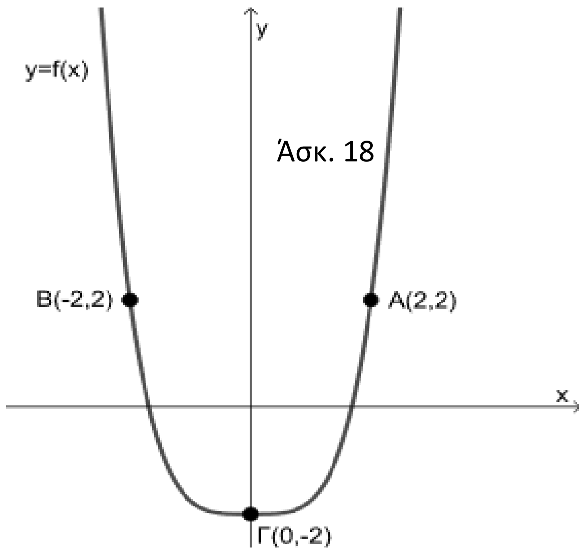
ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) *Ορισμός*: Έστω f:A→IR και g:B→IR. **Σύνθεση της f με την g** (συμβολίζουμε **gof**), ονομάζουμε την συνάρτηση με τύπο (gof)(x)=g(f(x)) και πεδίο ορισμού $A_{gof}=\{x\in A_f/\ /f(x)\in A_g\}$.
2) Η σύνθεση ορίζεται μόνο στην περίπτωση που $f(A_f)\cap B\neq\varnothing$.
3) Προφανώς (fog)(x)=f(g(x)) και πεδίο ορισμού $A_{fog}=\{x\in A_g/g(x)\in A_f\}$.
4) Γενικά gof≠fog.
5) (gof)oh=go(foh)=gofoh. Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερες συναρτήσεις.
6) Αν $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A_1 \\ f_2(x), & x\in A_2 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x\in B_1 \\ g_2(x), & x\in B_2 \end{cases}$, τότε $(f\circ g)(x)=\begin{cases} (f_1\circ g_1)(x), & x\in\Gamma_1 \\ (f_1\circ g_2)(x), & x\in\Gamma_2 \\ (f_2\circ g_1)(x), & x\in\Gamma_3 \\ (f_2\circ g_2)(x), & x\in\Gamma_4 \end{cases}$, όπου Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 είναι τα πεδία ορισμού των αντίστοιχων συνθέσεων. Προφανώς αν κάποιο από αυτά είναι το κενό σύνολο, δεν υπάρχει ο αντίστοιχος τύπος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εάν f(x)=2x-1, x∈[-3,3] και g(x)=5-2x, x∈[3,7], να βρείτε τις gof και fog.
2. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού (3,7), να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog, όπου $g(x)=x^2-x+1$.
3. Βρείτε την fog, όταν $f(x)=\frac{x}{x-4}$ και $g(x)=x^2-x+2$.
4. Βρείτε τις gof και fog, όταν $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ και $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$.
5. Έστω f:IR→IR με (fof)(x)=4-x, για κάθε x∈IR. Να δείξετε ότι f(2)=2
6. Έστω f: IR→IR με (fof)(x)=xf(x), για κάθε x∈IR. Να δείξετε ότι f(0)=0.
7. Αν f(x)=2x+3 και g(x)=4x+9, να δείξετε ότι gof=fog.
8. Εάν $f(x)=(ημx+συνx)^2-ημ2x-1$ και g(0)=1, βρείτε το (gof)(2004).
9. Εάν $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, να δείξετε ότι (fof)(x)=x, για κάθε $x\in A_f$.
10. Βρείτε τις gof και fog, όταν $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ και $g(x)=\frac{x+3}{x-2}$.
11. Εάν $f(x)=x^2-2x+3$, x∈[-3,1] και g(x)=x+2, x∈[-2,3], να βρείτε τις gof και fog.
12. Βρείτε την gof , όταν $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ και $g(x)=\frac{x-3}{x-2}$.
13. Εάν $f(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και g(x)=-x, να δείξετε ότι fog=-f.
14. Έστω f,g: IR→IR τέτοιες ώστε g(x)=x-2 και $(fog)(x)=x^2+x+1$, για κάθε x∈R. Να βρείτε τον τύπο της f.
15. Ομοίως εάν f(x)=x+3 και $(fog)(x)=e^{x+1}+3$, να βρείτε τον τύπο της g.
16. Έστω f,g: IR→IR. Να δείξετε ότι:
    i) Αν f άρτια και g περιττή, τότε gof και fog είναι άρτιες,
    ii) Αν f και g περιττές, τότε gof και fog είναι περιττές.
17. Εάν η f έχει πεδίο ορισμού το [7,27], να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x)=f(x^3+x-3)$.
18. **28304-2:** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f : IR→IR διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(0,-2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση g : IR→IR με $g(x)=|x|$.
    α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. Μονάδες 8
    β) Να βρείτε τις τιμές $(gof)(2)$, $(gof)(-2)$ και $(gof)(0)$. Μονάδες 8
    γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης gof. Μονάδες 9



19. **29832-2:** Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x)=ln\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το IR* και της g το διάστημα (-1, 1).

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$. (Μονάδες 9)

20. 35168-2: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h ώστε
f(x) = ln(1+ e^x) , g(x) = 2lnx και h(x) = ln(1 + x^2).

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f ∘ g. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f ∘ g και h είναι ίσες. (Μονάδες 8)

21. 29831 ΘΕΜΑ 2: Δίνεται η συνάρτηση f: IR*→ IR και η συνάρτηση $g(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα (-1, 1). (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in$ IR*. (Μονάδες 10)

22. END.