

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. **23106-4:** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε $(gof)(x) = |\sin x|$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. (Μονάδες 07)

2. **23375-4:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 6)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το \mathbb{R} . (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x + f(x)) > x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

3. **24761-3:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$. (Μονάδες 10)

4. **24767-2:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 12)

5. **25124-2:** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 7)

6. **25749-2:** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x' σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0,0)$ και $(4,0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1)=1$. Με βάση το παρακάτω σχήμα:

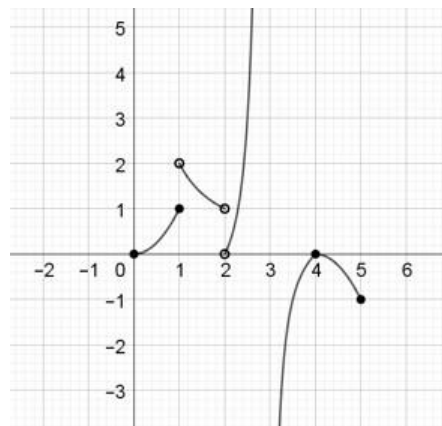
α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$. (Μονάδες 5)

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$. (Μονάδες 5)



7. **26605-4:** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(2) = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. (Μονάδες 9)

8. **26640-4:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} . (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$. (Μονάδες 5)

9. **27317-2:** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)

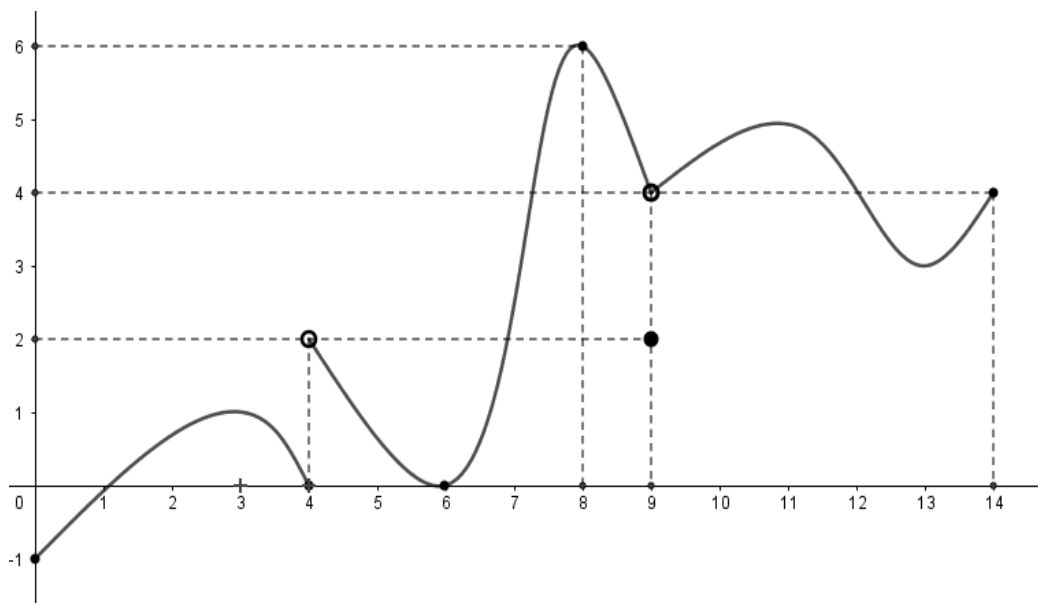
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 5)

ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 3)

iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 7)

10. **27318-2:** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

v. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 14} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

11. 29834-2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. (Μονάδες 9)

12. 31548-2: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$.

(Μονάδες 10)

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1.

(Μονάδες 5)

13. 35171-2 : Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε $g(x) = 2 \ln x$, $x > 0$ και $h(x) = \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη

(Μονάδες 5)

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$.

(Μονάδες 10)

14. END.

