

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ**ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

- 1) **Ορισμός:** Έστω $f:A \rightarrow R$ και $g:B \rightarrow R$. **Σύνθεση της f με την g** (συμβολίζουμε **gof**), ονομάζουμε την συνάρτηση με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$ και πεδίο ορισμού $A_{gof} = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\}$.
- 2) Η σύνθεση ορίζεται μόνο στην περίπτωση που $f(A_f) \cap B_g \neq \emptyset$.
- 3) Προφανώς $(fog)(x) = f(g(x))$ και πεδίο ορισμού $A_{fog} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\}$.
- 4) Γενικά $gof \neq fog$.
- 5) $(gof) \circ h = go(f \circ h) = gofoh$. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες συναρτήσεις.
- 6) Αν $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in B_1 \\ g_2(x), & x \in B_2 \end{cases}$,

$$\text{τότε } (f \circ g)(x) = \begin{cases} (f_1 \circ g_1)(x), & x \in \Gamma_1 \\ (f_1 \circ g_2)(x), & x \in \Gamma_2 \\ (f_2 \circ g_1)(x), & x \in \Gamma_3 \\ (f_2 \circ g_2)(x), & x \in \Gamma_4 \end{cases} \quad \text{όπου } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \text{ είναι τα πεδία ορισμού των αντίστοιχων}$$

συνθέσεων. Προφανώς αν κάποιο από αυτά είναι το κενό σύνολο, δεν υπάρχει ο αντίστοιχος τύπος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εάν $f(x) = 2x - 1$, $x \in [-3, 3]$ και $g(x) = 5 - 2x$, $x \in [3, 7]$, να βρείτε τις gof και fog .
2. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού $(3, 7)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog , όπου $g(x) = x^2 - x + 1$.
3. Βρείτε την fog , όταν $f(x) = \frac{x}{x-4}$ και $g(x) = x^2 - x + 2$.
4. Βρείτε τις gof και fog , όταν $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ και $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$.
5. Έστω $f: R \rightarrow R$ με $(f \circ f)(x) = 4 - x$, για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι $f(2) = 2$.
6. Έστω $f: R \rightarrow R$ με $(f \circ f)(x) = xf(x)$, για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
7. Αν $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = 4x + 9$, να δείξετε ότι $gof = fog$.
8. Εάν $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \eta\mu 2x - 1$ και $g(0) = 1$, βρείτε το $(gof)(2004)$.
9. Εάν $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, να δείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in A_f$.
10. Βρείτε τις gof και fog , όταν $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ και $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$.
11. Εάν $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \in [-3, 1]$ και $g(x) = x + 2$, $x \in [-2, 3]$, να βρείτε τις gof και fog .
12. Βρείτε την gof , όταν $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ και $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$.
13. Εάν $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ και $g(x) = -x$, να δείξετε ότι $fog = -f$.
14. Έστω $f, g: R \rightarrow R$ τέτοιες ώστε $g(x) = x - 2$ και $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$, για κάθε $x \in R$. Να βρείτε τον τύπο της f .
15. Ομοίως εάν $f(x) = x + 3$ και $(f \circ g)(x) = e^{x+1} + 3$, να βρείτε τον τύπο της g .
16. Έστω $f, g: R \rightarrow R$. Να δείξετε ότι:
 - i) Αν f άρτια και g περιττή, τότε gof και fog είναι άρτιες,
 - ii) Αν f και g περιττές, τότε gof και fog είναι περιττές.
17. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού το $[7, 27]$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x) = f(x^3 + x - 3)$.