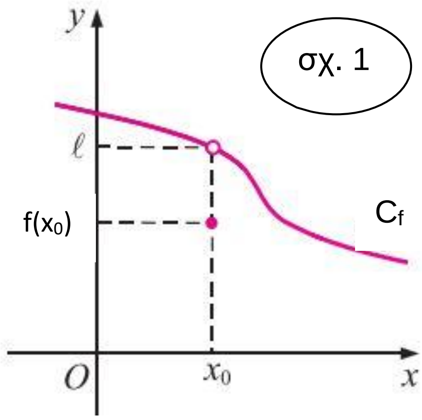
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής στο x_0**, όπου x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, εάν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. *Περιπτώσεις ασυνέχειας*: Μια συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής στο x_0, λέγεται **ασυνεχής στο x_0**. Μια συνάρτηση είναι ασυνεχής στο x_0, εάν:

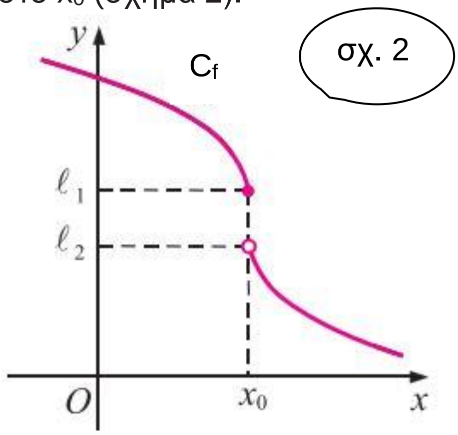
☛ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$ (σχήμα 1) .



Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$,

είναι $2 = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1) = 3$.

☛ Δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο x_0 (σχήμα 2).



Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}$ δεν έχει όριο στο 0 γιατί $1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq$

$\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$.

☛ Το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, γιατί $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

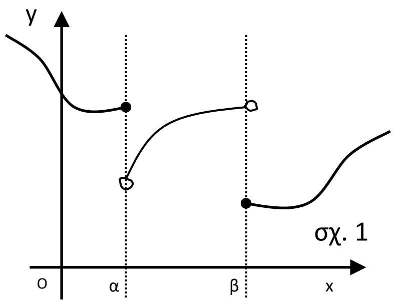
3. *Ορισμός*: Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, **συνεχής συνάρτηση.**

4. *Παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων*: Οι πολυωνυμικές, ρητές, εκθετικές, λογαριθμικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.

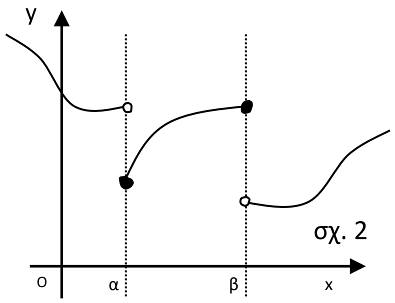
5. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις f+g, c·f με $c \in R$, f·g, $\dfrac{f}{g}$, |f| και $\sqrt[\nu]{f}$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$,τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

7. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (***α, β***),όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (*α*, *β*) (σχ. 1).



8. *Ορισμός*: Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** [***α, β***], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (*α*, *β*) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$ (σχ. 2).



σχ. 2

9. Ανάλογοι ορισμοί με τους ορισμούς 7 και 8, διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$ και $[\alpha, \beta)$ αντίστοιχα.

10. *Θεώρημα Bolzano*: Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και,
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
Άρα μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f, χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
Για το λόγο αυτό το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f βρίσκεται ως εξής:

a. Βρίσκουμε τις ρίζες της f αν υπάρχουν.
b. Κατασκευάζουμε τον βοηθητικό πίνακα με τις ρίζες της f.
c. Βάζουμε ως πρόσημο της f σε καθένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της, το πρόσημο της f σε ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο x_0 του κάθε διαστήματος.

12. *Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (ΘΕΤ)*:
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

Απόδειξη:
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$. Παρατηρούμε ότι:
- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)\cdot g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

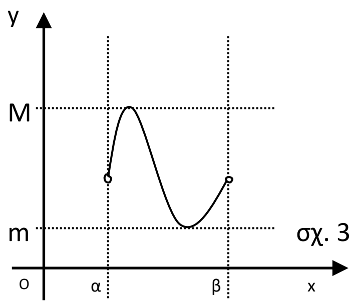
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του
Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

13. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές (μπορεί όμως και να τις παίρνει).

14. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης *f*, είναι διάστημα. Αν το διάστημα Δ είναι κλειστό, η εικόνα του $f(\Delta)$ είναι κλειστό διάστημα. (Εάν η συνάρτηση είναι σταθερή, η εικόνα είναι μονοσύνολο).

15. *ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)*: Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή *M* και μια ελάχιστη τιμή m.
Άρα το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα **[*m*, *M*]**.

16. Η εικόνα ανοικτού διαστήματος δεν είναι υποχρεωτικά ανοικτό διάστημα. Πχ. στο παρακάτω σχ. 3 είναι $f\big((\alpha,\beta)\big)=[m,M]$.



σχ. 3

17. ☛ Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(Α,B)$, όπου $Α=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$.

☛ Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(B,Α)$.
Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε εάν αντί του (α,β) έχουμε τα διαστήματα [α,β], [α,β), (α,β].
Δηλαδή:

☛ f([α,β])=[Α,Β] εάν f ↗ στο διάστημα [α,β].

f([α,β])=[Β,Α] εάν f ↘ στο διάστημα [α,β].

☛ f([α,β))=[Α,Β) εάν f ↗ στο διάστημα [α,β).

f([α,β))=(Β,Α] εάν f ↘ στο διάστημα [α,β).

☛ f((α,β])=(Α,Β] εάν f ↗ στο διάστημα (α,β].

f((α,β])=[Β,Α) εάν f ↘ στο διάστημα (α,β].

Στα παραπάνω, μπορεί να είναι α=-∞ και β=+∞.

19. Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Έτσι εάν η f συνεχής στο [α,β], έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $x_0\in(\alpha,\beta)$, δεν είναι κατ' ανάγκη f(α)f(β)<0.
Πχ η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$ έχει ρίζα το $2\in(0,4)$, ενώ f(0)=6 και f(2)=2.
Επίσης εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και f(α)f(β)>0, τότε η εξίσωση f(x)=0 μπορεί να έχει, αλλά και να μην έχει ρίζα στο διάστημα (α,β).
Πχ η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+1$ έχει ρίζα το $1\in(0,3)$, ενώ f(0)=1 και f(3)=4, οπότε f(0)f(3)=4>0.

20. Όταν σε ένα θέμα ζητείται η ύπαρξη ενός ξ (x_0 ή y κλπ) σε ένα διάστημα (α,β), ώστε να ισχύει μια ισότητα, τότε εφαρμόζουμε σε πρώτη φάση το Θ. Bolzano για μια συνάρτηση f στο διάστημα [α,β]. Για την επιλογή της συνάρτησης f ακολουθούμε γενικά τα εξής:

a. Θέτουμε στη ζητούμενη σχέση όπου ξ (x_0 ή y κλπ) το x και φέρνουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος,
b. Θεωρούμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για αυτή στο [α,β],
c. Εάν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποιο από τα α, β απαλείφουμε πρώτα τους ανεπιθύμητους παρονομαστές και μετά θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση.

21. Εάν κατά την εφαρμογή του Θ. Bolzano σε ένα διάστημα [α,β] προκύπτει f(α)f(β)≤0, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

a. εάν f(α)f(β)=0 τότε f(α)=0 ή f(β)=0,
b. εάν f(α)f(β)<0 τότε από Θ. Bolzano υπάρχει ξ∈(α,β) με f(ξ)=0.

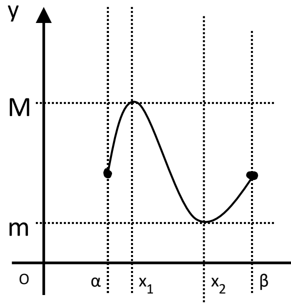
Από τις δυο περιπτώσεις προκύπτει ότι υπάρχει ξ∈[α,β] με f(ξ)=0.

22. Εάν δεν μας δίνεται το διάστημα ύπαρξης ρίζας, τότε βρίσκουμε μόνοι μας ένα διάστημα [α,β], έτσι ώστε f(α)f(β)<0.

23. Εάν ζητείται η ύπαρξη περισσοτέρων σημείων ξ_1, ξ_2, …, ξ_ν, που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα σε διάστημα (α,β), χωρίζουμε το διάστημα σε ν ξένα μεταξύ τους διαστήματα και εφαρμόζουμε σε αυτά το Θ. Bolzano. Τα διαστήματα αυτά είτε δίνονται είτε προσδιορίζονται μετά από προσεκτική μελέτη δεδομένων και ζητούμενων.

24. Δεν υπάρχει συνεχής μη σταθερή συνάρτηση f:R→Q, γιατί το Q δεν μπορεί να περιέχει την εικόνα f(R) του R που είναι διάστημα.

25. Εάν f ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη Μ και μια ελάχιστη τιμή m. Υπάρχουν δηλ. δυο τουλάχιστον x_1, x_2 στο [α,β], τέτοια ώστε $f(x_1)=M$ και $f(x_2)=m$ (σχ. 4).

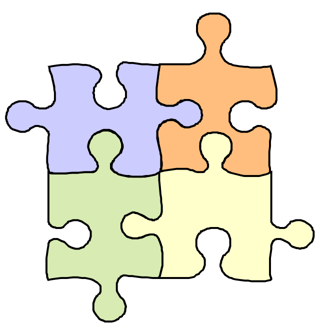


σχ. 3

26. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f παίρνει την τιμή **η** σε ένα διάστημα [α, β], αρκεί να δείξουμε ότι m≤**η**≤M, όπου m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α, β].

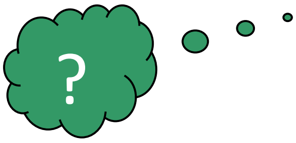
27. Η χρήση του Θ. Bolzano, δεν είναι πάντα ο μόνος (ή ο συντομότερος τρόπος) για να δείξουμε την ύπαρξη ριζών. Η παρατηρητικότητα και η άμεση επίλυση, μερικές φορές πλεονεκτούν. (πχ. Άσκηση 38ii, 39)

28. Για να δείξουμε την ύπαρξη ρίζας σε σύνολο Α μιας συνάρτησης, και δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στο Α, τότε μπορεί να εφαρμόζεται σε κάποιο υποσύνολο Β του Α (άσκ. 35).



ΣΥΝΕΧΕΙΑ - ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

1. Εάν $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$, για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι η **f** είναι συνεχής στο $x_0=0$.
2. Να υπολογίσετε τα **α, β**∈**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+\beta x-3}{x-1}, & \text{αν } x \ne 1 \\ 4, & \text{αν } x=1 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο **R**.



3. Να υπολογίσετε τα **α, β**∈**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2-(\beta-2)x-6}{x-2}, & \text{αν } x \ne 2 \\ 9, & \text{αν } x=2 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο **R**.
4. Να υπολογίσετε τα **α, β, γ**∈**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}, & \text{αν } x \ne 1 \\ 7, & \text{αν } x=1 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο **R**.

5. Να υπολογίσετε τα **α, β**∈**R**, ώστε η $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x-\beta\eta\mu 2x}{x}, & \text{αν } x<0 \\ \alpha-1, & \text{αν } x=0 \\ \dfrac{2-\sqrt{4+x}}{\beta x}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο $x_0=0$.
6. Εάν η **f** είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $|xf(x)-\eta\mu x| \le x^4 \eta\mu \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x \in R^*$, να υπολογίσετε το **f(0)**.
7. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$, τέτοιο ώστε $\xi^4=11-2\xi$.
8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^{2\kappa}+1}{x-a}+\dfrac{x^{2\lambda}+1}{x-\beta}=0$ με **α,β**∈**R**, **α<β** και **κ, λ**∈**N*** έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα **(α,β)**.
9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\eta\mu x}{4x-\pi}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{3x-\pi}=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα **(π/4,π/3)**.
10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\alpha}{x-\lambda}+\dfrac{\beta}{x-\mu}+\dfrac{\gamma}{x-\nu}=0$ όπου **α, β, γ > 0** και **λ<μ<ν** έχει δυο ακριβώς πραγματικές άνισες ρίζες στα διαστήματα **(λ,μ)** και **(μ,ν)**.
11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4=11-2x$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα **(-2,2)**.
12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+x\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα **(-π/2,π/2)**.
13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^{10}-3x^7+4x^5-7x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
14. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x(1-4\sigma\upsilon\nu x)=4\eta\mu^2 x-x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα **(π,2π)**.

15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2+xe^{ημx}=συνx$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi/2,0)$ και $(0,\pi/2)$.

16. Εάν $f:[α,β]\to[α,β]$ είναι συνεχής στο $[α,β]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[α,β]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

17. Έστω **f**, **g** συνεχείς στο $[α,β]$ και τιμές στο $[α,β]$, τέτοιες ώστε $g(α)=α$ και $g(β)=β$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[α,β]$.

18. Έστω **f**, **g** συνεχείς στο $[α,β]$ και $f(α)+f(β)=g(α)+g(β)$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των **f** και **g** έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in[α,β]$.

19. Εάν **f** είναι συνεχής στο $[α,β]$, $f(α)\neq f(β)$ και **κ**, **λ** θετικοί πραγματικοί, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ\in(α,β)$, τέτοιο ώστε $κf(α)+λf(β)=(κ+λ)f(ξ)$.

20. Έστω $f:R\to R$ με $f(x)=x^2+3x-7$ και $g:R\to R$ με $g(x)=f(x)-λx$ όπου $λ\in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[ρ_1,ρ_2]$ όπου $ρ_1,ρ_2$ είναι οι ρίζες της f(x)=0, με $ρ_1 < ρ_2$.

21. Έστω $f:A\to R$ με $f(x)=x^3-7x+5$ και $A=[-3,-2]$. Να αποδείξετε ότι:

i) η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο **A**,

ii) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(-3,-2)$.

22. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{5}{x}+7=3\sqrt{x}$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα.

23. **i)** να αποδείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:A\to R$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα στο **A**, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα **x΄Ox** σε ένα το πολύ σημείο,

ii) να δείξετε ότι η εξίσωση $3^x+5^x=7^x$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

iii) ομοίως η εξίσωση $x^2+xe^x+\ln x=4$.

24. Θεωρούμε τις γραμμές **(c)** και **(ε)** που ορίζουν οι εξισώσεις **(c):** $y=x^3+x^2$ και **(ε):** $y=5x-3$. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω γραμμές τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη μεταξύ **-4** και **-2**.

25. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{2x^3+x-1}=\dfrac{2}{x}$ έχει ακριβώς μια θετική πραγματική ρίζα.

26. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^ν e^x=1$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

27. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f:[-1,2]\to R$, με $f(x)=x^2+3|x|$.

28. Εάν $α,β>0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $ασυνx+β=x$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα, που δεν υπερβαίνει το $α+β$.

29. Αν **f** συνεχής στο $[0,1]$ και $0\leq f(x)\leq 1$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$, τέτοιο ώστε $f^2(x_0)+f(x_0)=x_0^2+x_0$.

30. Έστω $f:[π,2π]\to R$, με $f(x)=x+συνx-4$.

i) Να δείξετε ότι η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $[π,2π]$,

ii) να βρείτε το σύνολο τιμών της και

iii) να δείξετε ότι η εξίσωση $συνx=4-x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[π,2π]$.

31. Να βρείτε το πρόσημο της $f(x)=x^3-4x^2-5x$.

32. Έστω **f** συνεχής στο $[-3,3]$, $f(1)>0$ και $4x^2+9f^2(x)=36$, για κάθε $x\in(-3,3)$. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-3,3)$.

33. Έστω $f: [α,β]\to R$, συνεχής στο $[α,β]$, τέτοια ώστε $α^2f(β)+β^2f(α)=0$. Να αποδείξετε ότι αν $αβ\neq 0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[α,β]$.

34. Έστω $f: [α,β]\to R$, συνεχής στο $[α,β]$, τέτοια ώστε $κf(α)+λf(β)=0$, όπου κ, λ θετικοί πραγματικοί. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[α,β]$.

35. Εάν **f** συνεχής στο διάστημα **Δ** και $α,β,γ,δ\in Δ$ με $α<γ<δ<β$, να δείξετε ότι:

i) υπάρχει $ξ\in[α,β]$ τέτοιο ώστε $f(ξ)=\dfrac{f(α)+2f(β)}{3}$,

ii) υπάρχει $x_0\in(α,β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(γ)+f(δ)}{2}$,

iii) υπάρχει $t\in[α,β]$ τέτοιο ώστε $f(t)=\dfrac{f(α)+2f(γ)+3f(β)}{6}$.

36. Θεωρούμε μια μη σταθερή συνάρτηση **f**, συνεχή στο διάστημα **[α,β]** και τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ του **[α,β]**.Να δείξετε ότι υπάρχει **ξ∈[α,β]**, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_\nu)}{\nu}$, **ν∈N***.

37. **i)** υπάρχει συνεχής συνάρτηση που να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές;
ii) εάν **f** συνεχής στο **R**, **f(1)=2** και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, να δείξετε ότι **f(x)=2** για κάθε **x∈R**.

38. Αν **f** συνεχής στο **[0,1]** και **f(0)=f(1)**, να δείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0 \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{2})$,

ii) υπάρχει $x_1 \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(x_1 + \frac{1}{3})$.

39. Εάν $\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0$, να δείξετε ότι $\beta^2 \geq 4\alpha\gamma$.

40. Εάν **f:[0,2]→R**, συνεχής με **f(0)=f(2)**, να δείξετε ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in [0,2]$, με $|x_0-y_0|=1$ τέτοια ώστε $f(x_0)=f(y_0)$.

41. Έστω **f** συνεχής στο **0** και για κάθε **x,y∈R** ισχύει **f(x+y)=f(x)συνy+f(y)συνx**. Να δείξετε ότι η **f** είναι συνεχής στο **R**.

42. Έστω **f:R→R**, και για κάθε **x,y∈R** ισχύει **f(x+y)=f(x)+f(y)**. Να δείξετε ότι
i) αν η **f** είναι συνεχής στο **0,** τότε η **f** είναι συνεχής στο **R**.
ii) αν η **f** είναι συνεχής στο **α∈R,** τότε η **f** είναι συνεχής στο **R**.

43. Έστω **f:R*→R**, και για κάθε **x,y∈R*** ισχύει **f(xy)=f(x)+f(y)**. Να δείξετε ότι αν η **f** είναι συνεχής στο **1,** τότε η **f** είναι συνεχής στο **R***.

44.