυωνυμικές, ρητές, εκθετικές, λογαριθμικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.

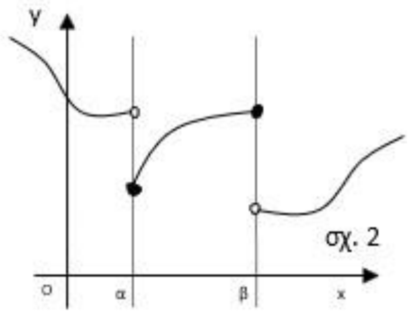
5. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις f+g, c·f με c∈R, f·g, $\frac{f}{g}$, |f| και $\sqrt[\nu]{f}$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$,τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

7. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (*α*, *β*)**,όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (*α*, *β*) (βλέπε σχ. 1 παρακάτω).



8. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [*α*, *β*]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (*α*, *β*) και επιπλέον $\lim_{x\to \alpha^+} f(x)$ = f(α) και $\lim_{x\to \beta^-} f(x)$ = = f(β) (βλέπε σχ. 2 παρακάτω).



9. Ανάλογοι ορισμοί με τους ορισμούς 7 και 8, διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής (*α*, *β*] και [*α*, *β*) αντίστοιχα.

10. *Θεώρημα Bolzano*: Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [*α*,*β*]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [*α*,*β*] και,
- f(*α*)· f(*β*) < 0,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, x_0∈(α,β) τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο ανοικτό διάστημα (α,β).

11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ* και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή δια-τηρεί πρόσημο στο διάστημα *Δ*.

Άρα μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f, χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Για το λόγο αυτό το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f βρίσκεται ως εξής:

a. Βρίσκουμε τις ρίζες της f αν υπάρχουν.
b. Κατασκευάζουμε τον βοηθητικό πίνακα με τις ρίζες της f.
c. Βάζουμε ως πρόσημο της f σε καθένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της, το πρόσημο της f σε ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο x_0 του κάθε διαστήματος.

12. *Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (ΘΕΤ)*:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε, για κάθε αριθμό *η* μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$. Παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

13. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές (μπορεί όμως και να τις παίρνει).

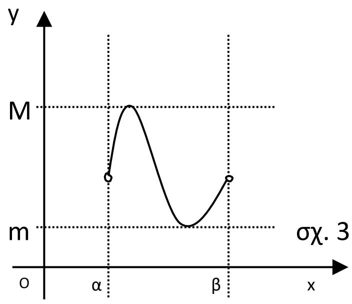
14. Η εικόνα *f(Δ)* ενός διαστήματος *Δ* μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης *f*, είναι διάστημα. Αν το διάστημα *Δ* είναι κλειστό, η εικόνα του *f(Δ)* είναι κλειστό διάστημα. (Εάν η συνάρτηση είναι σταθερή, η εικόνα είναι μονοσύνολο).

15. *ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)*:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή *M* και μια ελάχιστη τιμή m.

Άρα το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα **[*m*, *M*]**.

16. Η εικόνα ανοικτού διαστήματος δεν είναι υποχρεωτικά ανοικτό διάστημα. Πχ. στο παρακάτω σχ. 3 είναι $f((\alpha,\beta))=[m,M]$.



σχ. 3

17. ☛ Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim_{x\to\alpha} f(x)$ και $B=\lim_{x\to\beta} f(x)$.

☛ Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A).

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε εάν αντί του (α,β) έχουμε τα διαστήματα $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$. Δηλαδή:

☛ $f([\alpha,\beta])=[A,B]$ εάν f ↗ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.
$f([\alpha,\beta])=[B,A]$ εάν f ↘ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

☛ $f([\alpha,\beta))=[A,B)$ εάν f ↗ στο διάστημα $[\alpha,\beta)$.
$f([\alpha,\beta))=(B,A]$ εάν f ↘ στο διάστημα $[\alpha,\beta)$.

☛ $f((\alpha,\beta])=(A,B]$ εάν f ↗ στο διάστημα $(\alpha,\beta]$.
$f((\alpha,\beta])=[B,A)$ εάν f ↘ στο διάστημα $(\alpha,\beta]$.

Στα παραπάνω, μπορεί να είναι $\alpha=-\infty$ και $\beta=+\infty$.

19. Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Έτσι εάν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $x_0\in(\alpha,\beta)$, δεν είναι κατ' ανάγκη $f(\alpha)f(\beta)<0$.

Πχ η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$ έχει ρίζα το $2\in(0,4)$, ενώ $f(0)=6$ και $f(2)=2$.

Επίσης εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)>0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ μπορεί να έχει, αλλά και να μην έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).

Πχ η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+1$ έχει ρίζα το $1\in(0,3)$, ενώ $f(0)=1$ και $f(3)=4$, οπότε $f(0)f(3)=4>0$.

20. Όταν σε ένα θέμα ζητείται η ύπαρξη ενός ξ (x_0 ή γ κλπ) σε ένα διάστημα (α,β), ώστε να ισχύει μια ισότητα, τότε εφαρμόζουμε σε πρώτη φάση το Θ. Bolzano για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Για την επιλογή της συνάρτησης f ακολουθούμε γενικά τα εξής:

a. Θέτουμε στη ζητούμενη σχέση όπου ξ (x_0 ή γ κλπ) το x και φέρνουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος,

b. Θεωρούμε το 1° μέλος ως συνάρτηση και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για αυτή στο [α,β],

c. Εάν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποιο από τα α, β απαλείφουμε πρώτα τους ανεπιθύμητους παρονομαστές και μετά θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση.

21. Εάν κατά την εφαρμογή του Θ. Bolzano σε ένα διάστημα [α,β] προκύπτει $f(\alpha)f(\beta)\le 0$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

a. εάν $f(\alpha)f(\beta)=0$ τότε $f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$,

b. εάν $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=0$.

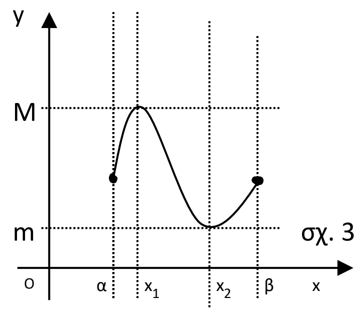
Από τις δυο περιπτώσεις προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ με $f(\xi)=0$.

22. Εάν δεν μας δίνεται το διάστημα ύπαρξης ρίζας, τότε βρίσκουμε μόνοι μας ένα διάστημα [α,β], έτσι ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$.

23. Εάν ζητείται η ύπαρξη περισσοτέρων σημείων ξ_1, ξ_2, …, ξ_ν, που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα σε διάστημα (α,β), χωρίζουμε το διάστημα σε ν ξένα μεταξύ τους διαστήματα και εφαρμόζουμε σε αυτά το Θ. Bolzano. Τα διαστήματα αυτά είτε δίνονται είτε προσδιορίζονται μετά από προσεκτική μελέτη δεδομένων και ζητούμενων.

24. Δεν υπάρχει συνεχής μη σταθερή συνάρτηση $f:R\to Q$, γιατί το Q δεν μπορεί να περιέχει την εικόνα f(R) του R που είναι διάστημα.

25. Εάν f ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη M και μια ελάχιστη τιμή m. Υπάρχουν δηλ. δυο τουλάχιστον x_1, x_2 στο [α,β], τέτοια ώστε $f(x_1)=M$ και $f(x_2)=m$ (σχ. 4).

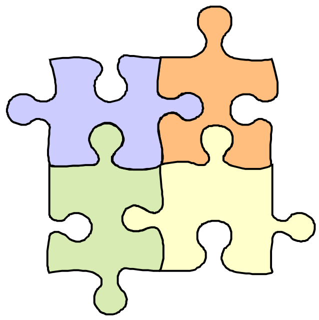


σχ. 3

26. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f παίρνει την τιμή **η** σε ένα διάστημα [α, β], αρκεί να δείξουμε ότι $m\le \eta \le M$, όπου m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α, β].

27. Η χρήση του Θ. Bolzano, δεν είναι πάντα ο μόνος (ή ο συντομότερος τρόπος) για να δείξουμε την ύπαρξη ριζών. Η παρατηρητικότητα και η άμεση επίλυση, μερικές φορές πλεονεκτούν. (πχ. Άσκηση 38ii, 39)

28. Για να δείξουμε την ύπαρξη ρίζας σε σύνολο Α μιας συνάρτησης, και δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στο Α, τότε μπορεί να εφαρμόζεται σε κάποιο υποσύνολο Β του Α (άσκ. 35).



ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εάν $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$, για κάθε $x \in IR$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.
2. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta \in IR$, ώστε η $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1\\ 4, & \text{αν } x=1\end{cases}$, να είναι συνεχής στο IR.
3. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta \in IR$, ώστε η $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x^2-(\beta-2)x-6}{x-2}, & \text{αν } x \neq 2\\ 9, & \text{αν } x=2\end{cases}$, να είναι συνεχής στο IR.
4. Να υπολογίσετε τα α, β, $\gamma \in R$, ώστε η $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}, & \text{αν } x \neq 1\\ 7, & \text{αν } x=1\end{cases}$, να είναι συνεχής στο IR.
5. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta \in IR$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x-\beta \eta\mu 2x}{x}, & \text{αν } x<0\\ \alpha\text{-}1, & \text{αν } x=0\\ \frac{2-\sqrt{4+x}}{\beta x}, & \text{αν } x>0\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$.
6. Εάν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $|xf(x)-\eta\mu x| \le x^4\,\eta\mu\frac{1}{x}$, για κάθε $x \in IR^*$, να υπολογίσετε το f(0).
7. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$, τέτοιο ώστε $\xi^4=11-2\xi$.
8. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$$\frac{x^{2\kappa}+1}{x-\alpha}+\frac{x^{2\lambda}+1}{x-\beta}=0$$
με $\alpha,\beta \in R$, $\alpha<\beta$ και $\kappa, \lambda \in IN^*$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα (α,β).
9. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$$\frac{\eta\mu x}{4x-\pi}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3x-\pi}=0$$
έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα (π/4,π/3).
10. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$$\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}=0$$
όπου α, β, γ > 0 και λ<μ<ν έχει δυο ακριβώς πραγματικές άνισες ρίζες στα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν).
11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4=11-2x$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-2,2).
12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+x\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-π/2, π/2).
13. Να δείξετε ότι η εξίσωση
$$2x^{10}-3x^7+4x^5-7x+1=0$$
έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
14. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x(1-4\sigma\upsilon\nu x)=4\eta\mu^2 x-x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα (π,2π).
15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+xe^{\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (-π,0) και (0,π).
16. Εάν $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής στο [α,β], τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.
17. Έστω f, g συνεχείς στο [α,β] και τιμές στο [α,β], τέτοιες ώστε g(α)=α και g(β)=β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=g(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].
18. Έστω f, g συνεχείς στο [α,β] και f(α)+f(β)=g(α)+g(β). Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in [\alpha,\beta]$.
19. Εάν f είναι συνεχής στο [α,β], $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και κ, λ θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)=(\kappa+\lambda)f(\xi)$.
20. Έστω $f:R\to R$ με $f(x)=x^2+3x-7$ και $g: IR\to IR$ με $g(x)=f(x)-\lambda x$ όπου $\lambda \in IR$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$ όπου ρ_1,ρ_2 είναι οι ρίζες της f(x)=0, με $\rho_1 < \rho_2$.
21. Έστω $f:A\to IR$ με $f(x)=x^3-7x+5$ και A=[-3,-2]. Να αποδείξετε ότι:
    i) H f είναι γνησίως αύξουσα στο A.
    ii) Η εξίσωση f(x)=0 έχει μια ακριβώς ρίζα στο (-3,-2).
22. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{5}{x}+7=3\sqrt{x}$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα.
23. **i)** Να αποδείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:A\to R$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα στο A, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα x΄Ox σε ένα το πολύ σημείο.
    ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3^x+5^x=7^x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.
    iii) Ομοίως η εξίσωση $x^2+xe^x+\ln x=4$.
24. Θεωρούμε τις γραμμές (c) και (ε) που ορίζουν οι εξισώσεις (c): $y=x^3+x^2$ και (ε): $y=5x-3$. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω γραμμές τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη μεταξύ -4 και -2.
25. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{2x^3+x-1}=\frac{2}{x}$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα.
26. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^v e^x=1$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1).
27. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f:[-1,2]\to IR$, με $f(x)=x^2+3|x|$.

28. Εάν α,β>0, να δείξετε ότι η εξίσωση ασυνx+β=x έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα, που δεν υπερβαίνει το α+β.

29. Αν f συνεχής στο [0,1] και 0≤f(x)≤1, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f^2(x_0)+f(x_0)=x_0^2+x_0$.

30. Έστω f:[π,2π]→ IR, με f(x)=x+συνx- 4.
- **i)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [π,2π],
- **ii)** να βρείτε το σύνολο τιμών της και
- **iii)** να δείξετε ότι η εξίσωση συνx=4-x έχει ακριβώς μια ρίζα στο [π,2π].

31. Να βρείτε το πρόσημο της $f(x)=x^3- 4x^2- 5x$.

32. Έστω f συνεχής στο [-3,3], f(1)>0 και $4x^2+9f^2(x)=36$, για κάθε x∈(-3,3). Να δείξετε ότι f(x)>0 για κάθε x∈(-3,3).

33. Έστω f: [α,β]→ IR, συνεχής στο [α,β], τέτοια ώστε $\alpha^2 f(\beta)+\beta^2 f(\alpha)=0$. Να αποδείξετε ότι αν αβ≠0, τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

34. Έστω f: [α,β]→ IR, συνεχής στο [α,β], τέτοια ώστε κf(α)+λf(β)=0, όπου κ, λ θετικοί πραγματικοί. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

35. Εάν f συνεχής στο διάστημα Δ και α,β,γ,δ∈Δ με α<γ<δ<β, να δείξετε ότι:
- **i)** υπάρχει ξ∈[α,β] τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3}$,
- **ii)** υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{f(\gamma)+f(\delta)}{2}$,
- **iii)** υπάρχει t∈[α,β] τέτοιο ώστε $f(t)=\frac{f(\alpha)+2f(\gamma)+3f(\beta)}{6}$.

36. Θεωρούμε μια μη σταθερή συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [α,β] και τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ του [α,β].Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈[α,β], τέτοιο ώστε:

$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$, ν∈IN*.

37. **i)** Υπάρχει συνεχής συνάρτηση που να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές;
- **ii)** Εάν f συνεχής στο R, f(1)=2 και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, να δείξετε ότι f(x)=2 για κάθε x∈IR.

38. Αν f συνεχής στο [0,1] και f(0)=f(1), να δείξετε ότι:
- **i)** Υπάρχει $x_0 \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{2})$.
- **ii)** Υπάρχει $x_1 \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(x_1+\frac{1}{3})$.

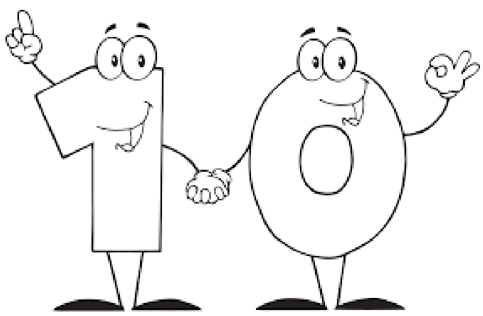
39. Εάν $\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0$, να δείξετε ότι $\beta^2 \geq 4\alpha\gamma$.

40. Εάν f:[0,2]→R, συνεχής με f(0)=f(2), να δείξετε ότι υπάρχουν $x_0,y_0 \in [0,2]$, με $|x_0-y_0|=1$ τέτοια ώστε $f(x_0)=f(y_0)$.

41. Έστω f συνεχής στο 0 και για κάθε x,y∈R ισχύει f(x+y)=f(x)συνy+f(y)συνx. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο IR.

42. Έστω f: IR→IR, και για κάθε x,y∈IR ισχύει f(x+y)=f(x)+f(y). Να δείξετε ότι:
- **i)** Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο IR.
- **ii)** Αν η f είναι συνεχής στο α∈R, τότε η f είναι συνεχής στο IR.

43. Έστω f: IR*→IR, και για κάθε x,y∈IR* ισχύει f(xy)=f(x)+f(y). Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο IR*.



Θέματα στην συνέχεια

1. Σωστό – Λάθος στις πανελλήνιες:

i. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή. Μονάδα 1

ii. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)<0 και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε f(ξ)=0,τότε κατ' ανάγκη f(β)>0. Μονάδες 2

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$, ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ. Μονάδες 2

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$, ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. Μονάδες 2

v. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μονάδες 2

vi. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 2

vii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$. Μονάδες 2

viii. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Μονάδες 2

2. Πανελλήνιες θετική κατ. 1980:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|(x-1)}{x}, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Θέμα 2ον 1983 (Οικονομικό):

Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους:

i) $f(x)=\begin{cases}\frac{4x^2-9x+2}{x-2}, & \text{αν } x\in R-\{2\}\\ 7 & \text{αν } x=2\end{cases}$ στο $x_o=2$.

ii) $g(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\geq 0\\ \frac{1}{x} & \text{αν } x<0\end{cases}$ στο $x_o=0$.

4. Μαθηματικό Αθηνών:

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $|f(x)|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x_o=0$.

ii) Αν η g είναι συνεχής στο $x_o=0$ με g(0)=0 και $|f(x)|\leq|g(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

5. Φυσικό Θεσ/νίκης:

Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $|\sigma\upsilon\nu x-1|\leq f(x)\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

ii) Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα εάν

$e^x-1\leq f(x)\leq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. Μαθηματικό Πατρών:

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+\lambda xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ μια σταθερά. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να δειχθεί ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7. Προτεινόμενο:

Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$x^4+(\alpha^2-2)x^2+(\alpha-1)x-\alpha^2=0$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,2).

8. Προτεινόμενο:

Έστω $p,q\in\mathbb{R}^*_+$ και η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_o)=\frac{pf(\alpha)+qf(\beta)}{p+q}.$$

9. Προτεινόμενο:

Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$, $g:[0,1]\to[0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις στο [0,1], με g(0)=0 και g(1)=1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα [0,1].

10. Προτεινόμενο: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3}{16}-\eta\mu\pi x+7$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή $7/2$ στο διάστημα [-4,4].

11. Προτεινόμενο: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=-\frac{x^3}{4}-\eta\mu\pi x+3$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει την τιμή $8/3$ στο διάστημα [-2,2].

12. Προτεινόμενο:

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to Q$ (όπου Q το σύνολο των ρητών αριθμών), που είναι συνεχής στο [0,1],με $f(5/8)=5/8$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

13. Θέματα πολλών εξετάσεων:
Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο IR.

14. Πανελλήνιες θετική κατ. 1979:
α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα;
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases} \boldsymbol{x^2\eta\mu\frac{1}{x}} & \text{αν } x\neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{αν } x=\mathbf{0} \end{cases}$ είναι συνεχής στο IR.

15. Θέματα πολλών εξετάσεων: Να δείξετε ότι η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|\leq$ $\leq|x-y|$ για κάθε $x,y\in$IR, είναι συνεχής στο IR.

16. Προτεινόμενο:
Έστω f: IR→IR μια πολυωνυμική συνάρτηση με $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\alpha_0\alpha_\nu<0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

17. Προτεινόμενο:
Έστω η συνεχής συνάρτηση f: [0,2]→ IR τέτοια ώστε $f(0)=f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x,y\in[0,2]$ τέτοιοι ώστε $|x-y|=1$ και $f(x)=f(y)$.

18. Μαθηματικό Αθηνών:
Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g:Δ→IR όπου Δ είναι ένα διάστημα και $\chi_o\in\Delta$. Αν $f(\chi_o)\neq g(\chi_o)$ και $f(\chi)=g(\chi)$ για κάθε $\chi\in\Delta-\{\chi_o\}$,να δείξετε ότι δεν είναι δυνατόν οι f,g να είναι ταυτόχρονα συνεχείς στο Δ.

19. Θέμα 3ον θετική-τεχνολογική 1999:
Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x)>0$ στο (0,1). Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$ να δείξετε ότι:
i) Η ευθεία y=3 τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.
Μονάδες 7
ii) Υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$f(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$. Μονάδες 12

20. END.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. 23106-4: Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε $(gof)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, για κάθε $x\in[0,\pi]$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)|=|\eta\mu x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f. (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi]\to$ IR με $h(x)=\frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. (Μονάδες 07)

2. 23375-4: Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)}=\ln\left(\sqrt{\mathrm{x}^2+1}-\mathrm{x}\right)$, $\mathrm{x}\in$ IR.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\mathrm{x}\in$ IR είναι $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}$. (Μονάδες 6)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το IR. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{f}^{-1}\left(\mathrm{x}+\mathrm{f(x)}\right)>\mathrm{x},\ \ \mathrm{x}\in$ IR. (Μονάδες 6)

3. 24761-3: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2023-\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο IR.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2022$. (Μονάδες 10)

4. **24767-2:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$, $x \in$ IR.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}. (Μονάδες 12)

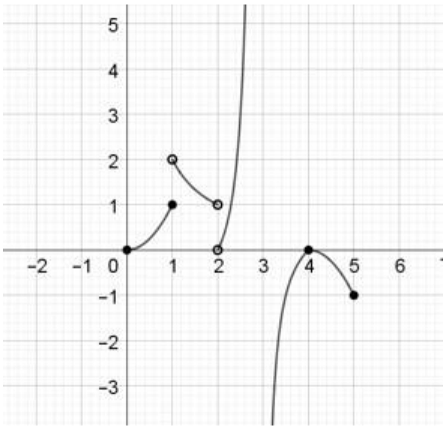
5. **25124-2:** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)

6. **25749-2:** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathrm{D_f} = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι f(1)=1. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$. (Μονάδες 5)

ii. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{f(x)}$. (Μονάδες 5)

7. **26605-4:** Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : IR → IR για την οποία ισχύουν :

- f^2(x) - 5 = x^2 για κάθε x ∈ IR.
- $f(2) = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ IR. (Μονάδες 4)

ii. f(x) = $\sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε x ∈ IR. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με g(x) = x^2– συνx, με x ∈ IR. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση f^2(x) = 5 + συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π). (Μονάδες 9)

8. **26640-4:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το IR. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$. (Μονάδες 5)

9. **27317-2:** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, x∈[0,2]

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο [0,2] (Μονάδες 10)

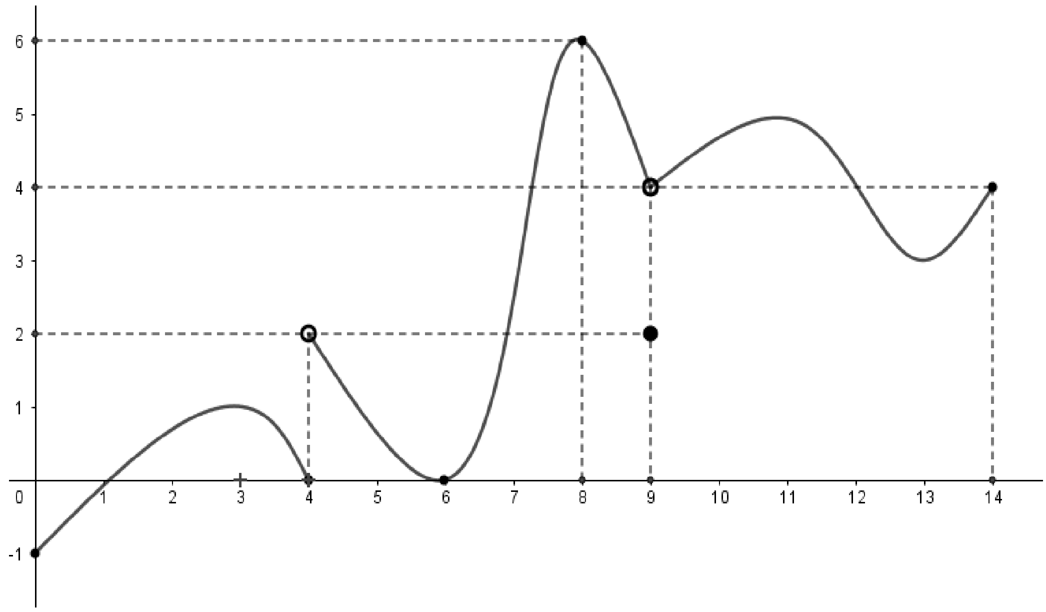
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το σύνολο τιμών της f είναι το [0, 2]. (Μονάδες 5)

ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 3)

iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1}είναι ίσες. (Μονάδες 7)

10. 27318-2: Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to 14} f(x)$

v. $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

11. 29834-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2+16} - \frac{5}{2}ln(8x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. (Μονάδες 9)

12. 31548-2: Έστω f: IR → IR μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε x∈ IR. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$. (Μονάδες 10)

β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. (Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1. (Μονάδες 5)

13. 35171-2 : Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε g(x) = 2lnx , x>0 και h(x) = ln(1 + x^2), x∈IR.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με x∈ IR. (Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση h ∘ g^{-1}. (Μονάδες 10)

14. END.